Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Vaillant

Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1966-1967), p. 27-63

<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1966-1967___3_27_0>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DONNÉES DE CAUCHY PORTÉES PAR UNE CARACTÉRISTIQUE DOUBLE, DANS LE CAS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, RÔLE DES BICARACTÉRISTIQUES

par Jean VAILLANT

0. Introduction.

Ce travail a pour objet le problème mixte de Darboux, Goursat, Beudon, Hadamard et l'étude de la propagation le long de bicaractéristiques dans des cas de caractéristiques multiples. Le problème de Darboux, Goursat, Beudon, Hadamard, forme généralisée du problème de Cauchy, donne un moyen de classer les équations aux dérivées partielles à partir de leurs caractéristiques; son étude conduit à l'étude algébrique de matrices de polynômes et montre la nécessité de généraliser les classifications du type de Petrowsky [14]. L'étude de la propagation conduit, lorsque les caractéristiques sont "fronts d'ondes", pourvu que des hypothèses de "non singularité" que nous préciserons soient réalisées, à des cas où l'on peut calculer les coefficients du développement formel de la solution à l'aide d'équations différentielles (ordinaires), le long des bicaractéristiques ; ce résultat remarquable a conduit à utiliser la méthode des "rayons" à propos de nombreuses recherches d'ondes asymptotiques, ainsi : Lax [8], Ludwig [12], Gårding, Kotaké, Leray [9], Lewis [10], Lewis et Keller [11], (dans ce dernier mémoire, on trouvera une bibliographie sur ces questions, travaux de Keller...), Mme Y. Choquet-Bruhat [20], [21], [26] ; ce même résultat est lié à la définition de l'hyperbolicité. Cependant, même dans le cas linéaire, lorsque les caractéristiques sont multiples, le problème de Darboux, Goursat, Beudon, Hadamard, comme celui de la propagation, n'ont pu être résolus de façon générale, en partie à cause de la difficulté des calculs.

Les résultats du livre classique de Hadamard [6], recouvrent pratiquement tous les cas d'équations ou de systèmes, à caractéristiques simples ou multiples, où la propagation est décrite par des équations différentielles du 1er ordre. Dans le cadre de tels cas, Courant et Lax [3], Lax [8], Lewis [10], Ludwig [12], ont publié des articles où les problèmes de Cauchy à données discontinues, à données oscillatoires sont résolus et généralisés ; Gårding, Kotaké, Leray [9], Mme Y. Choquet-Bruhat [21], [26] donnent les calculs les plus généraux d'ondes asymptotiques et montrent leur analogie avec les calculs des théorèmes d'uniformisation. Nous indiquerons maintenant des résultats à caractéristiques multiples, en dehors du cas de Hadamard, et nous nous bornerons à des résultats concernant les problèmes cités au début, (théorème de Darboux..., calcul des coefficients d'un développement formel). Duff [4], à propos d'un système d'équations aux dérivées partielles du 1er ordre, remarque que l'origine des difficultés dans certains cas - en fait, ceux non décrits par Hadamard - provient de la présence de facteurs invariants non simples, (c'est-à-dire décomposables en facteurs irréductibles de multiplicité supérieure à 1), lorsqu'on met le système sous la forme canonique de Petrowsky [14], et il obtient un théorème de Darboux, Goursat, Beudon, Hadamard dans ces cas; la propagation n'est cependant pas décrite et la méthode ne peut s'employer que pour un système d'équations du 1er ordre, en se ramenant à deux variables principales, car elle utilise la forme réduite de Jordan et essentiellement des résultats relatifs aux anneaux euclidiens, (cf. par exemple, Van der Waerden [19]) ; dans Duff [5] on ramène le cas d'une seule équation d'ordre supérieur à 1 à celui d'un système, en laissant de côté les cas de facteurs invariants non simples. Dans son mémoire [13], Ludwig étudie un système de deux équations aux dérivées partielles, linéaires du 1er ordre, et à coefficients constants, et montre que, pour une caractéristique double la propagation des coefficients du développement étudié est décrite par des équations différentielles du second ordre, lorsqu'il y a front d'onde; la caractérisation algébrique de ce cas, à l'aide de valeurs propres, ne peut s'employer que pour un système du 1er ordre. Dans Vaillant [15], pour un système linéaire de m équations d'ordre t, à coefficients constants, on montre que la propagation est décrite, sur un plan caractéristique, front d'onde, de multiplicité quelconque, "non singulier", par des équations différentielles d'ordre supérieur à 1, leur ordre est précisé ; la caractérisation algébrique des différents cas se fait en déterminant les facteurs invariants de la matrice caractéristique considérée comme matrice sur l'anneau localisé [1] de l'anneau des polynômes par rapport à l'idéal correspondant à la caractéristique étudiée ; ces résultats permettent de montrer que les cas classiques de propagation décrite par des équations différentielles du 1er ordre correspondent à une matrice caractéristique où les facteurs invariants, dans l'anneau localisé, sont simples ; l'hypothèse de "non singularité" exclue essentiellement les cas de contact singulier avec le cône caractéristique qui donneraient lieu, par exemple, à des phénomènes analogues à la réfraction conique (à ce sujet voir les travaux de Ludwig ; on peut aussi utiliser certains calculs de [15]) ; on remarque que, dans les cas de propagation, les hypothèses de Mme Lax [7]*) nécessaires et suffisantes pour avoir un problème de Cauchy bien posé pour une équation à 2 variables d'ordre t, à caractéristiques multiples, sont satisfaites. Dans Vaillant [16], on étudie le cas d'une seule équation d'ordre t, à coefficients variables et à caractéristiques multiples par une méthode directe. Enfin la note [17], préliminaire au travail exposé ici contient des résultats incomplets qui seront précisés et simplifiés dans ce mémoire. En résumé, nous étudierons ici un système linéaire de m équations aux dérivées partielles, d'ordre t, à coefficients analytiques, à m inconnues ; on retrouvera le cas de la propagation classique par équations différentielles du 1er ordre, lorsque la matrice caractéristique est équivalente dans l'anneau localisé convenable à la

*) Cf. aussi [27].

forme,

$$\begin{pmatrix} H' & & & \\ & H' & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

et on montrera que lorsque la matrice se réduit à la forme,

$$\begin{pmatrix} (H')^2 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

deux cas sont possibles, pour une caractéristique "non singulière" : ou bien il y a propagation le long des bicaractéristiques décrite par une équation différentielle d'ordre 2, ou bien il n'y a pas front d'onde ; la distinction entre les 2 cas se fait à l'aide d'un invariant analogue à la fonction j de Gårding, Kotaké, Leray [9] ; lorsque la matrice caractéristique est self-adjointe il y a nécessairement propagation par équations différentielles ; on donne une définition moins stricte que celle de [15] et plus explicite des hypersurfaces caractéristiques non singulières ; on obtient, comme cas particulier, si les coefficients sont constants, des résultats analogues à ceux de Ludwig [13] ; on donne enfin un théorème généralisant le théorème classique de Darboux, Goursat, Beudon, Hadamard.

Dans une autre publication, nous indiquerons les conclusions d'une étude analogue pour le cas plus général

$$\begin{pmatrix} (H')^2 & & & \\ & (H')^2 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Je remercie vivement Jean Leray de ses encouragements, qui m'ont été très précieux.

1. Anneau localisé et invariants.

Soit E une variété analytique réelle* ; x un point de E ; $x^0, x^1, \ldots, x^\alpha, \ldots, x^n$ des coordonnées locales de x ; un indice grec tel que α varie de 0 à n : $0 \leqq \alpha \leqq n$.

On considère un système de m équations aux dérivées partielles à m inconnues ayant dans chaque système de coordonnées locales une expression de la forme :

*) On aurait un exposé analogue à partir d'une variété analytique complexe, en remplaçant les fonctions analytiques réelles par des fonctions analytiques complexes.

$$(1) \quad \sum_{B} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_t} H_B^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_t A} \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_t} y^B$$

$$+ \sum_{B} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{t-1}} H^{*\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{t-1} A} \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{t-1}} y^B + \ldots = f^A ;$$

on a posé :

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} , \partial_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} , \ldots ;$$

les indices tels que A, B varient de 1 à m : $1 \leqq A \leqq m$; les inconnues y^B, les seconds membres f^A, les coefficients

$$H_B^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_t A} , H_B^{*\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{t-1} A} , \ldots$$

de chaque opérateur différentiel sont des fonctions analytiques des x^α ; ces coefficients sont totalement symétriques en α. Les m^2 opérateurs différentiels (agissant dans chacune des m équations sur chaque y^B) sont d'ordre inférieur ou égal à t. On emploiera dans la suite la convention de sommation d'Einstein pour les indices $A, B, \ldots$ et les indices $\alpha, \beta, \ldots$

Si φ est une fonction analytique sur E, on notera ℓ son gradient en x, de composantes en coordonnées locales $\partial_\alpha \varphi$.

Au système (1), on associe la matrice (H_B^A) où :

$$H_B^A = H_B^A(x,\ell) = H_B^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_t A} \ell_{\alpha_1} \ell_{\alpha_2} \ldots \ell_{\alpha_t} ;$$

on appelle (H_B^A) matrice caractéristique du système ; ses éléments sont des polynômes de degré t (ou nuls) en $\ell_0, \ell_1, \ldots \ell_\alpha, \ldots \ell_n$; son déterminant est noté H ; la matrice (H_B^A) et H sont invariants dans un changement des coordonnées locales (cf. [22], [9]).

Nous étudierons le système dans un ouvert Ω où H n'est jamais le polynôme nul ; H est donc de degré mt ; pour chaque équation l'un des m opérateurs de cette équation est donc d'ordre t.

L'anneau $\mathbb{R}[\ell_\alpha]$ des polynômes sur $\mathbb{R}$ est factoriel, [23] ; en chaque point x, H se décompose de façon unique en un produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\ell_\alpha]$; ces facteurs sont des invariants dans les changements de coordonnées locales. Nous supposerons en fait que, sur Ω, on a :

$$H = (H')^\nu H'' ,$$

où ν est un entier constant sur Ω, appelé multiplicité de H' ; dans chaque système de coordonnées locales, H' et H'' sont des polynômes en ℓ_α ; on suppose qu'ils dépendent analytiquement de x et que H'' n'est jamais divisible par H' ; en résumé nous supposons la multiplicité de H' constante sur Ω.

Dans la suite nous serons amenés à considérer une hypersurface qui annule H', dans un sens que nous préciserons ; pour cette raison, nous serons conduits à introduire l'anneau localisé suivant.

En chaque point x, ayant choisi un système de coordonnées, on considère l'anneau localisé, ([1]), de $\mathbb{R}[\ell_\alpha]$ par rapport à l'idéal premier défini par H'; cet anneau sera noté Φ; les éléments de Φ sont les fractions du corps des fractions de $\mathbb{R}[\ell_\alpha]$ qui sont telles que leur dénominateur n'appartienne pas à l'idéal défini par H'. Si $\frac{Q_1}{Q_2}$ est un élément non nul de Φ, on décompose son numérateur en produits d'éléments irréductibles ; soit $v(\frac{Q_1}{Q_2})$ l'exposant de H' dans cette décomposition ; on l'appellera la valuation de $\frac{Q_1}{Q_2}$; on a évidemment

$$v\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) \geqq 0 .$$

L'anneau Φ est un anneau de valuation discrète, [24], ses idéaux sont de la forme $\Phi(H')^\chi$ où χ est un entier positif : $\chi \geqq 0$. Φ est donc un anneau principal.

Comme Φ est principal, la matrice (H^A_B), considérée comme matrice d'éléments de Φ est équivalente, cf. [25], à une matrice diagonale de la forme :

$$\begin{pmatrix} (H')^{q_1} & & & 0 \\ & (H')^{q_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (H')^{q_m} \end{pmatrix} \tag{2}$$

avec $q_1 \geqq q_2 \geqq \dots \geqq q_m \geqq 0$.

Les éléments de la diagonale définissent les facteurs invariants de la matrice.

Dans les deux cas que nous étudierons, nous supposerons $q_1, q_2, \dots, q_n$ constants sur Ω, ce qui précise l'hypothèse de multiplicité constante. Il résulte de sa définition que cette hypothèse est en fait indépendante du choix des coordonnées.

Nous étudierons dans la suite les deux cas suivants :

Cas (I)

$$(H^A_B) \sim \begin{pmatrix} H' & & & & & \\ & H' & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & H' & & \\ & & & & 1 & \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \Bigg\} \, k \text{ lignes : } 0 \leqq k \leqq m$$

Cas (II)

$$(H^A_B) \sim \begin{pmatrix} (H')^2 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas (I), H' a la multiplicité $\nu = k$.

Nous nous proposons de construire des suites de polynômes en ℓ :

$$(\delta^1(x,\ell), \ldots, \delta^B(x,\ell), \ldots, \delta^m(x,\ell))$$

telles que chaque polynôme soit un invariant et que, pour chaque x :

$$H^A_B \;\; \delta^B \equiv 0 \text{ modulo } H',$$

(c'est-à-dire $H^A_B \, \delta^B$ soit un multiple de H').

Nous utiliserons des résultats de [15] que nous résumerons ici. On convient de noter A^{DEF}_{ABC} le cofacteur de $H^A_D \, H^B_E \, H^C_F$ dans le développement de H ; ce cofacteur correspond au mineur obtenu en rayant les A^m, B^m, C^m lignes de (H^A_B), ainsi que les D^m, E^m, F^m colonnes ; on utilise des notations analogues pour les cofacteurs ayant un plus grand nombre d'indices. Dans le cas (I) il existe, (cf.[25]), au moins un cofacteur d'ordre $(m-k)$ qui n'est pas divisible par H' ; on peut supposer que c'est $A^{12\ldots k}_{12\ldots k} = A$. Convenons qu'un indice surbarré varie de 1 à k : $1 \leqq \bar{A} \leqq k$ et qu'un indice chapeauté varie de $(k+1)$ à m : $(k+1) \leqq \hat{C} \leqq m$. Posons alors :

$$\delta^{\bar{B}}_{\bar{D}} = 0 \quad \text{si} \quad \bar{B} \neq \bar{D} \quad ; \quad \delta^{\bar{D}}_{\bar{D}} = A \quad ; \quad \delta^{\hat{C}}_{\bar{D}} = A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)-k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k} \; .$$

On vérifie que :

$$H^{\bar{E}}_B \, \delta^B_{\bar{D}} = (-1)^{(\bar{E}+\bar{D})} \, A^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k}_{12-(\bar{E}-1)(\bar{E}+1)\ldots\ldots k} = \mathcal{A}^{\bar{E}}_{\bar{D}} \, H'$$

$$H^{\hat{C}}_B \, \delta^B_{\bar{D}} = 0 \; ;$$

le fait que $A^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots(E-1)(\bar{E}+1)\ldots k}$ soit divisible par H' résulte de la définition du cas (I) ; $\mathcal{A}^{\bar{E}}_{\bar{D}}$ est défini par l'égalité précédente. On a donc :

$$H^A_B \, \delta^B_{\bar{D}} = 0, \text{ mod. } H'$$

On a ainsi construit une famille $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\bar{D}}, \ldots, \delta_k)$ de k suites de m polynômes et chacun des polynômes est invariant dans un changement de coordonnées locales ; de plus chacun d'eux dépend analytiquement de x.

On construira de même une famille $(\gamma^1, \ldots, \gamma^{\bar{F}}, \ldots, \gamma^k)$ en posant :

$$\gamma^{\bar{F}}_{\bar{A}} = 0 \quad \text{si} \quad \bar{A} \neq \bar{F} \; ; \; \gamma^{\bar{F}}_{\bar{F}} = A \; ; \quad \gamma^{\bar{F}}_{\hat{G}} = A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{F}-1)\hat{G}(\bar{F}+1)\ldots k} \; .$$

On vérifie de même que :

$$\gamma^{\bar{F}}_A \, H^A_B \equiv 0, \quad \text{mod. } H' \; .$$

Les γ jouent ainsi un rôle analogue aux δ, mais relativement à la matrice transposée de la matrice caractéristique. On a donc construit une famille

$$(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^{\bar{F}}, \ldots, \gamma^k)$$

de k suites de m polynômes et chacun des polynômes est encore invariant dans un changement de coordonnées locales et dépend analytiquement de x.

Plus généralement, désignons, en un point x, par $\psi_1 = \Phi/H'$ le quotient de l'anneau Φ par l'idéal (H'), quotient qui est ici un corps. (H^A_B) définit "canoniquement" une matrice d'éléments de ψ_1, qui est équivalente àla matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{k lignes} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(H^A_B) définit ainsi un endomorphisme de $(\psi_1)^m$; son noyau est de dimension k et l'on désignera par $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \ldots, \tilde{\delta}_{\bar{D}}, \ldots, \tilde{\delta}_k$ une base de ce noyau. On choisira des représentants des vecteurs $\tilde{d}_{\bar{D}}$ dans Φ^m ; ils formeront la famille $d_1, d_2, \ldots, d_{\bar{D}}, \ldots, d_k$ et seront tels que :

$$H^A_B \, d^B_{\bar{D}} \equiv 0, \text{ mod } (H')$$

ou bien tels que :

(3)
$$H^A_B \, d^B_{\bar{D}} = H' \sigma^A_{\bar{D}} \; ;$$

l'élément $\sigma_{\bar{D}}$ appartient à Φ^m ; la famille $(d_{\bar{D}})$ autrement dit est définie à la transformation suivante près :

(4)
$$d^B_{\bar{D}} \to \lambda^{\bar{D}'}_{\bar{D}} \, d^B_{\bar{D}'} + \mu^B_{\bar{D}} \, H' \; ,$$

où la matrice $(\lambda^{\bar{D}'}_{\bar{D}})$ est inversible dans Φ et $\mu_{\bar{D}}$ appartient à Φ^m. On vérifie que la famille $(\tilde{\delta}_{\bar{D}})$ correspondant à la famille $(\delta_{\bar{D}})$ définie précédemment est une base du noyau de l'endomorphisme de $(\psi_1)^m$ définie par (H^A_B); la famille $(\delta_{\overline{D}})$ est donc une famille $(d_{\overline{D}})$ particulière. Elle a l'avantage de ne faire intervenir que des polynômes en ℓ et que des éléments indépendants du choix des coordonnées et dépendant analytiquement de x ; il sera parfois commode d'utiliser la famille $(\delta'_{\overline{D}})$ où :

$$\delta'_{\overline{D}} = \frac{\delta_{\overline{D}}}{A} ;$$

les composantes de chaque $\delta'_{\overline{D}}$ sont des fractions rationnelles indépendantes du choix des coordonnées ; on remarque que des éléments déduits des $(\delta_{\overline{D}})$ par une transformation (4) indépendante du choix des coordonnées locales sont eux-mêmes indépendants de ce choix ; c'est le cas pour les $(\delta'_{\overline{D}})$ ou pour les familles analogues à la famille $(\delta_{\overline{D}})$ construites à partir d'autres mineures que A (et toujours non divisibles par H').

De même on pourra considérer des familles $(g^{\overline{F}})$ telles que :

$$g^{\overline{F}}_A \, H^A_B \equiv 0, \text{ mod. } (H')$$

ou bien telles que :

$$g^{\overline{F}}_A \, H^A_B = H' \, \rho^{\overline{F}}_B \tag{5}$$

et introduire la famille $(\gamma'^{\overline{F}})$ où $\gamma'^{\overline{F}} = \dfrac{\gamma^{\overline{F}}}{A}$.

D'autre part on aura besoin d'étudier la matrice d'éléments :

$$H^A_B \, \delta^B_{\overline{D}} \, \gamma^{\overline{F}}_A = H' \mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}} \, \gamma^{\overline{F}}_{\overline{E}} = H'.A.\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}} ,$$

ou plus précisément la divisibilité par H' du déterminant de la matrice $k \times k$ d'élément général :

$$\frac{H^A_B \, \delta^B_{\overline{D}} \, \gamma^{\overline{F}}_A}{H'} = A.\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}} ,$$

on a :

$$\det (A.\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}) = A^k \det (\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}) .$$

Or il résulte d'une identité remarquable, (cf. par exemple, Bourbaki : Alg. multilinéaire, Hermann 1958, p. 115), que :

$$H.A^{k-1} = \det (A^{12\ldots(\overline{D}-1)(\overline{D}+1)\ldots k}_{12\ldots(\overline{E}-1)(\overline{E}+1)\ldots k})$$

d'où :

$$\det (\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}) = H''.A^{k-1} .$$

Le déterminant de la matrice

$$\left(\frac{H_B^A \, \delta_{\bar{\bar{D}}}^B \, \gamma_A^{\bar{\bar{F}}}}{H'}\right)$$

n'est donc pas divisible par H ! Cette propriété est indépendante du choix des coordonnées locales.

Avec des familles $(g^{\bar{\bar{F}}})$ et $(d_{\bar{\bar{D}}})$, on est conduit à étudier la matrice des

$$H_B^A \, d_{\bar{\bar{D}}}^B \, g_A^{\bar{\bar{F}}} = H' \, \sigma_{\bar{\bar{D}}}^A \, g_A^{\bar{\bar{F}}} = H' \, \rho_B^{\bar{\bar{F}}} \, d_{\bar{\bar{D}}}^B ,$$

ou plus précisément la valuation du déterminant de la matrice $k \times k$ d'élément général

$$\mathcal{H}_{\bar{\bar{D}}}^{\bar{\bar{E}}} = \sigma_{\bar{\bar{D}}}^A \, g_A^{\bar{\bar{F}}} = \rho_B^{\bar{\bar{F}}} \, d_{\bar{\bar{D}}}^B \; ; \; \det \mathcal{H}_{\bar{\bar{D}}}^{\bar{\bar{E}}} = \mathcal{H} .$$

Le fait que $v(\mathcal{H}) > 0$ ou $v(\mathcal{H}) = 0$ est indépendant du choix de la famille $(d_{\bar{\bar{D}}})$ à une transformation (4) près, de même pour les $(g^{\bar{\bar{F}}})$; cela résulte de la définition de $\mathcal{H}_{\bar{\bar{D}}}^{\bar{\bar{E}}}$. Les résultats obtenus avec la famille $(\delta_{\bar{\bar{D}}})$ et la famille $(\gamma^{\bar{\bar{F}}})$ montrent donc que $v(\mathcal{H}) = 0$. Cette propriété ne dépend donc ni du choix des coordonnées ni de celui des familles $(d_{\bar{\bar{D}}})$ et $(g^{\bar{\bar{F}}})$.

Dans le cas (II), H' a la multiplicité $\nu = 2$. Il existe au moins un cofacteur d'ordre $(m-1)$ non divisible par H' soit $A_1^1 = A$. Posons :

$$\delta^B = A_1^B \qquad \text{et} \qquad \gamma_A = A_A^1 \quad .$$

On vérifie que :

$$H_B^1 \, \delta^B = H = (H')^2 H''$$

$$H_B^2 \, \delta^B = 0 ,$$

soit :

$$H_B^A \, \delta^B = 0 \; , \text{ modulo } (H')^2 \; .$$

Les δ^B et les γ_A sont encore des polynômes en ℓ, sont indépendants du choix des coordonnées et dépendent chacun analytiquement de x.

Désignons, en un point x, par ψ_2 le quotient de l'anneau Φ par l'idéal $(H')^2$. (H_B^A) définit canoniquement, dans le cas (II), une matrice d'éléments de ψ^2 qui est équivalente à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

et (H_B^A) définit aussi un endomorphisme de $(\psi_2)^m$; son noyau est en module libre et on désignera par $\tilde{d}$ une base de ce noyau. Soit d un représentant de $\tilde{d}$ dans Φ^m, d est tel que :

$$H_B^A \, d^B \equiv 0, \bmod (H')^2 \, .$$

c'est-à-dire tel que :

(6) $$H_B^A \, d^B = (H')^2 \, \sigma^A \, ,$$

avec σ élément de Φ^m ; l'élément d de Φ_m est défini à la transformation suivante près

(7) $$d \to (\lambda + \lambda' H')d + \mu(H')^2,$$

où λ est inversible dans Φ, λ' et μ éléments quelconques de Φ et Φ^m.

On vérifie que δ est un d particulier ; il s ra parfois commode d'utiliser : $\delta' = \frac{\delta}{A}$ dont les composantes sont des fractions rationnelles indépendantes du choix des coordonnées ; on remarque que les éléments déduits de δ par une transformation (7) indépendante du choix des coordonnées sont eux-mêmes indépendants de ce choix ; c'est le cas pour δ' ou pour les éléments analogues à δ construits à partir d'autres mineurs que A (non divisibles par H'). On a des considérations analogues pour la matrice transposée de (H_B^A) ; ainsi on considère des g_A tels que :

(8) $$g_A \, H_B^A = (H')^2 \, \rho_B \equiv 0 \mod (H')^2$$

et il pourra être commode de poser $\gamma' = \frac{\gamma}{A}$.

Considérons le polynôme :

$$H_B^A \, \delta^B \, \gamma_A = (H')^2 H''.A \, ;$$

il est immédiat que

$$\mathcal{H} = \frac{H_B^A \, \delta^B \, \gamma_A}{(H')^2}$$

n'est pas divisible par H' et cette propriété ne dépend pas du choix des coordonnées.

Plus généralement, on a :

$$H_B^A \, d^B \, g_A = (H')^2 \, \sigma^A \, g_A = (H')^2 \, \rho_B \, d^B$$

et la valuation de

$$\mathcal{H} = \sigma^A \, g_A = \rho_B \, d^B$$

ne dépend pas du choix de d et g à une transformation du type (7) près ; on en déduit donc que : $v(\mathcal{K}) = 0$. Comme dans le cas (I), cette propriété est indépendante du choix des coordonnées et des vecteurs d et g.

Enfin dans le cas (II), nous serons conduits à introduire des invariants que nous allons décrire.

On utilisera les polynômes sous-caractéristiques de Gårding, Kotaké, Leray [9] ; si $\eta(x)$ définit une forme élément de volume sur la variété :

$$\eta(x)dx^{\circ} \wedge dx^{1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^{n} ,$$

le polynôme sous-caractéristique d'un opérateur différentiel est le polynôme caractéristique de la demi-différence de l'opérateur et de son adjoint ; il s'écrira ici pour l'opérateur, dans la $A^{\text{ième}}$ équation, relatif à l'inconnue y^B :

$$H^{*A}_{B} - \frac{1}{2\eta} \partial^{\lambda}_{\lambda}(\eta H^{A}_{B}) ,$$

en posant :

$$H^{*A}_{B} = H^{*\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{t-1} A}_{B} \, \ell_{\alpha_1} \ell_{\alpha_2} \ldots \ell_{\alpha_{t-1}} \qquad \text{et} \qquad \partial^{\lambda} = \frac{\partial}{\partial \ell_{\lambda}} .$$

Il est évidemment indépendant du choix des coordonnées. La matrice sous-caractéristique du système (1) est par définition la matrice des polynômes sous-caractéristiques. Il résulte de la définition du système adjoint que la matrice caractéristique du système adjoint est la transposée de la matrice caractéristique du système initial (1) et que la matrice sous-caractéristique du système adjoint est l'opposée de la transposée de la matrice caractéristique du système initial. Un système self-adjoint a donc une matrice caractéristique symétrique et une matrice sous-caractéristique antisymétrique.

On construit ensuite le polynôme :

$$[H^{*A}_{B} - \frac{1}{2\eta} \partial^{\lambda}_{\lambda}(\eta H^{A}_{B})]\gamma_A \ \delta^B .$$

Ce polynôme est aussi invariant dans un changement de coordonnées locales ; le polynôme correspondant pour le système adjoint est l'opposé du précédent ; si le système est self-adjoint, il est donc nul.

D'autre part, les polynômes de mêmes degrés γ_A et δ^B, pour A et B fixes quelconques, peuvent être considérés comme des polynômes caractéristiques d'opérateurs différentiels G_A et D^B de mêmes ordres ; le polynôme caractéristique de l'opérateur :

$$\tfrac{1}{2}(D^B G_A - G_A D^B)$$

s'écrit :

$$\tfrac{1}{2}(\partial^\lambda\ \delta^B\ \partial_\lambda\ \gamma_A - \partial_\lambda\ \delta^B\ \partial^\lambda\ \gamma_A)\ ;$$

il est évidemment invariant dans un changement de coordonnées locales, de même, le polynôme, (en sommant en A et B) :

$$\tfrac{1}{2}H^A_B(\partial^\lambda\ \delta^B\ \partial_\lambda \gamma_A - \partial_\lambda\ \delta^B\ \partial^\lambda\ \gamma_A)$$

est un invariant ; le polynôme correspondant pour l'adjoint est l'opposé du précédent ; si le système est self-adjoint, ce polynôme est nul.

Enfin le polynôme :

$$\mathcal{K} = [H^{*A}_B - \frac{1}{2\eta}\partial^\lambda_\lambda(\eta H^A_B)]\gamma_A\ \delta^B + \tfrac{1}{2}\ H^A_B(\partial^\lambda\delta_\lambda\gamma_A - \partial_\lambda\delta^B\partial^\lambda\gamma_A)$$

est aussi invariant ; le polynôme correspondant pour le système adjoint est l'opposé du précédent ; si le système est self-adjoint, $\mathcal{K}$ est nul.

Ayant choisi un ouvert de coordonnées locales, définissons dans un voisinage d'un point de cet ouvert, des vecteurs d^B et g_A qui soient fonctions analytiques de x dans ce voisinage ; comme précédemment, en particulier, δ^B et γ_A sont de tels vecteurs. Nous indiquerons quelques lemmes qui nous serviront constamment dans le cas (II).

Rappelons que d'après (6) :

$$H^A_B\ g_A\ d^B = (H')^2\ \sigma^A\ g_A = (H')^2\mathscr{H}\ .$$

On en déduit immédiatement le lemme I.

$$g_A\,\partial^\alpha\ H^A_B\ d^B \equiv 0,\quad \text{mod}\ \ H'$$

$$g_A\,\partial_\alpha\ H^A_B\ d^B \equiv 0,\quad \text{mod}\ \ H'.$$

Si ∂ et ∂' sont deux dérivations qui commutent, on a encore :

$$g_A\partial\partial'(H^A_B d^B) \equiv \partial\partial'[(H')^2]\sigma^A\ g_A\ ,\quad \text{mod}\ H',$$

ou encore à l'aide de (8) :

$$g_A\partial\partial' H^A_B d^B + g_A\partial H^A_B\partial' d^B + g_A\partial' H^A_B\partial d^B \equiv 2\partial H'\partial' H'\sigma^A g_A\quad \text{mod}\ H'$$

soit le lemme II :

$$g_A\partial\partial' H^A_B d^B + g_A\partial H^A_B\partial' d^B + g_A\partial' H^A_B\partial d^B \equiv 2\mathscr{H}\partial H'\partial' H'\quad \text{mod}\ H'\ .$$

Ces lemmes vont déjà nous permettre d'obtenir des résultats concernant $\mathcal{K}$.

Il résulte d'abord de (6), (8) et du lemme (I) que, localement:

$$\mathcal{K} \equiv [H^{*A}_B - \tfrac{1}{2}\,\partial^\lambda_\lambda(H^A_B)]\gamma_A\delta^B + \tfrac{1}{2}H^A_B(\partial^\lambda\delta^B\partial_\lambda\gamma_A - \partial^\lambda\gamma_A\partial_\lambda\delta^B) \mod H' .$$

Posons

$$K' = [H^{*A}_B - \tfrac{1}{2}\,\partial^\lambda_\lambda(H^A_B)]g_A d^B + \tfrac{1}{2}\,H^A_B(\partial^\lambda d^B\partial_\lambda g_A - \partial^\lambda g_A\partial_\lambda d^B) .$$

Il résulte de (7) et de la formule analogue pour les g, que, pour tout x :

$$K' \equiv \lambda\,\mathcal{K} \quad , \mod H',$$

avec λ élément de Φ non divisible par H'.

K' n'est pas invariant, mais on a pour tout x :

$$v(K') > 0 \Leftrightarrow v(\mathcal{K}) > 0.$$

De plus l'expression de K' se simplifie à l'aide des lemmes I et II et :

$$K' \equiv H^{*A}_B g_A d^B - H^A_B\partial^\alpha g_A\partial_\alpha d^B - \mathscr{H}\,\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' \quad , \quad \text{modulo } H' .$$

Par suite, si on pose :

$$K = H^{*A}_B g_A d^B - H^A_B\partial^\alpha g_A\partial_\alpha d^B - \mathscr{H}\,\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' ,$$

on a pour tout x :

$$v(K) > 0 \Leftrightarrow v(\mathcal{K}) > 0$$

K n'est pas invariant en général, mais la condition $v(K) > 0$ en un point x est indépendante du choix de d, g, ρ et des coordonnées locales.

De même, en un point x et pour une forme $\ell \neq 0$ tels que : $H'(x,\ell) = 0$, la condition $K(x,\ell) \neq 0$ équivaut à la condition $\mathcal{K}(x,\ell) \neq 0$, pourvu que l'on ait choisi le λ provenant des transformations (7) tel que $\lambda(x,\ell) \neq 0$.

2. Hypersurface caractéristique.

On considère une hypersurface analytique P d'équation locale :

$$\pi(x) = 0 \;;$$

on posera :

$$\partial_\alpha\pi = p_\alpha \;, \quad (p_\alpha \text{ forme non nulle}).$$

On dira que cette hypersurface est caractéristique dans Ω si en tout point de $\Omega \cap P$

$$H(x,p) = 0 .$$

Une hypersurface P telle que :

$$H'(x,p) = 0$$

en tout point de $\Omega \cap P$ est donc caractéristique ; nous n'étudierons désormais que de telles hypersurfaces caractéristiques, (multiples en général).

Nous supposerons de plus l'hypersurface P non singulière dans le sens suivant : elle satisfait aux hypothèses :

H 1) Rappelons d'abord que, pour x quelconque de Ω, $H^A_B(x,\ell)$ étant équivalente à la matrice (2) du 1er paragraphe, on sait, [25], qu'il existe au moins un mineur d'ordre $(m-k)$, qui n'est pas divisible par H' ; k désigne le nombre d'exposants q non nuls ; ainsi dans le cas (I), k est l'entier déjà noté ainsi, dans le cas (II), $k = 1$. Désignons encore par $A(x,\ell)$ un tel mineur, l'hypothèse H 1) exprime que $A(x,p)$ n'est jamais nul sur $\Omega \cap P$. Il en résulte que les familles $(\delta(x,p)$, resp. $\gamma(x,p))$ en chaque point de $\Omega \cap P$ formeront une base du noyau de $(H^A_B(x,p))$, (resp. de sa transposée). Si on considère des familles de vecteurs locaux (d) et (g), on les choisira de façon à ce qu'elles possèdent la même propriété. (Cette restriction au choix des (d) et (g) revient à restreindre les transformations (4), (7) admissibles qui font passer des (δ), (γ) aux (d), (g) de façon à éviter d'introduire des singularités qui seraient dûes aux coefficients de ces transformations).

Dans le cas (II), H 2). P est telle que :

- ou bien $\mathcal{K}(x,p)$ n'est jamais nul sur $\Omega \cap P$; ce cas sera désigné par cas (IIa) Pour un choix convenable de (d) et (g) dans les conditions de la fin du 1er paragraphe, on peut encore dire que $K(x,p) \neq 0$ en tout point de $P \cap \Omega$,
- ou bien le polynôme $\mathcal{K}$ est divisible par H' en tout point de $\Omega \cap P$; on a vu que cela équivaut à $v(K) > 0$ sur $P \cap \Omega$; ce cas sera désigné par cas (IIb). Si le système est self-adjoint, $\mathcal{K} = 0$, H2) est réalisée pour toute P et l'on est toujours dans le cas (IIb).

Dans les cas (I) et (IIb), H 3). On suppose que $H''(x,p)$ ne s'annule pas sur $P \cap \Omega$. Pour des raisons analogues à celles de H 1), si on emploie (d) et (g), on supposera que $\mathcal{H}(x,p)$ n'est jamais nul.

Dans les cas (I) et (IIb), H 4). En chaque point de $\Omega \cap P$, posons, en coordonnées locales :

$$\partial^\alpha H'(x,p) = p^\alpha \ ;$$

le vecteur de composantes p^α est appelé vecteur bicaractéristique en x ; on sait que ce vecteur est un invariant, (pour p donnée) et d'après l'identité d'Euler, que p est tangent à l'hypersurface P en chaque point : $p^\alpha p_\alpha = 0$.

On supposera que le vecteur p ne s'annule en aucun point de $P \cap \Omega$

On appellera données de Cauchy d'ordre u sur une hypersurface pour une fonction y, les restrictions à l'hypersurface de la fonction et de ses dérivées transversales d'ordre $< u$.

3. Enoncé du problème formel.

On se propose d'étudier une hypersurface au voisinage d'un point. On choisira des coordonnées locales telles que le point ait des coordonnées nulles : $x^\alpha = 0$ et que l'hypersurface ait pour équation :

$$\pi(x) \equiv x^0 = 0 ,$$

on aura donc :

$$p_0 = 1 , p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0 .$$

On conviendra qu'un indice latin varie de 1 à n : $1 \leqq i \leqq n$. On aura aussi :

$$p^0 = 0 ,$$

si l'hypersurface est caractéristique.

On prendra pour Ω un polycylindre ouvert de centre 0, tel que les coefficients des opérateurs différentiels, les seconds membres et les données de Cauchy puissent être représentés dans Ω par des séries entières convergentes en $x^0, x^1, \ldots, x^n$. Jusqu'au § 6 inclus, on cherchera les inconnues y^B sous forme de séries formelles. On est donc d'abord ramené à un problème où les données et les inconnues sont des séries formelles.

On désignera par $\mathfrak{R}_0$ l'anneau des séries formelles en $x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots x^n$ et par $\mathfrak{R}_0[\ell_\alpha]$ l'anneau des polynômes en $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_\alpha, \ldots, \ell_n$ sur $\mathfrak{R}_0$. On aura à considérer des fonctions du type $L(x,\ell)$; posons :

$$L(x,\ell) = L_0 + x^0 L_1 + \ldots + \frac{(x^0)^q}{q!} L_q + \ldots ,$$

où L_q appartient à $\mathfrak{R}_0[\ell_\alpha]$. Sur l'hypersurface P, on aura constamment des expressions du type $L_0(x,p)$, qui sont des éléments de $\mathfrak{R}_0$; on posera :

$$L_0(x,p) = L(P) , \quad (L(P) \in \mathfrak{R}_0) .$$

On aura ainsi, si l'hypersurface est caractéristique

$$H'(P) = 0 .$$

y^B sera représentée par :

$$y^B = Y_0^B + \ldots + \frac{(x^0)^s}{s!} Y_s^B + \ldots , \tag{9}$$

où les Y_s^B appartiennent à $\mathcal{R}_o$; les données de Cauchy d'ordre u sur P, pour y^B, sont les séries : $Y_0^B, Y_1^B, \ldots, Y_{u-1}^B$.

En remplaçant les y^B dans (1) à l'aide de (9) et en écrivant que les séries formelles en x^o des deux membres sont identiques, on obtient des équations en Y_s^B que nous allons écrire. Pour $s \geqq t$, on a :

$$\begin{aligned} & H_B^A(P)Y_s^B + (\partial^i H_B^A)(P)\partial_i Y_{s-1}^B + \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H_B^A)(P)\partial_{ij}Y_{s-2}^B + (s-t)(\partial_o H_B^A)(P)Y_{s-1}^B \\ (10)\quad & + (s-t)(\partial_o^i H_B^A)(P)\partial_i Y_{s-2}^B + \tfrac{1}{2}(s-t)(s-t-1)(\partial_{oo}H_B^A)(P)Y_{s-2}^B + H{*}_B^A(P)Y_{s-1}^B \\ & + (\partial^i H{*}_B^A)(P)\partial_i Y_{s-2}^B + (s-t)(\partial_o H{*}_B^A)(P)Y_{s-2}^B + \ldots = 0, \end{aligned}$$

les pointillés représentent une combinaison linéaire des dérivées des $Y_{s'}^B$, tels que $s' < s-2$ et de coefficients connus des seconds membres de (1).

Lorsque P n'est pas caractéristique, on calcule, par récurrence, les Y_s^B, de façon unique à partir des données de Cauchy d'ordre t sur P et des seconds membres et on a le théorème formel de Cauchy-Kovaleska. Il est bien connu, d'ailleurs, que, dans des conditions analytiques, on sait en déduire un théorème analytique.

Nous supposerons désormais P caractéristique :

$$H'(P) = 0 .$$

Nous la supposerons de plus "non singulière"; remarquons qu'en fait, il suffira que les inégalités qui expriment H 1), H 2) Cas (II a), H 3), H 4) soient réalisées à l'origine pour qu'elles le soient dans un polycylindre convenable de centre 0, puisque les fonctions considérées sont analytiques ; en choisissant Ω convenable, H 1), H 2) Cas II a), H 3) et H 4) se simplifient dans ce sens ; on peut aussi dire que les séries formelles ayant leurs termes constants (réels) non nuls, on pourra les inverser.

Nous nous proposons dans les paragraphes 4, 5, 6 de résoudre le système (10) dans les différents cas.

4. Résolution formelle dans le cas (I).

Rappelons que les résultats concernant ce cas, sauf la caractérisation algébrique, ont été donnés par Hadamard [6] et de nombreux auteurs ; nous abrègerons donc un peu.

On a, d'abord, à partir de (10) pour $s = t$:

$$(11)\qquad H_B^A(P)Y_t^B + (\partial^i H_B^A)(P)\partial_i Y_{t-1}^B + H{*}_B^A(P)Y_{t-1}^B + \ldots = 0 ;$$

les pointillés ne font intervenir que des $Y_{s'}$ tels que $s' \leqq t-2$.

D'où en multipliant et sommant par des $g_A^{\bar{\bar{F}}}(P)$:

$$g_A^{\bar{\bar{F}}}(P)(\partial^i H_B^A)(P)\partial_i Y_{t-1}^B + g_A^{\bar{\bar{F}}}(P)H^{*A}_B(P)Y_{t-1}^B + \dots = 0 .$$

On obtient k conditions sur les données de Cauchy d'ordre t. Nous allons voir qu'on peut les intégrer par rapport à certaines d'entre elles ; de façon plus précise, posons :

$$Y_{t-1}^B = U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}} \, d_{\bar{\bar{D}}}^B(P) + V_{t-1}^B .$$

On a décomposé Y_{t-1} en somme d'un élément du plan de $(\Omega_o)^m$ déterminé par les $d_{\bar{\bar{D}}}(P)$ et d'un élément V_{t-1} d'un plan supplémentaire. En remplaçant, on obtient:

$$(g_A^{\bar{\bar{F}}}\partial^i H_B^A d_{\bar{\bar{D}}}^B)(P)\partial_i U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}} + (g_A^{\bar{\bar{F}}}\partial^i H_B^A \partial_i d_{\bar{\bar{D}}}^B)(P)U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}} + g_A^{\bar{\bar{F}}}H^{*A}_B d_{\bar{\bar{D}}}^B)(P)U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}}$$

$$+ (g_A^{\bar{\bar{F}}}\partial^i H_B^A)(P)\partial_i V_{t-1}^B + (g_A^{\bar{\bar{F}}}H^{*A}_B)(P)V_{t-1}^B + \dots = 0 .$$

Soit, à l'aide de (3) et (5) et en posant :

$$K_{\bar{\bar{D}}}^{\bar{\bar{F}}}(P) = (H^{*A}_B g_A^{\bar{\bar{F}}} d_{\bar{\bar{D}}}^B)(P) - (H_B^A \partial^i g_A^{\bar{\bar{F}}} \partial_i d_{\bar{\bar{D}}}^B)(P),$$

$$(g_A^{\bar{\bar{F}}}\sigma_{\bar{\bar{D}}}^A)(P)p^i\partial_i U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}} + [(\rho_B^{\bar{\bar{F}}} p^i \partial_i d_{\bar{\bar{D}}}^B)(P) + K_{\bar{\bar{D}}}^{\bar{\bar{F}}}(P)]U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}} + (g_A^{\bar{\bar{F}}}\partial^i H_B^A)(P)\partial_i V_{t-1}^B$$

$$+ (g_A^{\bar{\bar{F}}}H^{*A}_B)(P)V_{t-1}^B + \dots = 0 ,$$

ou :

$$\mathcal{H}\,{}_{\bar{\bar{D}}}^{\bar{\bar{F}}}(P)p^i\partial_i U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}} + \text{combinaison linéaire des } U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}}$$

$$+ \text{termes en } \partial_i V_{t-1}^B \, , \, V_{t-1}^B + \dots = 0,$$

et comme on a vu que $\mathcal{H}\,{}_{\bar{\bar{D}}}^{\bar{\bar{F}}}(P)$ était inversible

$$p^i\partial_i U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}} + \text{c.l. des } U_{t-1}^{\bar{\bar{D}}} + \text{termes en } V + \dots = 0.$$

De façon classique, on intègre le système caractéristique, qui s'écrit, en supposant, par exemple, le terme constant de p^1 non nul :

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{p^2}{p^1}, \dots, \frac{dx^n}{dx^1} = \frac{p^n}{p^1} .$$

On obtient :

$$x^i = \psi^i(x^1, a^2, \dots, a^j, \dots, a^n), \qquad (\text{pour : } 2 \leqq i \leqq n),$$

où ψ^i est une série formelle sous terme constant ; les a_j, $(2 \leq j \leq n)$, sont tels que

$$a^j = \psi^j(0,a^2,\ldots,a^n).$$

On a donc "le long des bicaractéristiques":

$$\frac{dU^{\bar{D}}_{t-1}}{dx^1} + \text{combinaison linéaire des } U^{\bar{D}}_{t-1} + \text{termes en } V^B_{t-1} + \ldots = 0 .$$

Les $U^{\bar{D}}_{t-1}$ satisfont donc à des équations différentielles du 1er ordre le long des bicaractéristiques définies par le champ "formel" p^α dans $P \cap \Omega$. Soit Q un hyperplan, $(x^1 = 0)$, transverse à ces bicaractéristiques. Supposons

$$Y^B_{t-2} \; , \; Y^B_{t-3} \; , \ldots , \; Y^B_o$$

données sur $P \cap \Omega$, ainsi que V^B_{t-1} ; on appellera ces données, données sur P, pour simplifier ; on peut déterminer les $U^{\bar{D}}_{t-1}$ et par suite tous les Y^B_{t-1} pourvu que l'on connaisse les "valeurs initiales" des $U^{\bar{D}}_{t-1}$ sur $P \cap Q$, c'est-à-dire encore les "restrictions formelles" des $U^{\bar{D}}_{t-1}$ à $P \cap Q$.

Cas particulier. - Prenons comme famille $d_{\bar{D}}$, la famille $\delta^{!}_{\bar{D}} = \frac{\delta_{\bar{D}}}{A}$ du 1er paragraphe et projetons Y_{t-1} sur le sous-module engendré par les $\delta^{!}_{\bar{D}}(P)$ d'une part et sur le sous-module engendré par les $(m-k)$ derniers vecteurs de la base canonique de $(\mathcal{R}_o)^m$ d'autre part, qui sont supplémentaires. On obtient :

$$Y^{\bar{D}}_{t-1} = U^{\bar{D}}_{t-1} \quad , \quad Y^{\hat{c}}_{t-1} = \delta^{!\hat{c}}_{\bar{D}}(P) U^{\bar{D}}_{t-1} + V^{\hat{c}}_{t-1} \; .$$

Supposons

$$Y^B_{t-2} \; , \; Y^B_{t-3} \; , \ldots , Y^B_o \quad \text{et} \quad V^{\hat{c}}_{t-1} = Y^{\hat{c}}_{t-1} - \delta^{!\hat{c}}_{\bar{D}}(P) Y^{\bar{D}}_{t-1} \quad \text{données sur } P,$$

on peut déterminer les $Y^{\bar{D}}_{t-1}$ sur P pourvu que l'on connaisse leurs valeurs initiales sur $P \cap Q$.-

Les conditions précédentes étant remplies, on déduit de (11) :

$$Y^B_t = U^{\bar{D}}_t \, d^B_{\bar{D}}(P) + V^B_t \; ,$$

où V^B_t est une solution particulière de (11) déterminée en fonction des données sur P et de la donnée des $U^{\bar{D}}_{t-1}$ sur $P \cap Q$. Les $U^{\bar{D}}_t$ restent à déterminer.

Le système (10) s'écrit pour $s = t+1$:

$$H^A_B(P) Y^B_{t+1} + (\partial^i H^A_B)(P) \partial_i Y^B_t + (\partial_o H^A_B)(P) Y^B_t + H^{*A}_B(P) Y^B_t + \ldots = 0 \; .$$

Ecrivons qu'il est compatible en Y^B_{t+1} en multipliant par les $g^{\bar{F}}_A(P)$ et sommant, on a :

$$(g^{\bar{F}}_A \partial^i H^A_B d^B_{\bar{D}})(P)\partial_i U^{\bar{D}}_t + \text{combinaison linéaire des } U^{\bar{D}}_t + \ldots = 0 ,$$

les pointillés représentent des termes connus.

Comme précédemment, on écrit cette équation sous la forme:

$$\frac{dU^{\bar{D}}_t}{dx^1} + \text{c.l. des } U^{\bar{D}}_t + \ldots = 0 .$$

Supposons $U^{\bar{D}}_t$ connu sur $P \cap Q$; en intégrant on l'obtient sur P.

Suite du cas particulier.- On suppose les restrictions formelles des $Y^{\bar{D}}_{t-1}$ données sur $P \cap Q$.-

Par récurrence, on obtient de même :

$$Y^B_s = U^{\bar{D}}_s d^B_{\bar{D}}(P) + V^B_s ,$$

où V^B_s est fonction des données sur P et des données sur $P \cap Q$ des

$$U^{\bar{D}}_{t-1} , U^{\bar{D}}_t ,\ldots, U^{\bar{D}}_{s-1} ;$$

à l'aide de (10), où l'on a remplacé s par $s+1$ et multiplié par les $g^{\bar{F}}(P)$, on a :

$$\frac{dU^{\bar{D}}_s}{dx^1} + \text{c.l. des } U^{\bar{D}}_s + \ldots = 0.$$

Finalement on détermine tous les Y^B_s pourvu que l'on connaisse :

- les données sur P de : $Y^B_{t-2} , Y^B_{t-3} ,\ldots, Y^B_o$ et V^B_{t-1} ;
- les données sur $P \cap Q$ de : $U^{\bar{D}}_{t-1}(P \cap Q), U^{\bar{D}}_t(P \cap Q),\ldots,U^{\bar{D}}_s(P \cap Q),\ldots$

Se donner les $U^{\bar{D}}_s$ sur $P \cap Q$ équivaut à se donner les k séries

$$U^{\bar{D}} = \sum_{s=t-1}^{s=\infty} U^{\bar{D}}_s(P \cap Q) \frac{(x^o)^s}{s!} ,$$

où $U^{\bar{D}}$ est une série formelle en $x^o, x^2,\ldots,x^n$, série "sur Q".

Nous conclurons dans le cas où l'on a choisi pour $(d_{\bar{D}})$ et $(\delta^{\bar{F}})$ les familles

$$(\delta'_{\bar{D}}) = (\frac{\delta_{\bar{D}}}{A}) \quad \text{et} \quad (\gamma'^{\bar{F}}) = (\frac{\gamma^{\bar{F}}}{A}) .$$

On détermine tous les Y^B_s pourvu que l'on connaisse :

- les données sur P, de : Y^B_{t-2} , Y^B_{t-3} ,..., Y^B_o et $V^{\hat{c}}_{t-1} = Y^{\hat{c}}_{t-1} - \delta^{\prime\hat{c}}_{\bar{D}}(P)Y^{\bar{D}}_{t-1}$

- les données sur Q des k séries représentant les restrictions formelles des $y^{\bar{D}}$ à Q, ces données étant supposées compatibles avec les données sur P.

On obtient alors le <u>théorème d'existence et d'unicité formel</u> de Darboux-Goursat-Beudon-Hadamard :

<u>Il existe une solution formelle et une seule, correspondant aux données suivantes</u> :

1) <u>les restrictions formelles à</u> P <u>hypersurface caractéristique non singulière des</u> y^B <u>et de leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à</u> (t-2), <u>ainsi que</u> (m-k) <u>conditions linéaires sur les restrictions formelles des dérivées d'ordre</u> (t-1), <u>(c'est-à-dire la donnée des</u> $V^{\hat{c}}_{t-1}$, $(k < \hat{c} \leqq m)$);

2) <u>les restrictions formelles à</u> Q, <u>hypersurface transverse aux bicaractéristiques des</u> $y^{\bar{D}}$, $(1 \leqq \bar{D} \leqq k)$, <u>ces données étant compatibles avec les précédentes sur</u> $P \cap Q$.

En résumé, on a mt données : soit, $[m(t-1) + m - k]$ sur P et k sur Q.

5. <u>Résolution formelle dans le cas</u> (II a).

- On déduit du lemme I les formules (valables dans les cas (II a), (II b)) :

$$(12)\qquad \begin{aligned} &(g_A \partial^i H^A_B d^B)(P) = 0 \\ &(g_A \partial_o H^A_B d^B)(P) = 0 . \end{aligned}$$

- Un lemme III nous sera utile dans les cas (II a) et (II b) ; démontrons-le .

On a :

$$g_A H^A_B = (H')^2 \rho_B \,;$$

d'où :

$$\partial^\alpha g_A H^A_B + g_A \partial^\alpha H^A_B \equiv 2H'\partial^\alpha H' \rho_B \text{ , modulo } (H')^2$$

et :

$$\ell_\alpha \partial^\alpha g_A H^A_B + g_A \ell_\alpha \partial^\alpha H^A_B \equiv 0, \text{ modulo } (H')^2 \text{ ,}$$

car $\ell_\alpha \partial^\alpha H'$ est un polynôme proportionnel à H' d'après l'identité d'Euler, comme H^A_B est aussi un polynôme homogène, on a encore

$$\ell_\alpha \partial^\alpha g_A H^A_B = 0, \text{ modulo } (H')^2$$

d'où le <u>lemme</u> III :

$$(13) \qquad \ell_\alpha \partial^\alpha g_A \equiv \tau g_A \text{ , modulo } (H')^2 ,$$

soit, pour P :

$$(14) \qquad (\partial^o g_A)(P) = (\tau g_A)(P) .$$

On a encore :

$$(11) \quad H^A_B(P) Y^B_t + (\partial^i H^A_B)(P) \partial_i Y^B_{t-1} + (H*^A_B)(P) Y^B_{t-1} + \ldots = 0 ,$$

d'où, en multipliant par $g_A(P)$ et sommant en A, une condition sur les données de Cauchy d'ordre t sur P :

$$(g_A \partial^i H^A_B)(P) \partial_i Y^B_{t-1} + (g_A H*^A_B)(P) Y^B_{t-1} + \ldots = 0 .$$

Supposons cette condition réalisée, on a :

$$(15) \qquad Y^B_t = U_t d^B(P) + V_t ,$$

où V_t est une solution particulière de (11), déterminée à l'aide des données de Cauchy d'ordre t sur P.

Pour $s = t+1$, le système (10) s'écrit encore :

$$(H^A_B)(P) Y^B_{t+1} + (\partial^i H^A_B)(P) \partial_i Y^B_t + (\partial_o H^A_B)(P) Y^B_t + (H*^A_B)(P) Y^B_t + \ldots = 0.$$

Ecrivons qu'il est compatible en Y^B_{t+1} en multipliant par $g_A(P)$ et sommant, et remplaçons Y^B_t à l'aide de (15), on obtient :

$$(g_A \partial^i H^A_B d^B)(P) \partial_i U_t + (g_A \partial^i H^A_B \partial_i d^B)(P) U_t + (g_A \partial_o H^A_B d^B)(P) U_t$$
$$+ (g_A H*^A_B d^B)(P) U_t + \ldots = 0$$

(les pointillés représentent des termes fonctions des données de Cauchy d'ordre t et des seconds membres).

Compte tenu des formules (12), il ne reste que :

$$(g_A \partial^i H^A_B \partial_i d^B + g_A H*^A_B d^B)(P) U_t + \ldots = 0 ,$$

soit encore, à l'aide de (8) :

$$(-H^A_B \partial^i g_A \partial_i d^B + g_A H*^A_B d^B)(P) U_t + \ldots = 0 ,$$

et en utilisant (14) :

$$(-H^A_B \partial^\alpha g_A \partial_\alpha d^B + g_A H*^A_B d^B)(P) U_t + \ldots = 0 ;$$

c'est-à-dire :

$$K(P)U_t + \dots = 0$$

ou

$$\mathcal{K}(P)U_t + \dots = 0$$

Dans le cas (II a), on en déduit, en divisant par $K(P)$ que U_t et par suite les Y_t^B sont déterminés en fonction des données de Cauchy d'ordre t.

Raisonnant par récurrence, admettons que les systèmes (10)"d'indice inférieur ou égal à s " déterminent les U d'indice inférieur à s et considérons le système (10) d'indice $(s+1)$, soit :

$$H_B^A(P)Y_{s+1}^B + (\partial^i H_B^A)(P)\partial_i Y_s^B + (s+1-t)(\partial_o H_B^A)(P)Y_s^B + (H^*{}_B^A)(P)Y_s^B + \dots = 0 .$$

Remplaçons Y_s^B par :

$$Y_s^B = U_s d^B + V_s^B \quad ,$$

où les V_s sont déterminés en fonction des données de Cauchy d'ordre t sur P, puis multiplions par $g_A(P)$ et sommons en A ; après des calculs analogues aux précédents, il reste :

$$K(P)U_s + \dots = 0,$$

qui détermine U_s en fonction des données de Cauchy d'ordre t sur P. On a ainsi un <u>théorème d'existence et d'unicité formel</u>.

<u>Il existe une solution formelle et une seule du système correspondant aux données de Cauchy d'ordre</u> t <u>sur</u> P, <u>hypersurface caractéristique non singulière, pourvu que celles-ci satisfassent à une équation aux dérivées partielles sur</u> P <u>exprimant leur compatibilité</u>.

Dans ce cas analogue à celui de [15], (Annales I. Fourier, p. 306), on est conduit à dire que, pour l'hypersurface P, le système est parabolique dans le sens suivant : on a une hypersurface caractéristique réelle, pour laquelle le problème de Cauchy formel admet une solution et une seule sous réserve de compatibilité des données.

6. <u>Résolution formelle dans le cas</u> (II b).

On déduit du lemme II les formules suivantes.

Pour $\partial = \partial^i$, $\partial' = \partial^j$ et sur P, on obtient :

$$(16) \qquad [g_A(\tfrac{1}{2}\partial^{ij}H_B^A d^B + \partial^j H_B^A \partial^i d^B)](P)\partial_{ij} = \mathcal{K}(P)p^i p^j \partial_{ij} .$$

Pour $\partial = \partial^i$ et $\partial' = \partial_o$, on a sur P :

(17) $$[g_A(\partial_o^i H_B^A d^B + \partial^i H_B^A \partial_o d^B + \partial_o H_B^A \partial^i d^B)](P) = 2(\mathcal{H}\partial_o H')(P)p^i$$

On a vu, (lemme III) :

(13) $$\ell_\alpha \partial^\alpha g_A = \tau g_A \text{ , modulo } (H')^2 \text{ .}$$

Dérivons par rapport à ℓ_i , on a sur P :

(18) $$(\partial^i g_A)(P) + (\partial^{oi} g_A)(P) = [\partial^i(\tau g_A)](P) \text{ .}$$

Rappelons que :

$$K = H^{*A}_B g_A d^B - H^A_B \partial_\alpha d^B \partial^\alpha g_A - \mathcal{H}\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' \text{ .}$$

Nous allons calculer explicitement $(\partial^i K)(P)$ de façon à préparer les calculs suivants, où cette expression développée apparaîtra ; cependant il nous suffira d'effectuer ce calcul modulo les termes proportionnels à p^i .

Posons :

(19) $$K_1 = H^{*A}_B g_A d^B \text{ ,}$$

on a :

(19') $$(\partial^i K_1)(P) = (\partial H^{*A}_B g_A d^B)(P) + (H^{*A}_B \partial^i g_A d^B)(P) + (H^{*A}_B g_A \partial^i d^B)(P)$$

Posons :

$$K_2 = H^A_B \partial_\alpha d^B \partial^\alpha g_A \text{ ,}$$

on a d'abord :

$$\partial^i K_2 = \partial^i(H^A_B \partial^o g_A \partial_o d^B) + \partial^i(H^A_B \partial^j g_A \partial_j d^B) \text{ .}$$

Calculons le premier terme sur P :

(20) $$\Lambda = [\partial^i(H^A_B \partial^o g_A \partial_o d^B)](P)$$

$$= H^A_B(P)(\partial^{io} g_A \partial_o d^B + \partial^o g_A \partial_o^i d^B)(P) + (\partial^i H^A_B)(P)(\partial^o g_A \partial_o d^B)(P),$$

Remplaçons $(\partial^o g_A)(P)$ et $(\partial^{oi} g_A)(P)$ à l'aide de (14) et (18)

$$\Lambda = -(H^A_B \partial^i g_A \partial_o d^B)(P) + H^A_B(P)[\partial^i(\tau g_A)\partial_o d^B + \tau g_A \partial_o^i d^B](P) + (\partial^i H^A_B)(P)(\tau g_A \partial_o d^B(P$$

$$= -(H^A_B \partial^i g_A \partial_o d^B)(P) + [\partial^i(H^A_B \tau g_A \partial_o d^B)](P) \text{ .}$$

D'où compte tenu de (8)

$$(20') \qquad \Lambda = -(H^A_B \partial^i g_A \partial_o d^B)(P) = (g_A \partial^i H^A_B \partial_o d^B)(P) .$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$(21) \qquad M = [\partial^i (H^A_B \partial^j g_A \partial_j d^B)](P)$$

$$= [\partial^i \{[\partial^j (H^A_B g_A) - \partial^j H^A_B g_A] \partial_j d^B\}](P)$$

$$= \{\partial^i [\partial^j (H^A_B g_A) \partial_j d^B]\}(P) - [\partial^i (\partial^j H^A_B g_A \partial_j d^B)](P) .$$

Compte tenu de (8), on a :

$$\{\partial^i [\partial^j (H^A_B g_A) \partial_j d^B]\}(P) = 2(\rho_B \partial_j d^B)(P)\ p^j \times p^i \equiv 0, \text{ modulo } p^i ,$$

(en termes imagés, en chaque point de P on a un vecteur proportionnel au vecteur bicaractéristique (p^i)).

En développant :

$$(21') \qquad M_1 = (\partial^i (\partial^j H^A_B g_A \partial_j d^B)](P)$$

$$= (g_A \partial^j H^A_B \partial^i_j d^B)(P) + (\partial^i g_A \partial^j H^A_B \partial_j d^o)(P) + (g_A \partial^{ij} H^A_B \partial_j d^B)(P) .$$

On a donc :

$$(21'') \qquad M = -M_1 , \quad \text{modulo } p^i .$$

Enfin, posons :

$$(22) \qquad \underset{3}{K} = \mathcal{H} \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' ;$$

on a :

$$\partial^i \underset{3}{K} = \partial^i \mathcal{H} \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' + \mathcal{H} \partial^{i\alpha} H' \partial_\alpha H' + \mathcal{H} \partial^\alpha H' \partial^i_\alpha H' .$$

On a vu que :

$$(\partial^o H')(P) = p^o = 0 ;$$

$$H'(P) = 0, \quad \text{donc} \quad (\partial_i H')(P) = 0 ;$$

de plus, d'après l'identité d'Euler :

$$\ell_\alpha \partial^\alpha H' = \sigma H'$$

d'où en dérivant en ℓ_i :

$$\partial^i H' + \ell_\alpha \partial^{i\alpha} H' = \sigma\, \partial^i H' ,$$

INSTITUT FOURIER

soit pour P :

$$(\partial^{i\circ}H')(P) = (\sigma-1)p^i \equiv 0 \quad \text{modulo} \quad p^i \;;$$

il reste donc :

$$(\partial^i K_3)(P) \equiv \mathcal{H}(P)p^j\partial_j p^i \;, \quad \text{modulo} \quad p^i \;; \tag{22'}$$

les calculs précédents déterminent $(\partial^i K)(P)$ modulo p^i .

Revenons à la détermination des Y^B_t. La formule (10) s'écrit encore pour $s = t$:

$$H^A_B(P)Y^B_t + (\partial^i H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-2} + (H^{*A}_B)(P)Y^B_{t-1} + (\partial^i H^{*A}_B)(P)\partial_i Y^B_{t-2} + \dots = 0 \;. \tag{23}$$

En multipliant par $g_A(P)$ et sommant, on a une condition sur les données de Cauchy d'ordre t :

$$(g_A\partial^i H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + \tfrac{1}{2}(g_A\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-2} + (g_A H^{*A}_B)(P)Y^B_{t-1} + (g_A\partial^i H^{*A}_B)(P)\partial_i Y^B_{t-2} + \dots = 0 \;. \tag{24}$$

Supposons, pour l'instant, cette condition réalisée, (par la suite, nous l'intègrerons dans des conditions qui généralisent celles du cas (I)).

Le système (23) en Y^B_t est compatible et :

$$Y^B_t = U_t d^B(P) + W^B_t \;. \tag{25}$$

W^B_t est une solution particulière de (23), c'est-à-dire que :

$$H^A_B(P)W^B_t + (\partial^i H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-2} + (H^{*A}_B)(P)Y^B_{t-1} + (\partial^i H^{*A}_B)(P)\partial_i Y^B_{t-2} + \dots = 0 \;; \tag{26}$$

W^B_t s'exprime donc à l'aide des données de Cauchy d'ordre t sur P. Le scalaire U_t reste à déterminer.

La formule (10) s'écrit alors pour $s = t+1$:

$$H^A_B(P)Y^B_{t+1} + (\partial^i H^A_B)(P)\partial_i Y^B_t + \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-1} + (\partial_o H^A_B)(P)Y^B_t + (\partial^i_o H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (H^{*A}_B)(P)Y^B_t + (\partial^i H^{*A}_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (\partial_o H^{*A}_B)(P)Y^B_{t-1} + \dots = 0 \tag{27}$$

Soit encore en remplaçant Y^B_t à l'aide de (25) :

$$(27\text{ bis})\quad H^A_B(P)Y^B_{t+1} + (\partial^i H^A_B d^B)(P)\partial_i U_t + (\partial^i H^A_B \partial_i d^B)(P)U_t + (\partial_o H^A_B d^B)(P)U_t$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-1} + (\partial^i_o H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (\partial^i H^A_B)(P)\partial_i W^B_t$$
$$+ (\partial_o H^A_B)(P)W^B_t + (H{*}^A_B d^B)(P)U_t + (H{*}^A_B)(P)W^B_t + (\partial^i H{*}^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1}$$
$$+ (\partial_o H{*}^A_B)(P)Y^B_{t-1} + \dots = 0 ,$$

les pointillés représentent des termes en données de Cauchy d'ordre $(t-1)$.

En multipliant par $g_A(P)$ et en sommant en A, on obtient, comme dans le cas (II a), à l'aide de (12) et (14), la condition :

$$K(P)U_t + (g_A\partial^i H^A_B)(P)\partial_i W^B_t + \tfrac{1}{2}(g_A\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-1} + (g_A\partial_o H^A_B)(P)W^B_t$$
$$+ (g_A\partial^i_o H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (g_A H{*}^A_B)(P)W^B_t + (g_A\partial^i H{*}^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1}$$
$$+ (g_A\partial_o H{*}^A_B)(P)Y^B_{t-1} + \dots = 0 .$$

Dans le cas (II b), on a $K(P) = 0$, la condition précédente est donc une condition sur les données de Cauchy d'ordre t, soit :

$$(28)\quad (g_A\partial^i H^A_B)(P)\partial_i W^B_t + \tfrac{1}{2}(g_A\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-1} + (g_A\partial_o H^A_B)(P)W^B_t + (g_A\partial^i_o H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1}$$
$$+(g_A H{*}^A_B)(P)W^B_t + (g_A\partial^i H{*}^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (g_A\partial_o H{*}^A_B)(P)Y^B_{t-1} + \dots = 0$$

Nous étudierons (24) et (28) dans la suite ; supposons donc (28) réalisé. Le système (27) en Y^B_{t+1} est compatible et :

$$(29)\qquad Y^B_{t+1} = U_{t+1}d^B(P) + W^B_{t+1}$$

W^B_{t+1} est une solution particulière de (27 bis). On peut encore dire que W^B_{t+1} vérifie :

$$H^A_B(P)[W^B_{t+1} - (\partial^i d^B)(P)\partial_i U_t - (\partial_o d^B)(P)U_t] + (\partial^i H^A_B \partial_i d^B)(P)U_t$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-1} + (\partial^i_o H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (\partial^i H^A_B)(P)\partial_i W^B_t + (\partial_o H^A_B)(P)W^B_t$$
$$+ (H{*}^A_B d^B)(P)U_t + (H{*}^A_B)(P)W^B_t + (\partial^i H{*}^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (\partial_o H{*}^A_B)(P)Y^B_{t-1} + \dots = 0.$$

On est donc conduit à choisir W^B_{t+1} de la forme :

$$W^B_{t+1} = (\partial^i d^B)(P)\partial_i U_t + (\partial_o d^B)(P)U_t + \lambda^B(P)U_t + V^B_{t+1} \ ,$$

en choisissant le vecteur $(\lambda^B(P))$ de $(\mathfrak{q}_o)^m$ de sorte que

(30) $$H^A_B(P)\lambda^B(P) + (\partial^i H^A_B \partial_i d^B + H^{*A}_B d^B)(P) = 0 \ ,$$

ce qui est évidemment possible, et en choisissant V^B_{t+1} tel que :

$$H^A_B(P)V^B_{t+1} + \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_{t-1} + (\partial^i_o H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (\partial^i H^A_B)(P)\partial_i W^B_t$$
$$+ (\partial_o H^A_B)(P)W^B_t + (H^{*A}_B)(P)W^B_t + (\partial^i H^{*A}_B)(P)\partial_i Y^B_{t-1} + (\partial_o H^{*A}_B)(P)Y^B_{t-1} + \dots = 0 \ ,$$

ce qui est encore possible puisque (28) est supposée satisfaite ; les pointillés représentent des termes en données de Cauchy d'ordre $t-1$.

On peut aussi bien dire que :

(31) $$Y^B_{t+1} = U_{t+1}d^B(P) + (\partial^i d^B)(P)\partial_i U_t + (\partial_o d^B)(P)U_t + \lambda^B(P)U_t + V^B_{t+1} \ ;$$

les $\lambda^B(P)$ indépendants des Y vérifient (30) ; V^B_{t+1} s'exprime à l'aide des données de Cauchy d'ordre t sur P. U_t et U_{t+1} restent à déterminer.

La formule (10) s'écrit pour $s = t+2$:

$$H^A_B(P)Y^B_{t+2} + (\partial^i H^A_B)(P)\partial_i Y^B_{t+1} + \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H^A_B)(P)\partial_{ij}Y^B_t + 2(\partial_o H^A_B)(P)Y^B_{t+1}$$
$$+ 2(\partial^i_o H^A_B)(P)\partial_i Y^B_t + (\partial_{oo}H^A_B)(P)Y^B_t + (H^{*A}_B)(P)Y^B_{t+1} + (\partial^i H^{*A}_B)(P)\partial_i Y^B_t$$
$$+ 2(\partial_o H^{*A}_B)(P)Y^B_t + \dots = 0 \ .$$

On y remplace Y^B_{t+1} à l'aide de (31), Y^B_t à l'aide de (25) : on multiplie par $g_A(P)$ et on somme en A, il reste, après simplification :

(32) $$g_A(P)[(\partial^j H^A_B \partial^i_j d^B)(P)\partial_i U_t + (\partial^j H^A_B \partial^i d^B)(P)\partial_{ij}U_t + (\partial^i H^A_B \partial_o d^B)(P)\partial_i U_t$$
$$+ (\partial^i H^A_B)(P)\lambda^B(P)\partial_i U_t + \tfrac{1}{2}(\partial^{ij}H^A_B d^B)(P)\partial_{ij}U_t + (\partial^{ij}H^A_B \partial_j d^B)(P)\partial_i U_t$$
$$+ 2(\partial_o H^A_B \partial^i d^B)(P)\partial_i U_t + 2(\partial^i_o H^A_B d^B)(P)\partial_i U_t + (H^{*A}_B \partial^i d^B)(P)\partial_i U_t$$
$$+ (\partial^i H^{*A}_B d^B)(P)\partial_i U_t] + \theta(P)U_t + \dots = 0 \ ;$$

$\theta(P)$ est fonction des H^A_B et de leurs dérivées sur P et est connu ; les pointillés représentent encore des termes en données de Cauchy d'ordre t sur P.

Dans l'expression précédente, le coefficient de $\partial_{ij}U_t$ devient, compte tenu de (16) :

$$\mathcal{H}(P)p^i p^j .$$

Parmi les termes en $\partial_i U_t$, on peut rassembler, compte tenu de (17), ceux dont le coefficient est :

$$2g_A(P)(\partial^i H^A_B \partial_o d^B + \partial_o H^A_B \partial^i d^B + \partial^i_o H^A_B d^B)(P) = 4\mathcal{H}(P)(\partial_o H')(P)p^i$$
$$\equiv 0, \text{ modulo } p^i.$$

Il reste alors comme termes en $\partial_i U_t$:

$$N = g_A(P)[(\partial^j H^A_B \partial^i_j d^B)(P) + (\partial^i H^A_B)(P)\lambda^B(P) + (\partial^{ij} H^A_B \partial_j d^B)(P) - (\partial^i H^A_B \partial_o d^B)(P)$$
$$+ (\partial^i H^{*A}_B d^B)(P) + (H^{*A}_B \partial^i d^B)(P)]\partial_i U_t ;$$

or à l'aide de (30) :

$$g_A \partial^i H^A_B)(P)\lambda^B(P) = - H^A_B(P)(\partial^i g_A)(P)\lambda^B(P)$$
$$= (\partial^j H^A_B \partial_j d^B \partial^i g_A)(P) + (H^{*A}_B d^B \partial^i g_A)(P) .$$

Il résulte alors des formules (19), (19'), (20), (20'), (21), (21'), (21"), (22) (22') que :

$$N = M_1 + (\partial^i K_1)(P) - \Lambda$$
$$\equiv [\partial^i (K_1 - K_2)](P), \text{ modulo } p^i$$
$$\equiv (\partial^i K)(P) + (\partial^i K_3)(P), \text{ mod } p^i$$
$$\equiv (\partial^i K)(P) + \mathcal{H}(P)p^j \partial_j p^i, \text{ mod } p^i .$$

Et, comme dans le cas (II b), $K = H'K'$, sur P :

$$N \equiv \mathcal{H}(P)p^j \partial_j p^i, \text{ modulo } p^i .$$

(32) devient finalement, compte tenu du fait que $\mathcal{H}(P)$ est inversible :

$$p^i p^j \partial_{ij} U_t + p^j \partial_j p^i \partial_i U_t + \omega(P)p^i \partial_i U_t + \theta'(P)U_t + \dots = 0 ,$$

$\omega(P)$ est fonction des H^A_B et de leurs dérivées sur P et connu.

On peut encore écrire (32) sous la forme :

$$p^j \partial_j (p^i \partial_i U_t) + \omega(P)p^i \partial_i U_t + \theta'(P)U_t + \dots = 0 .$$

Comme au paragraphe 4, on transforme l'équation précédente, de façon à l'écrire "le long des bicaractéristiques" sous la forme :

(33) $$\partial_{(1)^2}U_t + \omega'(P)\partial_1 U_t + \theta''(P)U_t + \dots = 0 ,$$

(on a posé : $\partial_{(1)^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial(x^1)^2}$, $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$), ($\omega'(P)$ et $\theta''(P)$ sont fonction des H^A_B et de leurs dérivées pour P).

U_t satisfait donc à une équation différentielle, (ordinaire) du 2e ordre le long d'une bicaractéristique.

Nous n'avons pas calculé ici explicitement $\omega(P)$; on peut cependant remarquer que, par un choix convenable de g_A et d^B, (prendre les γ'_A et δ'^B), on peut supprimer les termes du type $(\rho_B p^j \partial_j d^B)(P)$; par un changement convenable de coordonnées (cf. [2], p. 557), on peut supprimer le terme $(\partial_\circ H')(P)$.

Soit Q un hyperplan, $(x^1 = 0)$, transverse aux bicaractéristiques. Supposons les données de Cauchy d'ordre t connues sur P et satisfaisant à (24) et (28), supposons de plus que l'on connaisse les "valeurs initiales" de U_t et de $\partial_1 U_t$ sur $P \cap Q$, soit $U_t(P \cap Q)$ et $(\partial_1 U_t)(P \cap Q)$; ce sont des séries formelles en $x^2, x^3, \dots, x^n$. U_t est alors déterminé par l'équation différentielle (33) ; par suite Y^B_t est déterminé par (25).

Par récurrence, on trouve, de même :

$$Y^B_s = U_s d^B(P) + (\partial^i d^B)(P)\partial_i U_{s-1} + (s-t)(\partial_\circ d^B)(P)U_{s-1} + \lambda^B(P)U_{s-1} + V^B_s ,$$

avec $\lambda^B(P)$ satisfaisant à (30) et V^B_s s'exprimant en fonction des $Y^B_{s'}$ tels que $s' < s-1$; U_s satisfait à une équation du type :

$$\partial_{(1)^2}U_s + \omega'_s(P)\partial_1 U_s + \theta''_s(P)U_s + \dots = 0,$$

les pointillés représentent des termes en $Y^B_{s'}$ avec $s' < s$.

On en déduit le résultat suivant, (provisoire).

On détermine tous les Y^B_s pourvu que l'on connaisse :

- les données de Cauchy d'ordre t sur P satisfaisant à (24) et (28),

  soit : $$Y^B_{t-1}, Y^B_{t-2}, \dots, Y^B_\circ$$

- les données sur $P \cap Q$ de :

$$U_t(P \cap Q), \dots, U_s(P \cap Q), \dots ; (\partial_1 U_t)(P \cap Q), \dots, (\partial_1 U_s)(P \cap Q), \dots$$

Nous allons améliorer ce résultat en étudiant les conditions (24) et (28), en nous inspirant du cas (I) et des calculs précédents.

Posons :

(34) $$Y^B_{t-2} = U_{t-2}d^B(P) + W^B_{t-2}$$

(35) $$Y^B_{t-1} - (\partial^i d^B)(P)\partial_i U_{t-2} + (\partial_o d^B)(P)U_{t-2} - \lambda^B(P)U_{t-2} = U_{t-1}d^B(P) + V^B_{t-1} .$$

On a décomposé Y_{t-2} en somme d'un élément proportionnel à $d(P)$ et d'un élément W_{t-2} dans un supplémentaire de $d(P)$ dans $(\Re_o)^m$; on a fait de même pour le premier membre de (35).

Remplaçons Y^B_{t-2} et Y^B_{t-1} dans (24) à l'aide de (34) et (35) ; on obtient :

$$(g_A\partial^j H^A_B\partial^i d^B)(P)\partial_{ij}U_{t-2} + (g_A\partial^j H^A_B\partial^i_j d^B)(P)\partial_i U_{t-2} - (g_A\partial^i H^A_B\partial_o d^B)(P)\partial_i U_{t-2}$$

$$+ (g_A\partial^i H^A_B)(P)\lambda^B(P)\partial_i U_{t-2} + \tfrac{1}{2}(g_A\partial^{ij}H^A_B d^B)(P)\partial_{ij}U_{t-2} + (g_A\partial^{ij}H^A_B\partial_j d^B)(P)\partial_i U_{t-2}$$

$$+ (g_A H^{*A}_B\partial^i d^B)(P)\partial_i U_{t-2} + (g_A\partial^i H^{*A}_B d^B)(P)\partial_i U_{t-2} + \theta_{-2}(P)U_{t-2}$$

$$+ \text{combinaison linéaire de } \partial_i V^B_{t-1}, V^B_{t-1}, \partial_{ij}W^B_{t-2} \text{ et } \partial_i W^B_{t-2} + \dots = 0 .$$

Soit encore, à l'aide de (16) et des formules de (19) à (22) :

(36) $$p^j\partial_j[p^i\partial_i U_{t-2}] + \omega_{-2}(P)p^i\partial_i U_{t-2} + \theta'_{-2}(P)U_{t-2}$$

$$+ \text{c.l. des } \partial_i V^B_{t-1}, V^B_{t-1}, \partial_{ij}W^B_{t-2}, \partial_i W^B_{t-2} + \dots = 0 ,$$

les pointillés représentent des termes en données de Cauchy d'ordre $t-2$.

On procède de même pour (28). Pour cela on précise (26), en prenant

$$W^B_t = (\partial^i d^B)(P)\partial_i U_{t-1} + \lambda^B(P)U_{t-1} + V^B_t ,$$

où V^B_t est combinaison linéaire de termes du type $\partial_{ij}U_{t-2}$, $\partial_i U_{t-2}$, U_{t-2}, $\partial_i V^B_{t-1}$, V^B_{t-1}, $\partial_{ij}W^B_{t-2}$, $\partial_i W^B_{t-2}$, W^B_{t-2} et de données de Cauchy d'ordre $t-2$, (on procède comme pour V^B_{t+1} précédemment).

Il reste à la place de (28) par des calculs analogues aux précédents :

(37) $$p^j\partial_j[p^i\partial_i U_{t-1}] + \omega_{-1}(P)p^i\partial_i U_{t-1} + \theta'_{-1}(P)U_{t-1}$$

$$+ \text{combinaison linéaire des } \left\{ \begin{array}{l} \partial_{ijk}U_{t-2}, \partial_{ij}U_{t-2}, \partial_i U_{t-2}, U_{t-2}, \partial_{ij}V^B_{t-1}, \partial_i V^B_{t-1} \\ V^B_{t-1}, \partial_{ijk}W^B_{t-2}, \partial_{ij}W^B_{t-2}, \partial_i W^B_{t-2}, W^B_{t-2} \end{array}\right.$$

$$+ \dots = 0 ;$$

les pointillés représentent des termes en données de Cauchy en Y^B d'ordre (t-2).

Les équations (36) et (37) sont des équations différentielles du 2e ordre en U_{t-2} et U_{t-1}.

On en déduit facilement que l'on détermine tous les Y^B_s pourvu que l'on connaisse :

- données sur P : $Y^B_{t-3}, Y^B_{t-4}, \dots, Y^B_o$; W^B_{t-2} et V^B_{t-1}
- données sur $P \cap Q$ $\begin{cases} U_{t-2}(P \cap Q),\ U_{t-1}(P \cap Q),\ U_t(P \cap Q), \dots,\ U_s(P \cap Q), \dots \\ (\partial_1 U_{t-2})(P \cap Q),\ (\partial_1 U_{t-1})(P\cap Q), (\partial_1 U_t(P\cap Q), \dots (\partial_1 U_s)(P\cap Q), \dots \end{cases}$

Se donner les $U_s(P \cap Q)$ et les $(\partial_1 U_s)(P \cap Q)$ équivaut à se donner les 2 séries en $x^o, x^2, \dots, x^n$:

$$U = \sum_{s=t-2}^{s=\infty} U_s(P \cap Q) \frac{(x^o)^s}{s!} \quad \text{et} \quad \partial_1 U = \sum_{s=t-2}^{s=\infty} (\partial_1 U_s)(P \cap Q) \frac{(x^o)^s}{s!},$$

qu'on interprètera comme des séries sur Q.

Nous conclurons sous une forme plus parlante, dans le cas où l'on choisit pour d^B et g_A les éléments δ'^B et γ'_A du premier paragraphe et pour supplémentaire le sous module engendré par les (m-1) derniers vecteurs de la base canonique de $(\mathcal{R}_o)^m$.

On détermine alors tous les Y^B_s pourvu que l'on connaisse :

- données sur P : $Y^B_{t-3}, \dots, Y^B_o$, $W^{\hat{c}}_{t-2} = Y^{\hat{c}}_{t-2} - \delta'^{\hat{c}}(P) Y^1_{t-2}$

  et
  $$V^{\hat{c}}_{t-1} = Y^{\hat{c}}_{t-1} - \delta'^{\hat{c}}(P) Y^1_{t-1} - (\partial^i \delta'^{\hat{c}})(P) \partial_i Y^1_{t-2} + (\partial_o \delta'^{\hat{c}})(P) Y^1_{t-2} - \lambda^{\hat{c}}(P) Y^1_{t-2}$$

(on a, pour cela, choisi : $\lambda^1(P) = 0$, ce qui est possible)

- données sur Q : les restrictions formelles de y^1 et de $\frac{\partial y^1}{\partial x^1}$ dérivée transverse à Q, ces données étant choisies compatibles avec les données sur P, à l'intersection $P \cap Q$.

On peut encore dire qu'on connaît sur P : les $m(t-2)$ données de Cauchy d'ordre (t-2) et (2m-2) conditions linéaires différentielles sur les données de Cauchy d'ordre t et qu'on connaît sur Q les 2 données de Cauchy d'ordre 2 de y, soit, en tout, mt conditions.

On remarque qu'en posant : $z^1 = y^1$, $z^{\hat{c}} = y^{\hat{c}} - \delta'^{\hat{c}}(P) y^1$, on a des conditions sur z^B d'expression un peu plus simple.

On a finalement le théorème d'existence et d'unicité formel suivant :

Il existe une solution formelle et une seule correspondant aux données suivantes :

1) les restrictions formelles à P, hypersurface caractéristique non singulière, des y^B et de leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à $(t-3)$ ainsi que $2(m-1)$ conditions linéaires différentielles sur les restrictions formelles des dérivées d'ordre $(t-2)$ et $(t-1)$, (c'est-à-dire la donnée des $W^{\hat{c}}_{t-2}$ et $V^{\hat{c}}_{t-1}$)

2) les restrictions formelles à Q, hypersurface transverse aux bicaractéristiques de l'une des inconnues, (soit y^1) et de sa dérivée transverse à Q, (soit $\partial_1 y^1$), ces données étant compatibles avec les précédentes sur $P \cap Q$.

7. Résolution du problème de Darboux-Goursat-Beudon-Hadamard.

Si l'on substitue aux problèmes formels précédents, les problèmes analytiques correspondants, au voisinage de l'intersection de P (caractéristique) et de Q (transverse aux bicaractéristiques), on obtient des résultats analogues aux résultats formels dans les cas (I) et (II b). Nous les énoncerons encore avec, comme choix particulier de (d) et (g), les (δ') et (γ').

- Dans le cas (I), on retrouve le théorème de Darboux-Goursat-Beudon-Hadamard classique.

Il existe une solution analytique et une seule, dans un voisinage de l'intersection de P et de Q correspondant aux données suivantes :

1) dans l'intersection de P et d'un voisinage de l'intersection de P et Q, les $m(t-1)$ fonctions analytiques représentant les restrictions des y^B et de leurs dérivées transversales d'ordre inférieur ou égal à $(t-2)$, ainsi que $(m-k)$ fonctions analytiques représentant les restrictions à P des combinaisons linéaires des dérivées d'ordre $t-1$ du type :

$$v^{\hat{c}}_{t-1} = \partial_{(o)^{t-1}} y^{\hat{c}} - \delta'^{\hat{c}}_{\bar{D}}(P) \partial_{(o)^{t-1}} y^{\bar{D}} , \qquad (1 \leq \bar{D} \leq k,\ k < \hat{c} \leq m).$$

2) dans l'intersection de Q et d'un voisinage de l'intersection de P et Q, k fonctions analytiques représentant les restrictions à Q des $y^{\bar{D}}$, ces données étant compatibles avec les précédentes à l'intersection de P et Q.

- Dans le cas (II b), on remplace d'abord le système (1) par un système équivalent composé des équations suivantes :

- une condition sur les données sur P, soit (36)
- une équation analogue à (37), que nous écrirons sous forme abrégée :

$$\partial_{(1)^2(o)^{t-1}}y^1 = \sum_{i,j,k,\alpha} R^{ijk\alpha_1\ldots\alpha_{t-2}} \partial_{ijk\alpha_1\ldots\alpha_{t-2}} y^1$$

$$+ \sum_{i,j,k,\ell,\alpha_1\ldots,\hat{c}} S_{\hat{c}}^{ijk\ell\alpha_1\ldots\alpha_{t-3}} \partial_{ijk\ell\alpha_1\ldots\alpha_{t-3}} y^{\hat{c}}$$

$$+ \sum_{i,j,k,B} T_{\hat{c}}^{ijk} \partial_{ijk} w_{t-2}^{\hat{c}} + \sum_{i,j,B} \bar{T}_{\hat{c}}^{ij} \partial_{ij} v_{t-1}^{\hat{c}}$$

$+ x^o$ (combinaison linéaire de dérivées de y^1, $y^{\hat{c}}$, w_{t-2}^B, v_{t-1}^B dont les ordres maximaux ne dépassent pas respectivement : $t+1$, $t+1$, 3 et 2)

$+ \ldots$,

les pointillés représentent des dérivées d'ordres (respectivement) plus petits ; R, S, T, $\bar{T}$ sont analytiques et données

- des équations analogues à (25) :

$\partial_{(o)^t} y^{\hat{c}} = \delta'^{\hat{c}}(P)\partial_{(o)^t} y^1$ + c. linéaire de dérivées des y^B d'ordre $\leqq t$ et d'ordre $< t$ en x^o + x^o (c. linéaire de dérivées des y^B d'ordre $\leqq t$).

$\dashv\ \partial_{(o)^{t-2}} y^{\hat{c}} - \delta'^{\hat{c}}(P)\partial_{(o)^{t-2}} y^1 = w_{t-2}^{\hat{c}}$

$\dashv\ \partial_{(o)^{t-1}} y^{\hat{c}} - \delta'^{\hat{c}}(P)\partial_{(o)^{t-1}} y^1 = v_{t-1}^{\hat{c}}$ + combinaison linéaire de dérivées d'ordre $\leqq t-1$ et d'ordre $< t-1$ en x^o,

$w_{t-2}^{\hat{c}}$ et $v_{t-1}^{\hat{c}}$ sont des inconnues auxiliaires.

Les données sont donc dans les voisinages habituels :

- les restrictions à P des dérivées transverses des y^B d'ordre $< t-2$, les restrictions à P des $w_{t-2}^{\hat{c}}$ et $v_{t-1}^{\hat{c}}$, les restrictions à Q de y^1 et de $\frac{\partial y^1}{\partial x^1}$.

La condition (36) sur Y_{t-2}^1 le détermine sur P, ainsi par suite que les $Y_{t-2}^{\hat{c}}$. On pose alors :

$$y^{\hat{c}} - \delta'^{\hat{c}}(P)y^1 = z^{\hat{c}} \ , \ y^1 = z^1 \ ,$$

on élimine $w_{t-2}^{\hat{c}}$ et $v_{t-1}^{\hat{c}}$ et on se ramène à un système du type :

$\partial_{(1)^2(o)^{t-1}} z^1$ = combinaison linéaire de dérivées de z^1 d'ordre $\leqq t+1$ et, pour celles d'ordre $t+1$, d'ordre $< t-1$ en x^o, de dérivées des $z^{\hat{c}}$ d'ordre $\leqq t+1$ et d'ordre $< t$ en x^o, et de dérivées des z^B d'ordre $\leqq t+1$ multipliées par x^o.

$\partial_{(o)^t} z^{\hat{c}}$ = combinaison linéaire de dérivées des z^B d'ordre $\leqq t$ et d'ordre $< t$ en x^o, et de dérivées des z^B d'ordre $\leqq t$ multipliées par x^o.

Les données sont alors :

- pour z^1, les restrictions à P de z^1 et des dérivées transversales à P d'ordre $< t-1$ et les restrictions à Q de z^1 et de $\frac{\partial z^1}{\partial x^1}$.
- pour les $z^{\hat{c}}$ les restrictions à P des dérivées transversales d'ordre $< t$.

On utilise la méthode des fonctions majorantes et on obtient un <u>théorème d'existence et d'unicité analytique</u> :

<u>Il existe une solution analytique et une seule dans un voisinage de l'intersection de</u> P <u>et de</u> Q, <u>correspondant aux données suivantes</u> :

1) <u>dans l'intersection de</u> P <u>et d'un voisinage de l'intersection de</u> P <u>et</u> Q, <u>les</u> m(t-2) <u>fonctions analytiques représentant les restrictions des</u> y^B <u>et de leurs dérivées transversales d'ordre inférieur ou égal à</u> (t-3), <u>ainsi que</u> 2(m-1) <u>fonctions analytiques représentant les restrictions à</u> P <u>des combinaisons linéaires des dérivées d'ordre</u> (t-2) <u>du type</u> :

$$w^{\hat{c}}_{t-2} = \partial_{(o)^{t-2}} y^{\hat{c}} - \delta'^{\hat{c}}(P)\partial_{(o)^{t-2}} y^1$$

<u>et des combinaisons linéaires des dérivées d'ordre</u> (t-1) <u>et</u> (t-2) <u>du type</u> :

$$v^{\hat{c}}_{t-1} = \partial_{(o)^{t-1}} y^{\hat{c}} - \delta'^{\hat{c}}(P)\partial_{(o)^{t-1}} y^1 - (\partial^i\delta'^{\hat{c}})(P)\partial_{i(o)^{t-2}} y^1 +$$
$$+ (\partial_o\delta'^{\hat{c}})(P)\partial_{(o)^{t-2}} y^1 - \lambda^{\hat{c}}(P)\partial_{(o)^{t-2}} y^1 ,$$

($\lambda^{\hat{c}}(P)$ est défini par (30) avec $\lambda^1 = 0$),

2) <u>dans l'intersection de</u> Q <u>et d'un voisinage de l'intersection de</u> P <u>et</u> Q, <u>les deux fonctions analytiques représentant les restrictions à</u> Q <u>de</u> y^1 <u>et de sa dérivée transversale à</u> Q, <u>ces données étant supposées compatibles avec les précédentes à l'intersection de</u> P <u>et de</u> Q.

8. Solutions à dérivées discontinues.

Indiquons brièvement les résultats obtenus en termes de discontinuités, (cf. [15] par exemple). Dans le cas (I) les discontinuités des dérivées d'ordre $\geqq t$ se propagent le long des bicaractéristiques et la propagation est décrite par des équations différentielles du 1er ordre. Dans le cas (II a), l'hypersurface n'est pas front d'onde, il ne peut y avoir de discontinuités de ces dérivées à sa traversée. Dans le cas (II b) les discontinuités se propagent le long des bicaractéristiques et la propagation est décrite par des équations différentielles du 2e ordre. Dans les cas "singuliers", les discontinuités ne se propagent pas le long de rayons; elles peuvent se "diffuser" dans un cône, comme dans les cas de "réfraction conique".

BIBLIOGRAPHIE ET RÉFÉRENCES

[1] BOURBAKI. Modules plats. Localisation. Paris, Hermann, 1961.

[2] COURANT et HILBERT. Methods of Mathematical Physics II. New-York, Interscience Publishers, 1965.

[3] COURANT et P.D. LAX. Propagation of discontinuities in wave motion. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., vol. 42, n°11 (1956), p. 872-76.

[4] G.F.D. DUFF. Mixed Problems for linear systems of first order equations. Canadian J. Math. 10 (1958), p. 127-60.

[5] G.F.D. DUFF. Mixed problems for hyperbolic equations of general order. Canadian J. Math. 11 (1959), p. 195-221.

[6] HADAMARD. Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamisme. Paris, Hermann, 1903.

[7] A. LAX. On Cauchy's problem for partial differential equation with multiple characteristics. Comm. on pure and applied Math. vol. IX, p. 135-169 (1956).

[8] P.D. LAX. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. Duke Math. J., vol. 24, p. 627-646 (1957).

[9] GÅRDING, KOTAKÉ, LERAY. Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes ; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées. Bull. Soc. Math. France, t. 92, p. 263-361, 1964.

[10] R.M. LEWIS. Discontinuous initial value problems for symmetric hyperbolic linear differential equations. Journal of Math. and Mech., vol. 7, n°4, p. 571-628 (1958).

[11] R.M. LEWIS and J.B. KELLER. Asymptotic methods for partial differential equations : the reduced wave equation and Maxwell's equations. Research report n° EM 194, Courant Institute of Math. Sci., Division of electromagn. res., New-York U. (1964).

[12] D. LUDWIG. Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, Comm. on pure and applied math., vol. 13, p. 473-508 (1960).

[13] D. LUDWIG. Singularities of the Riemann function, N°40, Rep. N°9351, Courant Instit. of Math. Sc., AEC computing and applied math. Center (1961).

[14] PETROVSKY. Lectures on partial differential equations. New-York, Interscience Publishers, 1950.

[15] J. VAILLANT. Etude des discontinuités sur les caractéristiques multiples... C.R. Acad. Sciences Paris, t. 255, p. 628-630 (1962)

J. VAILLANT. Equations aux discontinuités... C.R. Acad. Sciences, Paris, t. 255, p. 1560-2 (1962)

J. VAILLANT. Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. Annal. Institut Fourier de l'Univ. de Grenoble, Tome XV, Fasc. 2, p. 225-311 (1965)

[16] J. VAILLANT. Théorème d'existence et d'unicité formel... C.R. Acad. Sciences Paris, t. 201, p. 2146-8 (1965)

[17] J. VAILLANT. Propagation le long de rayons... C.R. Acad. Sciences Paris, t. 262, p. 1054-7 (1966)

[18] J. VAILLANT. Sur les discontinuités du tenseur de courbure en théorie d'Einstein-Schrödinger, C.R. Acad. Sciences Paris, t. 253, p. 1909-11 (1961)

J. VAILLANT. Sur les discontinuités du tenseur de courbure en théorie d'Einstein-Schrödinger. C.R. Acad. Sciences Paris, t. 254, p. 431-3 (1962)

[19] VAN DER WAERDEN. Modern Algebra, New-York, Frederick Ungar Publishing C.O. vol. II (1950)

[20] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT. Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Acta mathematica, t. 88, p. 141-225 (1952)

[21] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT. Uniformisation de la solution d'un problème de Cauchy non linéaire à données holomorphes. Bulletin de la Société math. de France, Tome 94 (1966) p. 25-48.

[22] HÖRMANDER. Linear partial differential operators. Berlin, Springer Verlag. 1964.

[23] BOURBAKI. Diviseurs. Paris, Hermann, 1965.

[24] BOURBAKI. Entiers. Valuation. Paris, Hermann, 1964

[25] BOURBAKI. Groupes et corps ordonnés, etc. Paris, Hermann, 1964

[26] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT. Ondes asymptotiques pour un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. C.R. Acad. Sciences Paris, t. 264, p. 625-628 (1967).

[27] E.E. LEVI. Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, Annali di matematica, Série III^{A}, Tome XVI (1909), p. 161-201.