Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

J. J. Moreau

Fonctionnelles convexes

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1966-1967), p. 1-108
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1966-1967___2_1_0>

TABLE DES MATIÈRES

FONCTIONNELLES CONVEXES

par J.J. MOREAU
(Montpellier)

1. INTRODUCTION

1.a. Les propriétés des fonctions numériques convexes sur $\mathbb{R}$ sont familières (Cf. BOURBAKI [3], Chap. 1), ainsi que l'usage de la convexité pour obtenir certaines inégalités fondamentales (Cf. BOURBAKI [2], Chap. 1 ; HARDY, LITTLEWOOD, POLYA [1], Chap 3). Les traités d'analyse fonctionnelle accordent aussi une certaine place aux fonctions numériques convexes sur un e.v.t., notamment, parce que normes et semi-normes sont de telles fonctions (Cf. BOURBAKI [1], Chap.2).

L'intérêt pour les fonctions convexes s'est trouvé ravivé dans les vingt dernières années par le développement des techniques <u>d'optimisation</u> ; dans ce contexe industriel, la recherche de l'éventuel minimum d'une fonction numérique sur un ensemble s'appelle un problème de <u>programmation</u> : programmation dite convexe si l'ensemble et la fonction sont convexes (Cf., par exemple, KARLIN [1]). Ces problèmes ont donné lieu à un nombre considérable de travaux dans lesquels l'idée de <u>dualité</u> tient une place importante (déjà, dans le calcul des variations traditionnel, développé sans intervention de la convexité, mais sous des hypothèses de différentiabilité, l'intérêt de la dualité est souligné notamment par COURANT, HILBERT [1], t.I, Chap. 4, § 9 et 11).

Diverses questions de la <u>théorie de l'approximation</u> rentrent aussi dans ce cadre.

<u>Les fonctions convexes conjuguées</u> de FENCHEL [1], [2] fournissent un procédé systématique pour mettre en oeuvre la dualité dans les problèmes de programmation convexe en dimension finie (Cf. KARLIN [1], BERGE, GHOUILAHOURI [1], ROCKAFELLAR [1], [17] et, indépendamment, BELLMAN, KARUSH [1] à [5]). Il s'agit là d'une extension au cas de fonctions convexes finies, définies sur des parties convexes de $\mathbb{R}^n$, d'idées antérieurement développées pour $n = 1$ dans BIRNBAUM, ORLICZ [1] et MANDELBROJT [1]. Comme exemple plus ancien d'une telle correspondance entre fonctions convexes il faut citer aussi les classiques paires de fonctions, construites depuis YOUNG [1], sur $\mathbb{R}_+$, en intégrant une fonction strictement croissante et sa fonction réciproque (cela sera généralisé au § 14.d. ci-après).

La dualité des fonctions convexes sera présentée ici sous l'aspect qui lui a été donné dans MOREAU [2]. Les fonctions peuvent prendre des valeurs infinies et sont partout définies sur un espace vectoriel X : on se ramènera toujours à ce cas en prolongeant une fonction avec la valeur $+\infty$ hors de son domaine initial.

Toute partie A de X sera décrite par sa "fonction indicatrice" ψ_A($\psi_A(x) = 0$ si $x \in A$, $= +\infty$ si $x \notin A$). Rechercher l'éventuel minimum d'une fonction f sur l'ensemble A équivaut à chercher le minimum de $f + \psi_A$ sur X . Par cet artifice tout problème mettant en jeu des ensembles (convexes, fermés,...) est ramené, si l'on veut, à un problème mettant en jeu leurs fonctions indicatrices (convexes, s.c.i...) ; inversement, il y a là un "procédé de fabrication" de résultats nouveaux : on regarde si telle proposition connue, invoquant des parties d'un e.v.t. n'est pas, dans l'optique précédente, corollaire d'une proposition concernant des fonctions plus générales que les fonctions indicatrices d'ensemble. La motivation initiale de l'auteur était de formuler et résoudre dans le cadre hilbertien certains problèmes aux limites concernant des équations et inéquations aux dérivées partielles (Cf. MOREAU [20], [21]). Ce mode de prospection a été notablement utilisé depuis (Cf. AGGERI [1], LESCARRET [1], BROWDER [3], [4] ; le passage de BISHOP, PHELPS [1] à BROENDSTED, ROCKAFELLAR [1] donne un exemple typique - Cf. section 13 ci-après).

Un parallèle entre la traditionnelle transformation de Legendre et la transformation de Fenchel (elles coïncident lorsqu'il s'agit de fonctions à la fois convexes et partout différentiables) situe clairement les considérations en question par rapport à l'analyse classique. Pour définir la transformation de Legendre, on traite une fonction différentiable, non nécessairement convexe, comme une famille de "germes de fonctions affines" qui la représentent localement "à un infiniment petit d'ordre supérieur près". Pour définir la transformation de Fenchel, on traite une fonction convexe, non nécessairement différentiable, comme une enveloppe supérieure de fonctions affines ; une telle représentation peut manquer de précision locale, mais on a l'assurance que chacune des fonctions affines en question minore partout la fonction considérée. Au niveau du calcul numérique cela donne des certitudes que ne fournissaient pas les notions théoriques de différentielle et d'infiniment petit.

Ce qui vient d'être dit fait comprendre que l'intérêt de la dualité en "analyse convexe" dépasse de beaucoup la transformation d'un problème donné en un problème dual équivalent. La représentation d'une fonction convexe comme enveloppe supérieure de fonctions affines est utile jusqu'au stade numérique (sur la bibliographie de cette technique, baptisée quasilinéarisation, voir BECKENBACH, BELLMAN [1], BELLMAN, KALABA [1]). Elle fournira d'autre part un instrument essentiel pour l'étude générale des fonctions convexes s.c.i. sur un e.v.t. localement convexe.

La présente monographie n'accorde pas d'intérêt spécial aux espaces vectoriels de dimension finie. Tout au plus rappellera-t-on au § 5.b quelques particularités des ensembles et fonctions convexes en dimension finie : elles pourront servir de clef pour tirer des diverses propositions les corollaires intéressant ce cas.

La plupart des résultats exposés sont dus à un très petit groupe d'auteurs et ont été publiés depuis 1962. Naturellement beaucoup de mises au point nouvelles et réarrangements se sont trouvés nécessaires.

1.b. Pour ne pas trop allonger ce fascicule un certain nombre de développements récents ont été systématiquement laissés de côté ; ce sont essentiellement :

-L'étude des fonctions convexes-concaves sur un produit de deux espaces vectoriels (ou "fonctions selle"). Les méthodes exposées ici, appliquées à ce cas, conduisent à des théorèmes du type "minimax" (Cf. MOREAU [14], [21] ; ROCKAFELLAR [4], [12]).

-L'axiomatique des "espaces de convexité" (MOREAU [9]). La structure d'espace vectoriel et même celle de cône convexe sont en effet inutilement riches pour développer les notions d'ensemble convexe et de fonction convexe. Antérieurement, et presque ensemble, KNESER [1] et STONE [1] avaient présenté de telles axiomatiques, mais choisies délibérément très riches, de manière à obtenir un théorème d'isomorphisme entre l'ensemble ainsi structuré et une partie convexe d'un espace vectoriel, ce qui clôt leur théorie (noter que, pour ces auteurs, les "masses" peuvent prendre leurs valeurs dans un ensemble plus général que R_+).

-La notion de point extrémal d'une fonction, les à-côtés du théorème de Krein-Milman et sa transformation par dualité (Cf. AGGERI [1], BROENDSTED [2]).

-L'étude des fonctions convexes quadratiques (au sens large c'est-à-dire pouvant prendre des valeurs infinies). Grâce à ces fonctions la théorie des sous-espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique de SCHWARTZ [1], [2] peut être abordée sous un aspect nouveau : un sous-hilbertien (réel) H de l'e.v.t. (réel) E peut être caractérisé par la fonction h partout définie dans E, égale sur H au carré de la norme de cet hilbertien et à $+\infty$ hors de H. La loi de composition des sous-hilbertiens revient alors à une inf-convolution (Cf. section 3, ci-après) des fonctions correspondantes. Le noyau associé à H est l'application sous-différentielle ∂h^* (Cf. sections 10, 11, 12 ci-après).

-Enfin on a complètement omis le cas d'un espace hilbertien (ou préhilbertien) : si on identifie un tel espace à son dual les couples de problèmes de "programmation convexe" en dualité se trouvent formulés dans le même espace ; leurs éléments peuvent alors, de certaines manières, être composés entre eux. L'idée directrice est d'obtenir une généralisation non linéaire de l'idée de décomposition d'un espace hilbertien en somme directe de deux sous-espaces orthogonaux (les projections sur deux tels sous-espaces sont bien en effet un exemple typique de couple de problème d'optimisation en dualité). On consultera MOREAU [17].

L'intérêt de l'auteur pour la convexité est motivé par la théorie des liaisons unilatérales en mécanique (MOREAU [5], [15], [18], [21]). On n'en sera pas surpris car les mécaniciens sont certainement parmi les plus anciens utilisateurs du concept de convexité : songer au théorème du "polygône de sustentation" (statique d'un solide pesant reposant, unilatéralement, sur un plan).

1.c. SOMMAIRE

§ 7.e. Continuité uniforme de h.

§ 7.f. Ensemble dont le polaire possède un intérieur non vide.

§ 7.g. Un cas où $h \nabla h'$ est faiblement s.c.i.

Section 8 : <u>Fonctions duales</u>.

§ 8.a. $f \in \bar{R}^X$ et $g \in \bar{R}^Y$ sont dites duales si $f = g^*$ et $f^* = g$.

§ 8.b. $x \in X$ et $y \in Y$ sont dits conjugués par rapport à $(f.g)$ si

$$f(x) + g(y) = < x, y >.$$

§ 8.c. Dictionnaire d'équivalences entre propriétés de f et propriétés de g.

§ 8.d. $\mathcal{C}$: topologie d'e.v.t. sur X (non nécessairement compatible avec la dualité). f est finie et $\mathcal{C}$ -continue à l'origine si et seulement si les "sections" $g^{\leqq}(\rho)$ sont $\mathcal{C}$ -équicontinues.

§ 8.e. Cas où $\mathcal{C}$ est la topologie forte.

§ 8.f. Cas où $\mathcal{C}$ est compatible avec la dualité.

§ 8.g. Cas où $\mathcal{C}$ est la topologie faible.

§ 8.h. Continuité uniforme de f .

§ 8.k. Fonction asymptote.

§ 8.ℓ. Enveloppe conique.

Section 9 : Γ -<u>convolution</u>.

§ 9.a. On note $\underline{\nabla}$ (Γ-convolution) la transmuée de l'addition $\dotplus$ par dualité ; donc $g \,\underline{\nabla}\, g' = (g \nabla g')^{**}$.

§ 9.b. Un cas où $g \,\underline{\nabla}\, g' = g \nabla g'$.

§ 9.c. Autre cas.

§ 9.d. Autres cas.

Section 10 : <u>Sous-gradients</u>.

§ 10.a. $y_o \in Y$ est dit sous-gradient de $h \in \bar{R}^X$ au point $x_o \in X$ ($h(x_o)$ fini) si la fonction affine $x \mapsto < x - x_o, y_o > + h(x_o)$ minore h. On note $\partial h(x_o)$ (sous-différentiel) l'ensemble des sous-gradients de h au point x_o .

§ 10.b. Si f et g sont des fonctions duales $y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial g(y) \Leftrightarrow x$ et y conjugués.

§ 10.c. Cas usuel assurant $\partial h(x_o) \neq \emptyset$.

§ 10.d. Conditions assurant $\partial(h + h') = \partial h + \partial h'$.

§ 10.e. Autre cas.

§ 10.f. Dérivées directionnelles et sous-gradient.

§ 10.g. Différentiabilité faible.

§ 10.h. Sous différentiel à ε près.

§ 10.i. Cas d'un espace de Banach : théorème d'approximation.

§ 10.j. Si X est un espace de Banach, une fonction $f \in \Gamma_o(X)$ est déterminée,

§ 14.d. Duales de Young.

§ I4.e. Si a et b sont des jauges conjuguées et si Φ et γ sont des duales de Young (non singulières) les fonctions $\Phi \circ a$ et $\gamma \circ b$ sont duales.

§ 14.f. "Duality mappings".

Section 15 : <u>Bibliographie</u>

2. FONCTIONS NUMÉRIQUES CONVEXES

2.a. Pour tout $a \in]-\infty, +\infty]$, la convention

(2.1) $$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$$

(resp. pour tout $a \in [-\infty, +\infty[$, la convention

(2.2) $$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty)$$

prolonge classiquement l'addition de $\mathbb{R}$ en une loi de composition dans l'ensemble $]-\infty, +\infty]$ (resp. l'ensemble $[-\infty, +\infty[$) qui possède encore la commutativité, l'associativité et beaucoup des propriétés usuelles.

Il n'est pas classique d'étendre cette loi à $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ tout entier ; c'est ce que nous ferons, de deux manières différentes, en notant $\dot{+}$ (addition supérieure) et $\underset{\bullet}{+}$ (addition inférieure) les lois prolongeant la loi + à tout couple d'éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ au moyen des conventions :

$$(-\infty) \dot{+} (+\infty) = (+\infty) \dot{+} (-\infty) = (+\infty)$$
$$(-\infty) \underset{\bullet}{+} (+\infty) = (+\infty) \underset{\bullet}{+} (-\infty) = (-\infty)$$

Dans MOREAU [9], [10] on a recherché minutieusement quelles propriétés de l'addition classique étaient conservées par ces extensions. La loi $\underset{\bullet}{+}$ étant transmuée de la loi $\dot{+}$ par la symétrie $x \mapsto -x$ on formulera seulement les résultats pour la seconde. Citons :

<u>La loi</u> $\dot{+}$ <u>est commutative et associative. En outre, quels que soient</u> $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$, <u>quels que soient</u> $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$, <u>on a</u> :

$$\lambda(x \dot{+} y) = \lambda x \dot{+} \lambda y$$
$$(\lambda + \mu)x = \lambda x \dot{+} \mu x$$

(<u>ainsi que, évidemment</u>, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ <u>et</u> $1x = x$) , <u>ce qui munit</u> $\bar{\mathbb{R}}$ <u>d'une structure de cône convexe notée</u> $(\bar{\mathbb{R}}, \dot{+})$. <u>Si</u> E <u>est un ensemble quelconque, il en résulte naturellement, pour l'ensemble</u> $\bar{\mathbb{R}}^E$ <u>des applications de</u> E <u>dans</u> $\bar{\mathbb{R}}$ <u>une structure de cône convexe notée</u> $(\bar{\mathbb{R}}^E, \dot{+})$.

2.b. La loi $\dot{+}$ est <u>isotonique</u> par rapport à la relation d'ordre usuelle de $\bar{\mathbb{R}}$ et, plus précisément :

Si x, y, z <u>sont trois éléments de</u> $\bar{\mathbb{R}}$, <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

I) $x \dot{+} y \leq z$

II) $\exists x'$, $\exists y'$ <u>tels que</u> $x \leq x'$, $y \leq y'$, $x' \dot{+} y' = z$

<u>Enoncé semblable en remplaçant</u> $\leq$ <u>par</u> $<$ (<u>mais non par</u> $\geq$ <u>ou par</u> $>$).

On en tire notamment :

<u>Si</u> $(u_i)_{i \in I}$ <u>et</u> $(v_j)_{j \in J}$ <u>sont deux familles quelconques d'éléments de</u> $\bar{\mathbb{R}}$, <u>on a l'égalité</u>

(2.3) $$\inf_{(i,j) \in I \times J} (u_i \dot{+} v_j) = \inf_{i \in I} u_i \dot{+} \inf_{j \in J} v_j ,$$

mais seulement en général l'inégalité

(2.4) $\sup_{(i,j)\in I\times J} (u_i \dotplus v_j) \leq \sup_{i\in I} u_i \dotplus \sup_{j\in J} v_j$.

Si on prend, en particulier, pour u_i un seul élément $a\in\bar{\mathbb{R}}$, il vient

(2.5) $\inf_{j\in J} (a \dotplus v_j) = a \dotplus \inf_{j\in J} v_j$.

2.c. DÉFINITION. Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et soit C une partie convexe de X . On dit qu'une fonction f définie sur C , à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tout x et tout x' dans C , pour tout α et tout α' dans $]0,1[$, avec $\alpha + \alpha' = 1$, on a

(2.6) $$f(\alpha x + \alpha' x') \leqq \alpha f(x) \dotplus \alpha' f(x') .$$

Evidemment si f prend seulement ses valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ ou dans $[-\infty, +\infty[$, le signe $\dotplus$ dans (2.6) équivaut à $+$: on retrouve la définition classique de la convexité.

Il reviendrait au même de se contenter d'un signe $+$ ordinaire au second nombre de (2.6) et de déclarer que l'inégalité doit avoir lieu toutes les fois que cette somme ordinaire est définie. Mais ce maniement d'expressions non toujours définies se révèle extrêmement incommode.

Une définition équivalente apparaît dans ROCKAFELLAR [1]; la définition en question peut se rattacher à la nôtre par l'intermédiaire de la remarque suivante : Si à chaque $a\in\bar{\mathbb{R}}$ on associe l'onsemble

$$T(a) = \mathbb{R} \cap [a, +\infty]$$

(vide si $a = +\infty$), T est un isomorphisme du cône convexe $(\bar{\mathbb{R}}, \dotplus)$ dans l'ensemble des parties convexes de $\mathbb{R}$ (ensemble classiquement muni d'une structure de cône convexe).

REMARQUE. La fonction $f\in\bar{\mathbb{R}}^C$ est convexe si et seulement si la fonction $\bar{f}$ qui la prolonge à X tout entier de la façon suivante :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in C \\ +\infty & \text{si } x\notin C \end{cases}$$

est convexe. Comme en outre il sera surtout question de minorations et qu'une minoration de $\bar{f}$ est visiblement équivalente à une minoration de f , on se limitera dans la suite à considérer des fonctions convexes définies sur un espace vectoriel tout entier.

2.d. EXEMPLE. Pour toute partie A de X la fonction, notée ψ_A ,

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in A \\ +\infty & \text{si } x\notin A \end{cases}$$

sera appelée fonction indicatrice de A.

On vérifiera que cette fonction est convexe si et seulement si l'ensemble A est convexe.

En particulier la fonction, notée ω_X, qui prend la valeur constante $+\infty$ partout sur X constitue la fonction indicatrice de la partie vide de X ; elle est convexe.

Par l'usage des fonctions indicatrices, l'étude des propriétés d'ensembles convexes peut ainsi se ramener dans une large mesure à l'étude de fonctions numériques convexes. Mais, comme on va le voir, il est inversement possible de ramener l'étude des fonctions numériques convexes sur l'espace vectoriel X à celle de certains ensembles convexes dans un espace "ayant une dimension de plus".

2.e. DÉFINITION. On appelle épigraphe de la fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ l'ensemble

$$F = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : \ f(x) \leq r\}$$

et épigraphe strict de f la partie F' de $X \times \mathbb{R}$ définie de même par $f(x) < r$.

Visiblement deux fonctions sont identiques si et seulement si elles ont même épigraphe (resp. même épigraphe strict).

On vérifie facilement :

Une fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est convexe sur l'espace vectoriel X si et seulement si son épigraphe (resp. son épigraphe strict) et une partie convexe de l'espace vectoriel $X \times \mathbb{R}$.

Dans le même ordre d'idées :

Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est convexe pour tout $k \in \overline{\mathbb{R}}$ les ensembles

$$\{x \in X : \ f(x) \leq k\} \quad \text{noté} \quad f^{\leq}(k)$$

et

$$\{x \in X : \ f(x) < k\} \quad \text{noté} \quad f^{<}(k)$$

sont convexes.

Par contre la convexité de ces ensembles n'implique pas nécessairement que la fonction f soit convexe.

2.f. Les fonctions convexes prenant la valeur $-\infty$ sont assez spéciales : soit f convexe ~~sur~~ l'espace vectoriel X et soit $x_o \in X$ tel que $f(x_o) = -\infty$. On tire immédiatement de l'inégalité (2.6) que sur toute demi-droite d'origine x_o il existe au plus un point, soit x_1, en lequel f prenne une valeur finie ; entre x_o et x_1, la fonction prend la valeur $-\infty$; au delà de x_1 elle prend la valeur $+\infty$. Donc si f prend quelque part la valeur $-\infty$, les points où elle est finie sont assez "rares" ; en particulier ce sont tous des points non internes de l'ensemble convexe $f^{<}(+\infty)$. (Rappelons qu'un point a est dit interne pour un ensemble convexe C si toute droite passant par a rencontre C selon un segment de droite auquel a est intérieur).

2.g. Voici quelques règles opératoires concernant les fonctions convexes :

Si f et g sont deux fonctions convexes, il en est de même de la fonction $f \dot{+} g$.

Cela résulte de la commutativité et de l'associativité de l'addition supérieure $\dot{+}$.

En outre, si $\lambda \in]0, +\infty[$ est une constante, et si f est convexe, la fonction λf est convexe. Bref l'ensemble des fonctions convexes est un sous-cône convexe de $(\bar{\mathbb{R}}^X, \dot{+})$ (Cf. § 2.a).

On notera $(\text{Conv } X, \dot{+})$ l'ensemble des fonctions convexes sur X muni de cette structure de cône convexe.

Par l'inégalité (2.4) on trouve d'autre part :

Si (f_i), $i \in I$ est une famille quelconque de fonctions convexes, l'enveloppe supérieure $\sup_{i \in I} f_i$ est une fonction convexe.

En outre :

Si (f_i), $i \in I$ est une famille filtrante décroissante (ou, en particulier, une suite décroissante) de fonctions convexes, l'enveloppe inférieure $\inf_{i \in I} f_i$ est une fonction convexe.

En effet, pour établir l'inégalité

$$\inf_i f_i(\alpha x + \alpha' x') \leqq \alpha \inf_i f_i(x) \dot{+} \alpha' \inf_i f_i(x'), \tag{2.7}$$

considérons k strictement supérieur au second membre (l'inégalité serait triviale si ce second membre valait $+\infty$).

D'après le § 2.b, il existe s et s' tels que :

$$s \dot{+} s' = k$$

$$\alpha \inf_i f_i(x) < s$$

$$\alpha' \inf_i f_i(x') < s' .$$

Alors

$$\exists\, p \in I : \quad \alpha f_p(x) < s$$

$$\exists\, p' \in I : \quad \alpha' f_{p'}(x) < s' .$$

Puisque la famille (f_i) est filtrante décroissante il existe $q \in I$ tel que la fonction f_q minore les fonctions f_p et $f_{p'}$; alors

$$\begin{aligned} f_q(\alpha x + \alpha' x') &\leqq \alpha f_q(x) \dot{+} \alpha' f_q(x') \\ &\leqq \alpha f_p(x) \dot{+} \alpha' f_{p'}(x') \\ &< s \dot{+} s' = k . \end{aligned}$$

Cela montre que k majore aussi le premier membre de (2.7) et établit cette inégalité.

2.h. Un exemple important de fonction convexe sur l'espace vectoriel X est le suivant :

DÉFINITION. On dit que $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est une fonction jauge si elle possède les propriétés suivantes :

i) f prend ses valeurs dans $[0,+\infty]$

ii) $$f(0) = 0$$

iii) f est positivement homogène, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in]0, +\infty[$, on a

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

iv) f est convexe (compte tenu de iii, il est équivalent de supposer f sous-additive).

Evidemment alors l'ensemble

$$f^{\leqq}(1) = \{x \in X : f(x) \leqq 1\}$$

est convexe et contient l'origine. Réciproquement, pour toute partie convexe C de X , contenant l'origine, il existe une fonction jauge f et une seule telle que $C = f^{\leqq}(1)$, à savoir :

$$f(x) = \inf \{k \in]0, +\infty[: x \in k\,C\} \quad . \tag{2.8}$$

L'inf est pris dans $\bar{\mathbb{R}}$; l'ensemble entre accolades est vide si x n'est pas absorbé par C : en ce cas $f(x) = +\infty$.

On dit que f est la jauge de l'ensemble C (convexe contenant l'origine).

EXEMPLE : Si C est une partie conique convexe de X (de sommet 0 inclus), sa jauge est aussi bien sa fonction indicatrice ψ_C .

2.i. Rappelons, pour terminer cette section, qu'une fonction $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est dite concave sur X si la fonction $-f$ est convexe ce qui revient à dire que, pour tout x et tout x' dans X , pour tout α et tout α' dans $]0,1[$, avec $\alpha + \alpha' = 1$, on a

$$f(\alpha x + \alpha' x') \geqq \alpha f(x) \dot{+} \alpha' f(x') \quad .$$

Cette notion ne sera pas invoquée dans la suite ; elle prend toute son importance dans le contexte suivant : Soient C et D des parties convexes de deux espaces vectoriels X et Y . On dit qu'une application F de l'ensemble produit $C \times D$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction selle (angl. : saddle function) si pour tout $y \in D$ la fonction

$$x \mapsto F(x, y)$$

est convexe et que pour tout $x \in C$, la fonction

$$y \mapsto F(x, y)$$

est concave. La question de l'existence d'un col (angl. : saddle point), c'est-à-dire d'un point $(x_o, y_o) \in C \times D$ tel que, pour tout $x \in C$ et tout $y \in D$, on ait

$$F(x_o, y) \leqq F(x_o, y_o) \leqq F(x, y_o)$$

est d'une grande importance dans diverses applications ; ou, simplement, la question de savoir si les quantités $\inf_x \sup_y F(x, y)$ et $\sup_y \inf_x F(x, y)$ sont égales.

Pour l'aspect classique de ces questions voir : BERGE [1] ; on peut également leur appliquer des méthodes de dualité dans l'esprit du présent exposé (Cf. MOREAU [14], ROCKAFELLAR [4], [12]).

3. INF-CONVOLUTION

3.a. DÉFINITION.- Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. On note ∇ la loi de composition, appelée inf-convolution, qui, à deux fonctions $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ et $g \in \bar{\mathbb{R}}^X$ fait correspondre la fonction :

$$(3.1) \qquad x \mapsto (f \nabla g)(x) = \inf_{u+v = x} [f(u) \dot{+} g(v)] .$$

On définit de même la sup-convolution, notée Δ, par

$$(f \Delta g)(x) = \sup_{u+v = x} [f(u) \underset{\bullet}{+} g(v)]$$

(loi transmuée de la précédente par une symétrie dans $\bar{\mathbb{R}}$ de sorte qu'on se limitera dans la suite à considérer la loi ∇).

Dans MOREAU [9], cette opération est étudiée en prenant pour X un demi-groupe commutatif quelconque. Comme l'addition dans l'espace vectoriel X est en fait une loi de groupe, (3.1) s'écrit aussi bien, dans le cas présent :

$$(3.2) \qquad (f \nabla g)(x) = \inf_{u \in X} [f(u) \dot{+} g(x-u)]$$

$$= \inf_{v \in X} [f(x-v) \dot{+} g(v)] .$$

La loi de composition ∇ (resp. Δ) est visiblement commutative ; elle est en outre associative.

En effet, si F, G, h sont trois fonctions numériques sur X, on a, en utilisant (2.5),

$$[f \nabla (g \nabla h)](x) = \inf_{u+t = x} [f(u) \dot{+} \inf_{v+w = t} (g(v) \dot{+} h(w))]$$

$$= \inf_{u+t = x} \; \inf_{v+w = t} [f(u) \dot{+} g(v) \dot{+} h(w)] .$$

Or

$$\{(t,u,v,w) \in X^4 : u+t = x, v + w = t\}$$

$$= \{(t,u,v,w) \in X^4 : v+w = t, \; u+v+w = x \}$$

donc

$$[f \nabla (g \nabla h)](x) = \inf_{u+v+w = x} [f(u) \dot{+} g(v) \dot{+} h(w)] .$$

Cette expression, symétrique en f, g, h, montre l'associativité.

3.b. EXEMPLE. Si A et B sont deux parties quelconques de X, on a pour leurs fonctions indicatrices ψ_A et ψ_B (Cf. § 2.d) :

$$(\psi_A \nabla \psi_B)(x) = \inf_{u+v = x} [\psi_A(u) \dotplus \psi_B(v)] .$$

La quantité entre crochets est toujours $\geqq 0$. S'il existe $u \in A$ et $v \in B$ tels que $u+v = x$, c'est-à-dire si x appartient à l'ensemble $A + B$, la valeur 0 est effectivement atteinte et l'inf vaut 0. Si, au contraire, $x \notin A + B$, il n'existe pas de décomposition de x en somme de $u \in A$ et $v \in B$: cette quantité entre crochets ne prend pas d'autre valeur que $+ \infty$. Donc

(3.3) $$\psi_A \nabla \psi_B = \psi_{A+B}$$

Plus généralement pour toute $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, on appelle <u>domaine effectif de</u> f, <u>noté</u> dom f, l'ensemble

$$\text{dom } f = \{x \in X : f(x) < + \infty\}$$

et on trouve, comme ci-dessus, pour deux fonctions numériques quelconques f et g,

(3.4) $$\text{dom } (f \nabla g) = \text{dom } f + \text{dom } g$$

3.c. EXEMPLE. Soit $a \in X$; on notera simplement ψ_a la fonction indicatrice de l'ensemble $\{a\}$. Soit $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$; on a, d'après (3.2),

$$(\psi_a \nabla f)(x) = \inf_{u \in X} [\psi_a(u) \dotplus f(x-u)] .$$

Comme $\psi_a(u)$ ne diffère de $+ \infty$ que pour $u = a$, il en est de même de la quantité entre crochets ; cela laisse :

(3.5) $$(\psi_a \nabla f)(x) = f(x-a) .$$

C'est-à-dire que <u>l'opération</u> $\psi_a \nabla$ <u>représente la transformation des fonctions par la translation</u> a.

En particulier la fonction ψ_o définie par

$$\psi_o(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ + \infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

est <u>élément neutre</u> pour l'inf-convolution.

3.d. EXEMPLE. Notons $\|.\|$ une <u>norme</u> sur l'espace vectoriel X et soit A une partie de X. Pour tout $x \in X$, l'expression $(\psi_A \nabla \|.\|)(x)$ représente la <u>distance de</u> x <u>à l'ensemble</u> A.

3.e. PROPOSITION. Soient $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ et $g \in \bar{\mathbb{R}}^X$; <u>on considère, le épigraphes stricts de ces fonctions</u> (Cf. § 2.e., définition) :

$$F = \{(x,r)\in X \times \mathbb{R} \ : \ f(x) < r\} ,$$

$$G = \{(x,r)\in X \times \mathbb{R} \ : \ g(x) < r\} .$$

<u>L'épigraphe strict de la fonction</u> $f \triangledown g$ <u>est, dans l'espace vectoriel</u> $X \times \mathbb{R}$, l'ensemble somme $F + G$.

<u>Démonstration</u> : Le point (x,r) de $X \times \mathbb{R}$ appartient à l'épigraphe strict de $f \triangledown g$ si, par définition,

$$r > \inf_{u+v = x} [f(u) \dot{+} g(v)] , \tag{3.6}$$

ce qui équivaut à

$$\exists\ u\in X,\ \ \exists\ v\in X,\ \ u+v = x, r > f(u) \dot{+} g(v) ,$$

équivalent, d'après le § 2.b, à

$$\exists\ u\in X,\ \ \exists\ v\in X,\ \ \exists\ a\in\bar{\mathbb{R}},\ \ \exists\ b\in\bar{\mathbb{R}} ,$$

$$u+v = x,\ \ a \dot{+} b = r,\ \ a > f(u),\ \ b > g(v)$$

Comme r est, par hypothèse, fini, $a \dot{+} b = r$ implique $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, donc $a \dot{+} b = a + b$. Bref (3.6) équivaut à l'existence dans l'espace vectoriel $X \times \mathbb{R}$ des éléments $(u,a)\in F$ et $(v,b)\in G$ tels que

$$(x,r) = (u,a) + (v,b) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

La réduction de l'inf-convolution à une addition d'ensembles, que réalise cette proposition 3.e., n'est pas un moyen d'étude aussi puissant qu'on pourrait le croire; bien des propriétés topologiques des fonctions sont en effet difficiles à traduire en propriétés des épigraphes stricts.

3.f. On a signalé au § 2.e. qu'une fonction $f\in\bar{\mathbb{R}}^X$ est convexe si et seulement si son épigraphe strict est une partie convexe de $X \times \mathbb{R}$; la proposition 3.e. donne alors, puisque la somme des deux convexes est convexe :

PROPOSITION.- <u>Si</u> $f\in\bar{\mathbb{R}}^X$ <u>et</u> $g\in\bar{\mathbb{R}}^X$ <u>sont convexes, il en est de même de la fonction</u> $f \triangledown g$.

Notons par ailleurs que, dans l'espace vectoriel $X \times \mathbb{R}$, une homothétie de centre $(0,0)$, de rapport $\lambda\in]0,+\infty[$, transforme l'épigraphe strict de f, c'est à-dire l'ensemble

$$F = \{(x,r)\in X \times \mathbb{R} \ : \ f(x) < r\}$$

en l'ensemble

$$\lambda F = \{(x',r')\in X \times \mathbb{R} \ : \ x' = \lambda x, r' = \lambda r,\ \ f(x) < r\}$$
$$= \{(x',r')\in X \times \mathbb{R} \ : \ \lambda f\ (\tfrac{1}{\lambda}\, x') < r'\} .$$

C'est là l'épigraphe strict de la fonction

$$x \mapsto \lambda f\left(\frac{1}{\lambda} x\right),$$

laquelle sera notée $f\lambda$ (Notation de ROCKAFELLAR [9] ; dans MOREAU [7], [8], cette fonction était notée $f^{(\lambda)}$).

Bref, l'ensemble des parties de $X \times \mathbb{R}$ qui sont des épigraphes stricts de fonctions convexes est stable pour l'addition et pour les homothéties strictement positives de centre $(0,\mathbb{O})$. On sait que, plus généralement, l'ensemble des parties convexes d'un espace vectoriel est, par ces deux opérations, muni d'une structure de cône convexe. Passant aux fonctions dont on a considéré les épigraphes on obtient donc :

Par la loi de composition interne $(f,g) \mapsto f \nabla g$ et la loi externe $(\lambda,f) \to f\lambda$, l'ensemble des fonctions convexes sur X est muni d'une structure de cône convexe qu'on notera $(\mathrm{Conv}\ X,\nabla)$.

REMARQUE 1.- Cet énoncé implique en particulier que pour tous $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda$ dans $]0,+\infty[$, on a, si f est une fonction convexe,

$$(f\lambda_1) \nabla (f\lambda_2) \nabla \ldots \nabla (f\lambda_n) = f(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$$

et, notamment,

$$\underbrace{f \nabla f \nabla \ldots \nabla f}_{n \text{ fois}} = fn$$

REMARQUE 2.- Soient α et α' dans $]0,1[$, avec $\alpha + \alpha' = 1$. Soient f et $f' \in \overline{\mathbb{R}}^X$; la définition de l'inf-convolution implique, pour tout $x \in X$,

$$(f\alpha \nabla f'\alpha')(x) = \inf_{u+u'=x} \left[\alpha f\left(\frac{1}{\alpha} u\right) \dot{+} \alpha' f'\left(\frac{1}{\alpha'} u'\right)\right]$$

$$\leq \alpha f(x) \dot{+} \alpha' f'(x)$$

(car pour $u = \alpha x$ et $u' = \alpha' x$, on a bien $u + u' = x$). Bref

(3.7) $$(f\alpha)\nabla(f'\alpha') \leq \alpha f \dot{+} \alpha' f' .$$

Cela peut s'exprimer en disant que l'application canonique du cône convexe $(\mathrm{Conv}\ X,\nabla)$ dans le cône convexe ordonné $(\mathrm{Conv}\ X,\dot{+})$ (Cf. § 2.g.) est convexe.

3.g. PROPOSITION.- L'inf-convolution ∇ est, dans l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}^X$, une loi de composition isotone, c'est-à-dire que, quelle que soit la fonction g, on a l'implication

(3.8) $$f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1 \nabla g \leq f_2 \nabla g$$

et, plus généralement, si (f_i), $i \in I$, et (g_j), $j \in J$, sont deux familles quelconques de fonctions, on a

$$\inf_{(i,j)\in I\times J} (f_i \nabla g_j) = (\inf_{i\in I} f_i) \nabla (\inf_{j\in J} g_j) .$$

Vérification facile, en utilisant l'égalité (2.3).

3.h. PROPOSITION.- On suppose que l'espace vectoriel X est muni d'un préordre noté $\prec$, compatible avec la structure d'espace vectoriel, de sorte que l'ensemble

$$P = \{x \in X \,:\, 0 \prec x\}$$

est une partie conique convexe (de sommet 0 inclus) de X. Une fonction $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est décroissante pour le préordre $\prec$ si et seulement si

$$f \triangledown \psi_P = f \,, \tag{3.9}$$

ce qui équivaut d'ailleurs à

$$f \triangledown \psi_P \geqq f \,. \tag{3.10}$$

En effet

$$(f \triangledown \psi_P)(x) = \inf_{v \in X} [f(x-v) \dot{+} \psi_P(v)]$$

et la quantité entre crochets vaut $+\infty$ si $v \notin P$; donc

$$(f \triangledown \psi_P)(x) = \inf_{v \in P} f(x-v) = \inf_{u \prec x} f(u)$$

Par définition la fonction f est décroissante pour le préordre $\prec$ si et seulement si

$$u \prec x \Rightarrow f(u) \geqq f(x)$$

d'où la condition (3.9).

On a en outre, puisque $0 \in P$,

$$\psi_0 \geqq \psi_P$$

(Cf. § 3.c.) donc, d'après (3.8), pour toute fonction f,

$$f = f \triangledown \psi_0 \geqq f \triangledown \psi_P$$

d'où l'équivalence de (3.9) et (3.10).

REMARQUE.- Si f vérifie la condition (3.9), il en est de même de $f \triangledown g$, quelle que soit $g \in \bar{\mathbb{R}}^X$, car alors

$$(f \triangledown g) \triangledown \psi_P = (f \triangledown \psi_P) \triangledown g = f \triangledown g \,.$$

En outre, P étant un cône convexe, on voit immédiatement que, pour tout $\lambda \in \,]0, +\infty[$,

$$\psi_P \lambda = \psi_P .$$

Si donc f vérifie (3.9), il en est de même de $f\lambda$, car alors

$$(f\lambda) \triangledown \psi_P = (f\lambda) \triangledown (\psi_P \lambda) = (f \triangledown \psi_P)\lambda = f\lambda$$

Il résulte de là que l'ensemble des fonctions convexes qui sont décroissantes pour le préordre $\prec$ est un sous-cône convexe de (Conv X, ∇). (Cf. § 3.f.).

C'est évidemment aussi un sous-cône convexe de (Conv X, $\dot{+}$). (Cf. § 2.g.).

3.k. A côté de cette considération d'un préordre sur l'espace vectoriel X, le § 6.i. nous conduira à envisager une autre situation qui fait également intervenir une partie conique convexe de l'espace :

Soit Q une partie conique convexe de X (de sommet 0, non nécessairement inclus). L'ensemble des $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ telles que (Cf. § 3.b.)

$$\operatorname{dom} f \subset Q$$

(c'est-à-dire l'ensemble des fonctions qui prennent la valeur $+\infty$ dans tout le complémentaire de Q) est stable par inf-convolution puisque si $\operatorname{dom} g \subset Q$, on a par (3.4),

$$\operatorname{dom} (f \nabla g) = \operatorname{dom} f + \operatorname{dom} g \subset Q + Q = Q .$$

En outre, si $\lambda \in]0, +\infty[$, on a

$$\operatorname{dom} (f\lambda) = \lambda \operatorname{dom} f \subset Q = Q$$

Il résulte de là que l'ensemble des fonctions convexes qui prennent la valeur $+\infty$ partout hors de Q est un sous-cône convexe de (Conv X, ∇).

C'est évidemment aussi un sous-cône convexe de (Conv X, $\dot{+}$).

4. SEMI-CONTINUITES

4.a. Dans ce paragraphe, X peut être un espace topologique quelconque. On sait qu'une fonction $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est <u>semi-continue inférieurement</u> (en abrégé s.c.i.) si et seulement si, pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'ensemble «section» de f:

$$f^{\leqq}(r) = \{x \in X : f(x) \leqq r\}$$

est fermé dans X (trivialement en ce cas $f^{\leqq}(+\infty) = X$ et $f^{\leqq}(-\infty) = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} f^{\leqq}(r)$ sont eux-mêmes fermés). La fonction f est <u>semi-continue supérieurement</u> (en abrégé s.c.s.) si et seulement si, pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$f^{<}(r) = \{x \in X : f(x) < r\}$$

est ouvert dans X.

Par exemple une partie A de X est fermée (resp. ouverte) si et seulement si sa fonction indicatrice ψ_A est s.c.i. (resp. s.c.s.). De cela on peut rapprocher :

PROPOSITION.- <u>Une fonction</u> $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ <u>est s.c.i. si et seulement si son épigraphe</u>

$$F = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leqq r\} .$$

<u>est fermé dans l'espace topologique</u> $X \times \mathbb{R}$.

En effet, la fonction f est s.c.i. sur X si et seulement si la fonction

$$\phi(x,r) = f(x) - r$$

est s.c.i. sur $X \times \mathbb{R}$. Or les ensembles sections $\phi^{\leqq}(k)$, $k \in \mathbb{R}$, sont tous déduits de F par des translations selon $\mathbb{R}$ dans l'espace produit $X \times \mathbb{R}$.

En transmuant par symétrie on trouve :

COROLLAIRE.- <u>Une fonction</u> $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ <u>est s.c.s. si et seulement si son épigraphe strict</u>

$$\{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) < r\}$$

<u>est ouvert dans l'espace topologique</u> $X \times \mathbb{R}$.

4.b. Il est classique d'interpréter la semi-continuité inférieure (resp. supérieure) d'une application f d'un espace topologique X dans $\bar{\mathbb{R}}$ comme une continuité proprement dite, en munissant $\bar{\mathbb{R}}$ d'une topologie (non séparée) convenable :

NOTATION.- <u>On notera</u> $\bar{\mathbb{R}}_{\inf}$ <u>l'espace topologique construit en munissant l'ensemble</u> $[-\infty,+\infty]$ <u>de la topologie dont les ouverts sont, outre la partie vide et la partie pleine, les intervalles de la forme</u> $]k,+\infty]$, <u>avec</u> $k \in [-\infty,+\infty[$. <u>On notera</u> $\bar{\mathbb{R}}_{\sup}$ <u>l'image homéomorphe du précédent par la symétrie</u> $r \mapsto -r$.

Une fonction définie sur un espace topologique X, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, est s.c.i. (resp. s.c.s.) si et seulement si c'est une application continue de X dans $\bar{\mathbb{R}}_{inf}$ (resp. dans $\bar{\mathbb{R}}_{sup}$).

De la propriété d'«isotonie forte» formulée au § 2.b. on tire:

<u>L'application</u> $(x,y) \mapsto x \dot{+} y$ <u>est continue de l'espace topologique</u> $\bar{\mathbb{R}}_{inf} \times \bar{\mathbb{R}}_{inf}$ <u>dans l'espace topologique</u> $\bar{\mathbb{R}}_{inf}$.

Mais on touche une petite difficulté de la théorie en remarquant que:

<u>L'application</u> $(x,y) \mapsto x \dot{+} y$ <u>n'est pas continue pour ces mêmes topologies aux points</u> $(-\infty, +\infty)$ <u>et</u> $(+\infty, -\infty)$ <u>de l'espace</u> $\bar{\mathbb{R}}_{inf} \times \bar{\mathbb{R}}_{inf}$.

Donc, si f et g sont deux fonctions s.c.i. sur l'espace topologique X, la fonction $f \underset{\cdot}{+} g$ est aussi s.c.i., mais non, en général, la fonction $f \dot{+} g$, à moins que les fonctions prennent des valeurs telles que $\dot{+}$ équivalle à $\underset{\cdot}{+}$: par exemple, si f et g sont s.c.i. et prennent leurs valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, la somme classique $f + g$ (équivalente alors à $f \dot{+} g$ et à $f \underset{\cdot}{+} g$) est aussi s.c.i.

4.c. PROPOSITION.- <u>Soit</u> X <u>un espace vectoriel topologique (sur le corps</u> $\mathbb{R}$ <u>) et soit</u> $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ <u>s.c.s. ; alors, quel que soit</u> $g \in \bar{\mathbb{R}}^X$, <u>la fonction</u> $f \nabla g$ <u>est s.c.s.</u>.

En effet, alors pour chaque $u \in X$, la fonction, translatée de f,

$$x \mapsto f(x-u)$$

est s.c.s., donc aussi, d'après le § 4.b., la fonction

$$x \mapsto f(x-u) \dot{+} g(u) .$$

Par suite $f \nabla g$ est s.c.s. comme enveloppe inférieure d'une famille de fonctions s.c.s..

<u>Autre raisonnement</u> : d'après le § 4.a., l'épigraphe strict F de f est ouvert dans $X \times \mathbb{R}$, donc aussi l'ensemble somme $F + G$ (G : épigraphe strict de g) qui est l'épigraphe strict de $f \nabla g$.

4.d. La recherche de conditions assurant la semi-continuité <u>inférieure</u> de $f \nabla g$ va nous amener à introduire la notion suivante :

DÉFINITION.- (MOREAU [7], [8]) Soit X <u>un espace topologique quelconque ; on dit qu'une fonction</u> $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ <u>est inf-compacte si, pour tout</u> $r \in \mathbb{R}$, <u>l'ensemble</u>

$$f^{\leqq}(r) = \{x \in X : f(x) \leq r\}$$

<u>est compact</u> (éventuellement vide).

Evidemment en ce cas

$$f^{\leqq}(-\infty) = \bigcap_{r\in\mathbb{R}} f^{\leqq}(r)$$

est aussi compact.

Les propriétés suivantes sont quasi-immédiates :

<u>Si l'espace topologique</u> X <u>est séparé, toute fonction inf-compacte est s.c.i.</u>

<u>Une fonction inf-compacte admet un minimum ; par suite, si elle ne prend nulle part la valeur</u> $-\infty$, <u>elle est bornée inférieurement</u>.

<u>Toute fonction s.c.i. minorée par une fonction inf-compacte est inf-compacte</u>.

<u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont deux fonctions à valeurs dans</u> $]-\infty,+\infty]$, <u>l'une inf-compacte et l'autre s.c.i. bornée inférieurement, la fonction</u> $f+g$ <u>est inf-compacte</u>.

<u>L'enveloppe supérieure d'une famille quelconque (resp. l'enveloppe inférieure d'une famille finie) de fonctions inf-compactes est inf-compacte</u>.

Des propriétés des fonctions inf-compactes sur un espace vectoriel topologique apparaîtront dans les sections suivantes, en liaison avec la théorie de la dualité.

4.e. La propriété facile que voici peut être considérée comme classique :

LEMME.- <u>Soit</u> X <u>un espace topologique quelconque</u>, U <u>un espace compact et</u> $(x,u) \mapsto \phi(x,u)$ <u>une fonction à valeurs dans</u> $\mathbb{R}$, <u>s.c.i. sur l'espace produit</u> $X \times U$. Alors la fonction

$$x \mapsto \min_{u\in U} \phi(x,u)$$

<u>est s.c.i. sur l'espace</u> X.

On va en déduire (MOREAU [7],[8]) :

PROPOSITION.- <u>Soient définies sur un espace vectoriel topologique</u> X <u>deux fonctions</u> f <u>et</u> g <u>à valeurs dans</u> $]-\infty,+\infty]$, <u>la première inf-compacte, la seconde s.c.i. et bornée inférieurement. Alors la fonction</u> $f \nabla g$ <u>est s.c.i. et bornée inférieurement ; en outre cette inf-convolution est exacte c'est-à-dire que l'inf de sa définition est un minimum</u>.

En effet $\dot{+}$ équivaut ici à $+$:

$$(f \nabla g)(x) = \inf_{u\in X} [f(u) + g(x-u)] \tag{4.1}$$

L'expression entre crochets est fonction inf-compacte de u, d'après le § 4.d., donc l'inf est un minimum. En outre $f \nabla g$ est bornée inférieurement puisque f et g le sont.

Montrons que $f \nabla g = h$ est s.c.i. en un point $x_o \in X$. Soit $a < h(x_o)$; il faut montrer l'existence d'un voisinage V de x_o dans X tel que

$$x \in V \Rightarrow h(x) \geqq a \quad (4.2)$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ un minorant de g ; l'ensemble

$$U = \{u \in X : f(u) \leq a - \beta\}$$

est compact d'après l'hypothèse. (4.1) s'écrit

$$h(x) = \inf \{h_1(x) , h_2(x)\} \quad (4.3)$$

avec

$$h_1(x) = \inf_{u \notin U} [f(u) + g(x-u)] > a$$

et

$$h_2(x) = \inf_{u \in U} [f(u) + g(x-u)]$$

La fonction $(x,u) \mapsto f(u) + g(x-u)$ est s.c.i. sur l'espace $X \times U$. D'après le lemme, la fonction h_2 est donc s.c.i. sur l'espace X ; d'après (4.3) on a $a < h_2(x_o)$ d'où l'existence de V, voisinage de x_o dans X, sur lequel $h_2 \geqq a$, ce qui donne bien (4.2).

EXEMPLE. Si A est une partie <u>compacte</u> de X et B une partie <u>fermée</u>, les fonctions indicatrices ψ_A et ψ_B satisfont les hypothèses de l'énoncé : on en conclut que $\psi_A \nabla \psi_B = \psi_{A+B}$ est s.c.i., c'est-à-dire que l'ensemble $A + B$ est fermé, résultat bien connu.

4.f. PROPOSITION.- <u>Si l'espace vectoriel topologique</u> X <u>est séparé, l'ensemble des fondions inf-compactes à valeurs dans</u> $]-\infty , +\infty]$ <u>est stable pour l'inf-convolution.</u>

En effet, si X est séparé, deux fonctions f et g, inf-compactes à valeurs dans $]-\infty , +\infty]$ sont s.c.i. et elles admettent respectivement des minorants α et β dans $\mathbb{R}$. D'après la proposition 4.e. la fonction $h = f \nabla g$ est s.c.i. et l'inf-convolution est exacte. Pour montrer que l'ensemble fermé

$$h^{\leqq}(r) = \{x \in X : (f \nabla g)(x) \leq r\}$$

$r \in \mathbb{R}$, est compact, on remarque que, si $x \in h^{\leqq}(r)$, il existe u et v dans X tels que

$$u + v = x$$

$$f(u) + g(u) \leq r ,$$

ce qui entraîne

$$f(u) \leq r - \beta$$

$$g(u) \leq r - \alpha .$$

On a donc l'inclusion

$$\overset{\leq}{h}(r) \subset \overset{\leq}{f}(r - \beta) + \overset{\leq}{g}(r - \alpha)$$

où le second membre est un ensemble compact, puisque somme de deux compacts.

5. CONVEXITÉ SUR UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE

5.a. Soit X un espace vectoriel topologique sur le corps R. Une propriété classique (Cf. BOURBAKI [1], Chap. II, § 5, n° 2) peut se formuler dans le contexte présent, de la façon suivante :

Soit une fonction $f \in \bar{R}^X$, convexe sur X. S'il existe un ouvert dans X sur lequel f est majorée, alors f est continue sur l'intérieur (visiblement non vide) de l'ensemble

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) < +\infty\} .$$

Tel est le cas, en particulier, s'il existe un point $x_o \in X$ en lequel f est s.c.s., avec $f(x_o) < +\infty$ (Noter qu'à la différence de Bourbaki, nous n'excluons pas la valeur $-\infty$ pour f).

Rappelons qu'un point a d'un ensemble convexe C est dit point interne de C si toute droite passant par a rencontre C selon un segment auquel a est intérieur : c'est là un concept indépendant de la topologie. On voit alors (par une homothétie) que si C possède un point intérieur pour une certaine topologie d'e.v.t. sur l'espace X, tout point interne de C est aussi intérieur (et réciproquement, bien sûr) : l'intérieur de C, s'il n'est pas vide est égal à l'ensemble des points internes ou «intérieur algébrique» de cet ensemble convexe. Autrement dit, les topologies d'e.v.t. sur X se rangent en deux classes au plus : celles pour lesquelles l'intérieur de C est vide et celles pour lesquelles cet intérieur est égal à l'intérieur algébrique. Revenant alors à une fonction $f \in \bar{R}^X$, convexe, on voit que les topologies d'e.v.t. sur X se rangent en deux classes au plus : celles pour lexquelles f n'est continue en aucun point de $\operatorname{dom} f$ et celles pour lesquelles l'ensemble des points de $\operatorname{dom} f$ où f est continue, est égal à l'intérieur algébrique de $\operatorname{dom} f$.

5.b. On n'accordera pas, dans les sections suivantes, d'attention spéciale aux espaces de dimension finie ; nous renvoyons principalement pour ce cas à ROCKAFELLAR [17]. Le lecteur tirera des résultats ultérieurs les corollaires intéressant les espaces de dimension finie en se rappelant les faits fondamentaux suivants :

La topologie (localement convexe) canonique d'un espace vectoriel de dimension finie sur le corps R possède pratiquement toutes les particularités usuelles : c'est une topologie d'espace hilbertien, donc d'espace de Banach réflexif, donc d'espace tonnelé, etc... Pour la dualité canonique d'un tel espace, la topologie en question est aussi bien topologie faible que topologie de Mackey ou que topologie forte (Cf. section 7).

De la proposition de tout à l'heure on tire en outre (Cf. BOURBAKI, *ibid.*) :

Si X *est un espace vectoriel de dimension finie, toute fonction* $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ *convexe est continue sur l'intérieur de* dom f.

Cet intérieur peut être vide. Mais il est spécialement intéressant, en dimension finie, d'étudier un ensemble convexe tel que dom f *par rapport à la topologie de la plus petite variété linéaire le contenant.* On démontre (Cf., par exemple, EGGLESTON [1], VALENTINE [1]) *que tout convexe non vide d'un espace de dimension finie possède pour la topologie précédente un intérieur (dit intérieur relatif) non vide.*

5.c. NOTATION. *Si* X *est un espace vectoriel topologique, on notera* $\Gamma(X)$ *l'ensemble des* $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ *qui sont enveloppes supérieures de familles de fonctions affines continues ; on notera* $\Gamma_o(X)$ *l'ensemble des* $f \in \Gamma(X)$ *autres que les deux constantes* $\omega_X = +\infty$ *et* $-\omega_X = -\infty$ (*enveloppe supérieure d'une famille vide*).

L'ensemble $\Gamma(X)$ est stable pour l'addition inférieure $\dotplus$ car si (m_i), $i \in I$, et (n_j), $j \in J$, sont deux familles (éventuellement vides) de fonctions affines continues, on a, d'après l'égalité (2.3) (transmuée par symétrie),

$$\sup_{i \in I} r_i \dotplus \sup_{j \in J} n_j = \sup_{(i,j) \in I \times J} (m_i \dotplus n_j) \, .$$

Or $m_i \dotplus n_j = m_i + n_j$ est une fonction affine continue.

Visiblement aussi, l'ensemble $\Gamma(X)$ est stable pour la multiplication par toute constante $\lambda \in]0,+\infty[$, ce qui en fait un sous-cône convexe de $(\bar{\mathbb{R}}^X, \dotplus)$. Dans la section 9 on définira une autre structure de cône convexe sur $\Gamma(X)$.

Soit (f_i) une famille de fonctions appartenant à $\Gamma(X)$. Chacune d'elles étant l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues, l'enveloppe $\sup f_i$ appartient elle-même à $\Gamma(X)$ car elle est l'enveloppe supérieure de la collection de toutes ces fonctions affines continues. Il en résulte que, dans l'ensemble $\Gamma(X)$, ordonné par l'ordre habituel de $\bar{\mathbb{R}}^X$, toute partie Φ possède un plus petit majorant $\vee \Phi$ et un plus grand minorant $\wedge \Phi$: l'élément $\vee \Phi$ est tout simplement l'enveloppe supérieure, c'est-à-dire le sup de Φ dans $\bar{\mathbb{R}}^X$; l'élément $\wedge \Phi$ est l'enveloppe supérieure des $f \in \Gamma(X)$ qui minorent Φ : c'est une fonction généralement plus petite que l'inf de Φ dans $\bar{\mathbb{R}}^X$.

Pour toute fonction $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$, on sera amené, dans la section 6, à noter h^{**}

la plus grande fonction de $\Gamma(X)$ minorant h ; on l'appelera la Γ-régularisée de h ; on peut la construire comme l'enveloppe supérieure des fonctions affines continues minorant h.

5.d. Tout élément de $\Gamma(X)$ est évidemment une fonction convexe et s.c.i. puisqu'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions convexes (car affines) et s.c.i. (car continues) ; en outre, à l'exception de la constante-ω_X, les éléments de $\Gamma(X)$ sont des fonctions à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$.

Si X est localement convexe, on a, réciproquement (MOREAU [2]) :

PROPOSITION. Si X est un e.v.t. localement convexe, toute fonction f, à valeurs dans $]-\infty; +\infty]$, convexe et s.c.i. appartient à $\Gamma(X)$.

Démonstration : Constatons que, sous les hypothèses faites, f possède au moins une minorante affine continue. En effet, laissant de côté le cas trivial où f est la constante $\omega_X = +\infty$, considérons $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) < +\infty$ et choisissons un réel $r_0 < f(x_0)$. Dans l'espace vectoriel topologique produit $X \times \mathbb{R}$, qui est localement convexe, l'épigraphe

$$F = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$$

est un ensemble convexe fermé non vide (Cf. §§ 2.e. et 4.a) auquel le point (x_0, r_0) n'appartient pas. Il existe donc un hyperplan fermé séparant ce point de l'ensemble F ; cet hyperplan, visiblement «non vertical», est le graphe d'une fonction affine continue minorant f.

Ceci dit, l'enveloppe supérieure f^{**} des minorantes affines continues de f est un élément de $\Gamma(X)$ minorant f. Afin d'établir que $f = f^{**}$ on va montrer que, pour tout $x_1 \in X$ et tout réel $r_1 < f(x_1)$, on a $r_1 < f^{**}(x_1)$, c'est-à-dire qu'il existe une minorante affine continue de f prenant au point x_1 une valeur $> r_1$. C'est précisément ce que montre le raisonnement précédent s'il existe, dans l'espace localement convexe $X \times \mathbb{R}$, un hyperplan fermé «non vertical» séparant strictement le point (x_1, r_1) de l'ensemble F. A défaut d'un tel hyperplan, cette séparation stricte serait du moins assurée par un hyperplan «vertical» de la forme $P \times \mathbb{R}$ où P est un hyperplan fermé de X. Soit p une fonction affine continue sur X, s'annulant sur P et telle que $p(x_1) > 0$; dans le demi-espace $p \geqq 0$, on a $f = +\infty$. Soit q une des minorantes affines continues de f dont on a précédemment montré l'existence. Pour tout $\lambda \geqq 0$ la fonction affine continue $q + \lambda p$ est encore une minorante de f : on pourra choisir λ assez grand pour qu'elle prenne au point x_1 une valeur $> r_1$.

Exemple : Si X est localement convexe, une partie C de X est convexe fermée si et seulement si sa fonction indicatrice ψ_C appartient à $\Gamma(X)$.

Si A est une partie quelconque de X, la fonction ψ_A a pour Γ-régularisée la fonction indicatrice ψ_C de l'enveloppe convexe fermée C de A. En effet $A \subset C$ implique $\psi_A \geqq \psi_C$; comme $\psi_C \in \Gamma(X)$ il reste à prouver que toute fonction affine continue m minorant ψ_A minore ψ_C. De fait le demi-espace fermé $m \leqq 0$ contient A, donc contient C, ce qui donne $m \leqq \psi_C$.

5.e. PROPOSITION. Supposant encore X localement convexe, soit $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ convexe et possédant une minorante appartenant à $\Gamma_o(X)$ (par exemple une minorante affine continue). Alors la Γ-régularisée h^{**} de h est égale à sa régularisée s.c.i. $\hat{h}$:

$$\hat{h}(x) = \liminf_{u \to x} h(u) . \tag{5.1}$$

En effet la fonction $\hat{h}$ est convexe (son épigraphe est, dans $X \times \mathbb{R}$, l'adhérence de l'épigraphe de h). Elle est la plus grande fonction s.c.i. minorant h, donc plus grande que la minorante impliquée dans l'énoncé. Par conséquent $\hat{h}$ prend ses valeurs dans $]-\infty, +\infty]$: la proposition 5.d. montre que $\hat{h} \in \Gamma(X)$. Donc $\hat{h}$ est bien le plus grand élément de $\Gamma(X)$ minorant h.

REMARQUE 1. Si h prend quelque part la valeur $-\infty$, sa Γ-régularisée est la constante $-\omega_X = -\infty$; la fonction $\hat{h}$ n'est pas nécessairement cette constante.

REMARQUE 2. Si l'espace X est de dimension finie on peut montrer que toute fonction h, convexe à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, admet des minorantes affines de sorte que $h^{**} = \hat{h}$.

Par contre, en dimension infinie, on a le contre-exemple suivant : soit C un convexe fermé d'intérieur non vide et soit φ une forme linéaire non continue. La fonction

$$h = \varphi + \psi_C$$

est convexe, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. Sur tout ouvert $\omega \subset C$ la fonction φ prend des valeurs négatives arbitraires, donc h n'admet pas de minorante affine continue, ce qui implique $h^{**} = -\omega_X$. Par contre la régularisée s.c.i. de h est

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

REMARQUE 3. Pour tout $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ on peut aussi considérer

$$\liminf_{\substack{u \to x \\ u \neq x}} h(u) = \sup \{\inf h(V \setminus x) : V \text{ voisinage de } x\}.$$

Visiblement :

$$(5.2)\qquad \liminf_{u \to x} h(u) = \min \{h(x) \, , \liminf_{\substack{u \to x \\ u \neq x}} h(u)\} \, .$$

On remarque alors (Cf., dans un contexte assez différent, BROENDSTED [1]) :

Si $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est convexe et si dom h contient plus d'un point, on a, pour tout $x \in X$,

$$(5.3)\qquad \liminf_{\substack{u \to x \\ u \neq x}} h(u) \leq h(x) \, .$$

En effet, cette inégalité étant triviale si $h(x) = +\infty$, supposons $x \in \text{dom } h$. Soit x' distinct de x dans dom h. Si $h(x') = -\infty$, la fonction prend la valeur $-\infty$ sur tout le segment $]x, x']$ (Cf. § 2.f) de sorte que, dans ce cas, (5.3 est encore triviale, le premier membre valant $-\infty$. De même si $h(x) = -\infty$. Si enfin $h(x)$ et $h(x')$ sont finis, on écrit, pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$(5.4)\qquad h\,[(1 - \lambda)\, x + \lambda\, x'] \leq (1 - \lambda)\, h(x) + \lambda\, h(x') \, .$$

L'inégalité (5.3) en résulte puisque tout voisinage V de x contient des points de la forme $(1 - \lambda)\, x + \lambda\, x'$, avec λ arbitrairement voisin de 0, ce qui donne une valeur arbitrairement voisine de $h(x)$ au second membre de (5.4).

En rapprochant (5.2) et (5.3), on voit que (5.1) peut aussi bien s'écrire :

$$\hat{h}(x) = \liminf_{\substack{u \to x \\ u \neq x}} h(u)$$

5.f. Terminons cette section par un résultat de ROCKAFELLAR [9] :

PROPOSITION. Si l'espace X est tonnelé, une fonction $f \in \Gamma(X)$ est continue en tout point interne de dom f.

En effet, pour simplifier l'écriture, supposons faite une translation amenant ce point interne à l'origine 0 de X. Le cas $f = \omega_X$ étant trivial, on suppose $f(0) \in \mathbb{R}$. Soit un réel $k > f(0)$; l'ensemble

$$C = \{x \in X : f(x) \leq k\} \subset \text{dom } f$$

est convexe fermé. En outre il est absorbant ; en effet, 0 étant point interne de dom f , la restriction de f a chaque droite passant par 0 est une fonction convexe, finie au voisinage de 0 dans cet espace de dimension 1, donc continue en 0, de sorte que 0 est point interne de C. Par suite l'ensemble $C \cap -C$ est un tonneau dans X, donc un voisinage de 0, sur lequel f est majorée par k : d'après le § 5.a., cela montre la continuité de f en 0.

REMARQUE. On voit que si X est tonnelé et si $f \in \Gamma(X)$, tout point <u>interne</u> de dom f est intérieur (et réciproquement bien sûr). En particulier, dans un espace tonnelé, l'intérieur d'un ensemble convexe fermé coïncide avec l'ensemble des points internes de cet ensemble (ou «intérieur algébrique»).

6. FONCTION POLAIRE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

6.a. Dans toute la suite on note X et Y un couple d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$, mis en dualité par une forme bilinéaire $<.,.>$; selon la terminologie de BOURBAKI [1], cela signifie que les axiomes de séparation suivants sont vérifiés

- pour tout x non nul dans X, il existe $y \in Y$ tel que $< x,y > \neq 0$,
- pour tout y non nul dans Y, il existe $x \in X$ tel que $< x,y > \neq 0$,

Certains des résultats ultérieurs seront d'ailleurs valables sans ces hypothèses de séparation.

Une topologie localement convexe sur X (resp. sur Y) est dite compatible avec la dualité si, pour cette topologie, l'ensemble des formes linéaires continues est constitué par les fonctions $x \mapsto < x,y >$, $y \in Y$ (resp. les fonctions $y \mapsto < x,y >$, $x \in X$). Les axiomes de séparation ci-dessus impliquent, d'une part, qu'une telle topologie est séparée, d'autre part que chaque forme linéaire continue est représentable de la sorte d'une seule manière.

L'exemple le plus usuel d'espaces vectoriels en dualité est obtenu en prenant pour X un espace vectoriel muni *a priori* d'une topologie localement convexe séparée et pour Y son dual topologique.

D'une manière générale, la topologie faible sur X, notée $\sigma(X,Y)$ (topologie de la convergence simple si X est interprété comme ensemble de fonctions numériques sur Y), est la moins fine des topologie (localement convexes) sur X qui sont compatibles avec la dualité. La topologie de Mackey sur X, notée $\tau(X,Y)$ (topologie de la convergence uniforme dans les parties de Y qui sont convexes et compactes pour $\sigma(Y,X)$), est la plus fine.

Rappelons aussi que les parties bornées de X (resp. Y) sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la dualité. A la dualité entre X et Y on rattachera donc encore la topologie forte, par exemple sur X, notée $\beta(X,Y)$: c'est la topologie (localement convexe, séparée) de la convergence uniforme dans les parties bornées de Y. Visiblement $\beta(X,Y)$ est plus fine que la topologie de Mackey $\tau(X,Y)$; elle est donc compatible avec la dualité seulement si elle coïncide avec $\tau(X,Y)$. Le cas réflexif est celui où on a simultanément

$$\beta(X,Y) = \tau(X,Y) \quad \text{et} \quad \beta(Y,X) = \tau(Y,X) .$$

6.b. Les fonctions affines continues, par exemple sur X, s'écrivent sous la forme

(6.1) $$x \mapsto \langle x, y \rangle - r \ ,$$

avec $y \in Y$ et $r \in \mathbb{R}$ (on dira que y est la pente de la fonction affine) : ces fonctions sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la dualité. Par suite (Cf. § 5.c.) l'ensemble fonctionnel $\Gamma(X)$ (resp. $\Gamma(Y)$) est le même pour toutes ces topologies : on peut dire qu'il s'agit là d'une notion «duologique» plutôt que topologique.

Soit $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$; la fonction affine continue écrite en (6.1) est une minorante de h si et seulement si

(6.2) $$r \geq \sup_{x \in X} [\langle x, y \rangle - h(x)] \ .$$

Cela conduit à s'intéresser à la fonction définie sur l'espace Y par le second membre de (6.2) :

DÉFINITION. Pour toute fonction $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$, on appelle fonction polaire de h, la fonction notée h^*, définie pour tout $y \in Y$ par

(6.3) $$h^*(y) = \sup_{x \in X} [\langle x, y \rangle - h(x)] \ .$$

D'après (6.2), h possède des minorantes affines continues si la fonction h^* n'est pas la constante $\omega_Y = +\infty$ (cette dernière éventualité survient, notamment, si h prend la valeur $-\infty$ quelque part dans X).

h^* prend quelque part la valeur $-\infty$ si et seulement si h est la constante $\omega_X = +\infty$; alors h^* est la constante $-\omega_Y = -\infty$.

Pour la construction du sup dans (6.3), on peut évidemment négliger les valeurs de $x \in X$ telles que $h(x) = +\infty$; la fonction h^* est donc une enveloppe supérieure de fonctions affines continues sur Y : elle appartient à $\Gamma(Y)$.

6.c. EXEMPLE. Soit A une partie quelconque de X ; prenons pour h la fonction indicatrice ψ_A ; alors (6.3) se réduit à

$$\psi_A^*(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle \ .$$

La fonction ψ_A^* est connue sous le nom, assez impropre, de fonction d'appui de l'ensemble A. C'est une fonction convexe et s.c.i. (puisqu'appartenant à $\Gamma(Y)$), positivement homogène. Un demi-espace fermé dans X

$$\{x \in X \ : \ \langle x, y \rangle - r \leq 0\}$$

(avec $y \neq 0$) contient l'ensemble A si et seulement si la fonction affine $< \cdot, y > - r$ minore ψ_A, c'est-à-dire, d'après (6.2),

$$(6.4) \qquad r \geqq \psi_A^*(y)$$

L'égalité dans (6.4) signifie que le demi-espace en question est <u>minimal</u> dans l'ensemble, ordonné par l'inclusion $\subset$, des demi-espaces fermés contenant A : cela n'implique nullement que l'hyperplan frontière de ce demi-espace soit un <u>hyperplan d'appui</u> (Cf. § 13.b.) de l'ensemble A c'est-à-dire contienne un point de cet ensemble (noter, toutefois, le cas où A est un ensemble compact pour une des topologies compatibles avec la dualité).

Remarquer d'ailleurs que

$$\{y \in Y : \psi_A^*(y) \leqq 1\} = \{y \in Y : < x,y > \leqq 1 , \forall x \in A\}$$

est <u>l'ensemble polaire</u> A^o de A. Cependant ψ_A^* n'est pas en général la <u>jauge</u> de A^o (Cf. § 2.i) car ce n'est pas nécessairement une fonction $\geqq 0$. D'après (2.8), cette jauge s'écrit

$$(6.5) \qquad j(y) = \inf \{k \in]0 , +\infty[\ : \ \psi_A^* (\tfrac{1}{k} y) \leqq 1\}$$

$$= \inf \{k \in]0 , +\infty[\ : \ \psi_A^* (y) \leqq k\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \psi_A^*(y) \leqq 0 \\ \psi_A^*(y) & \text{si} \quad \psi_A^*(y) \geqq 0 \end{cases}$$

$$= \max \{ \psi_A^*(y) , 0\}$$

6.d. La <u>Γ-régularisée</u> de h (Cf. § 5.c.) est l'enveloppe supérieure des minorantes affines continues de h, c'est-à-dire des fonctions $x \mapsto < x,y > - r$ avec, selon (6.2),

$$(6.5) \qquad r \geqq h^*(y)$$

Pour la construction de cette enveloppe supérieure on peut évidemment retenir seulement celles de ces minorantes qui sont <u>maximales</u>, c'est-à-dire qui vérifient l'égalité dans (6.5) (au moins si h^* ne prend pas la valeur $-\infty$). Donc la Γ-régularisée de h est la fonction

$$x \mapsto \sup_{h^*(y) \in R} [< x,y > - h^*(y)]$$

$$= \sup_{y \in Y} [< x,y > - h^*(y)] .$$

(On a signalé au § 6.b. que, si h^* prend quelque part la valeur $-\infty$, alors $h^* = -\omega_Y$ et $h = +\omega_X \in \Gamma(X)$; l'expression ci-dessus reste donc valable pour la Γ-régularisée de h)

La Γ-régularisée de h est la fonction polaire de sa fonction polaire h^*, ce qui justifie la notation h^{**} déjà employée dans la section 5.

Il n'y a pas d'inconvénient à noter de la même manière par $*$ le passage d'un élément de $\overline{R}^X$ à sa fonction polaire (ce qui est une application de $\overline{R}^X$ dans $\Gamma(Y)$) et le passage d'un élément de $\overline{R}^Y$ à sa fonction polaire (ce qui est une application de $\overline{R}^Y$ dans $\Gamma(X)$).

La Γ-régularisée h^{**} étant l'enveloppe supérieure des minorantes affines continues de h, il est clair qu'une fonction affine continue minore h si et seulement si elle minore h^{**}. Il en résulte que h et h^{**} ont même fonction polaire :

(6.6) $$h^{***} = h^*$$

En particulier (Cf. § 6.c.) une partie A de X et son enveloppe convexe fermée (fermée pour n'importe quelle topologie compatible avec la dualité) ont la même fonction d'appui.

6.e. Visiblement si h_1 et h_2 sont deux fonctions numériques sur X, on a l'implication

(6.7) $$h_1 \leqq h_2 \Rightarrow h_1^* \geqq h_2^* .$$

Plus généralement, si (h_i) , $i \in I$ est une famille quelconque de fonctions, l'enveloppe inférieure $\inf_{i\in I} h_i$ a pour fonction polaire

$$\sup_{x\in X} [< x,y > - \inf_{i\in I} h_i(x)]$$

$$= \sup_{x\in X} \sup_{i\in I} [< x,y > - h_i(x)] .$$

C'est-à-dire que

(6.8) $$(\inf_{i\in I} h_i)^* = \sup_{i\in I} h_i^* .$$

Par contre, des exemples simples permettent de voir que, même pour une famille finie, on peut seulement affirmer l'inégalité

(6.9) $$(\sup_{i\in I} h_i)^* \leqq \inf_{i\in I} h_i^* .$$

6.f. Si $\sigma \in \mathbb{R}$ est une constante <u>non nulle</u> et $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$, considérons la fonction, notée $h \circ \sigma$, composée de h avec <u>l'homothétie</u> $(0,\sigma)$:

$$(h \circ \sigma)(x) = h(\sigma x)$$

Alors

$$(h \circ \sigma)^*(y) = \sup_{x \in X} [< x,y > - h(\sigma x)]$$

et, comme x parcourt X entier lorsque $x' = \sigma x$ parcourt X,

$$(h \circ \sigma)^*(y) = \sup_{x' \in X} [\frac{1}{\sigma} < x',y > - h(x')] = h^*(\frac{1}{\sigma} y) ,$$

c'est-à-dire

(6.10) $$(h \circ \sigma)^* = h^* \circ \frac{1}{\sigma} .$$

Ce résultat doit être bien distingué des suivants : Si λ est une constante réelle <u>strictement positive</u>, la fonction λh a pour fonction polaire :

$$(\lambda h)^*(y) = \sup_{x \in X} [< x,y > - \lambda h(x)]$$

$$= \lambda \sup_{x \in X} [< x,\frac{1}{\lambda} y > - h(x)]$$

$$= \lambda h^* (\frac{1}{\lambda} y)$$

c'est-à-dire, avec la notation du § 3.f.,

(6.11) $$(\lambda h)^* = h^* \lambda$$

Par un calcul semblable, on trouve

(6.12) $$(h\lambda)^* = \lambda(h^*)$$

CONSÉQUENCE : Si h est <u>positivement homogène</u> on a $h\lambda = h$ pour tout $\lambda \in]0 , \infty[$, donc, d'après (6.12),

$$\lambda(h^*) = h^*$$

Les seules valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui soient invariantes pour la multiplication par un $\lambda > 0$, différent de 1, sont 0, $+\infty$ et $-\infty$. La valeur $-\infty$ n'est prise que par $h^* = -\omega_Y$, correspondant au cas trivial $h = \omega_X$; on voit donc que si $h \neq \omega_X$ est positivement homogène, sa fonction polaire ne prend que les valeurs 0 et $+\infty$: c'est la <u>fonction indicatrice</u> d'une partie de Y.

De même (6.11) montre que si h est une fonction indicatrice, h^* est positivement homogène : on l'a déjà vu au § 6.c.

6.g. Soit $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ et $a \in X$; on note usuellement $T_a h$ la fonction <u>translatée</u> de h :

$$x \mapsto h(x - a)$$

Soit en outre $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante qui va définir une translation dans $\mathbb{R}$; la fonction $\alpha + T_a h$ a pour fonction polaire

$$\sup_{x \in X} [< x,y > - h(x - a) - \alpha]$$

ou, comme x décrit X entier lorsque $x' = x - a$ décrit X,

$$\sup_{x' \in A} [< x' + a,y > - h(x') - \alpha]$$

$$= h^*(y) + < a,y > - \alpha \ .$$

Bref :

(6.13) $$(\alpha + T_a h)^* = h^* + < a,. > - \alpha$$

La <u>translation</u> d'une fonction numérique (dans X et dans $\mathbb{R}$) se traduit donc par <u>l'addition d'une fonction affine continue</u> à sa fonction polaire, ce qui nous servira souvent pour «ramener à l'origine» un point au voisinage duquel on procède à une étude locale.

De façon analogue, si $b \in Y$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on trouve

(6.14) $$(h + < .,b > - \beta)^* = \beta + T_b(h^*)$$

6.h. On considère maintenant l'<u>inf-convolution</u> de deux fonctions numériques quelconques h et h' sur X :

$$(h \triangledown h')(x) = \inf_{u \in X} [h(u) \overset{\circ}{+} h'(x - u)]$$

$$= \inf_{u \in X} [h(u) \overset{\circ}{+} (T_u h')(x)] \ .$$

La fonction polaire s'écrit :

$$(h \triangledown h')^*(y) = \sup_{x \in X} [< x,y > - \inf_{u \in X} [h(u) \overset{\circ}{+} (T_u h')(x)]]$$

$$= \sup_{x \in X} \sup_{u \in X} [< x,y > - [h(u) \overset{\circ}{+} (T_u h')(x)]]$$

ou, en intervertissant les sup et en invoquant la transmutation de $\dot{+}$ en $\underset{\bullet}{+}$ par symétrie, puis (2.5) et (6.13),

$$(h \triangledown h')^*(y) = \sup_{u\in X} [- h(u) \dotplus \sup_{x\in X} [< x,y > - (T_u h')(x)]]$$

$$= \sup_{u\in X} [- h(u) \dotplus (T_u h')^*(y)]$$

$$= \sup_{u\in X} [- h(u) \dotplus h'^*(y) + < u,y >]$$

$$= h'^*(y) \dotplus \sup_{u\in X} [< u,y > - h(u)] .$$

Bref :

(6.15) $$(h \triangledown h')^* = h^* \dotplus h'^*$$

EXEMPLE. Si on prend pour h et h' les fonctions indicatrices de deux parties A et A' de X, on trouve, puisque $\psi_A \triangledown \psi_{A'}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $A + A'$ (Cf. § 3.b.), que la fonction d'appui de $A + A'$ (Cf. § 6.c.) est la somme des fonctions d'appui de A et A' (vérification directe d'ailleurs facile).

6.i. La donnée sur X d'un préordre noté $<_S$, compatible avec la structure additive de cet espace, équivaut à la donnée d'une partie S , contenant l'origine et stable pour l'addition :

(6.16) $$x <_S x' \Leftrightarrow x'-x \in S$$

On voit comme au § 3.h. qu'une fonction $h\in\bar{R}^X$ est décroissante pour ce préordre si et seulement si

(6.17) $$h \triangledown \psi_S = h$$

La fonction ψ_S , elle-même, est visiblement décroissante, donc

$$\psi_S \triangledown \psi_S = \psi_S$$

ce qui, par (6.15), donne

$$2\psi_S^* = \psi_S^*$$

Donc ψ_S^* ne prend que les valeurs 0 et $+\infty$ (la valeur $-\infty$ est exclue puisque, S n'étant pas vide, la fonction ψ_S n'est pas ω_X) : c'est la fonction indicatrice d'une partie Q de Y qui, d'après le § 6.c., est l'ensemble polaire de S. D'après ce même paragraphe, $\psi_S^* = \psi_Q$ est positivement homogène, donc Q est un cône convexe fermé dans Y.

Si h est décroissante pour le préordre $<_S$, (6.15) et (6.17) donnent :

$$h^* \dotplus \psi_Q = h^*$$

Laissant à part le cas $h = \omega_X$ qui est le seul permettant à h^* de prendre la valeur $-\infty$, on voit donc que $y \notin Q$ entraîne $h^*(y) = +\infty$, ce qui s'énonce (Cf. MOREAU [8]) :

PROPOSITION. *Si* $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ (*différente de* ω_X) *est décroissante pour le préordre* (6.16), *l'ensemble* $\operatorname{dom} h^*$ *est contenu dans le cône convexe fermé* Q, *ensemble polaire de* S.

Puisque $\psi_S^* = \psi_Q$ est une fonction indicatrice, ψ_S^{**}, fonction indicatrice de l'enveloppe convexe fermée P de S, est positivement homogène : cette enveloppe P est donc un *cône convexe fermé*, à savoir le *cône polaire* de Q.

$$P = \{x \in X : < x,y > \leq 0 , \ \forall\, y \in Q\}$$

(et vice versa : Q est le cône polaire de P). On peut alors formuler

RÉCIPROQUE. *Si* $\operatorname{dom} h^* \subset Q$, *la* Γ-*régularisée* h^{**} *de la fonction* h *est décroissante pour le préordre* $<_S$ *et même pour le préordre «moins fort» ou «plus fin» (compatible avec la structure d'espace vectoriel), noté* $<_P$,

$$x <_P x' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x' - x \in P .$$

En effet si $\operatorname{dom} h^* \subset Q$, on a

$$h^{**}(x) = \sup_{y \in Q} [< x,y > - h^*(y)] . \tag{6.18}$$

Soient x et x' tels que $x <_P x'$, c'est-à-dire $x' - x \in P$. puisque Q est le cône polaire de P on a l'implication

$$\begin{aligned} y \in Q &\Rightarrow < x,y > \geq < x',y > \\ &\Rightarrow < x,y > - h^*(y) \geq < x',y > - h^*(y) \end{aligned}$$

donc, d'après (6.18),

$$h^{**}(x) \geq h^{**}(x') .$$

COROLLAIRE. *Si une fonction* $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ *est décroissante pour le préordre* $<_S$, *sa* Γ-*régularisée* h^{**} *est décroissante pour le préordre plus fin* $<_P$. *En particulier, si* $h \in \Gamma(X)$, (*c'est-à-dire* $h = h^{**}$) *la décroissance pour* $<_S$ *est équivalente à la décroissance pour* $<_P$.

7. CONTINUITÉS ET DUALITÉ

7.a. PROPOSITION. Soit $\mathcal{T}$ une topologie d'e.v.t. sur l'espace X (non nécessairement compatible avec la dualité). Si une fonction $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est finie et $\mathcal{T}$-semi-continue supérieurement à l'origine de X (ou, plus généralement, majorée sur un $\mathcal{T}$-voisinage de 0), l'ensemble

$$h^{*\leqq}(\rho) = \{y \in Y : h^*(y) \leqq \rho\}$$

est, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, une partie de Y équicontinue pour la topologie $\mathcal{T}$.

En effet, soit V, qu'on pourra toujours supposer équilibré, un $\mathcal{T}$-voisinage de zéro dans X. Si h est majorée sur V par $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$h \leqq \alpha + \psi_V$$

d'où, le passage aux fonctions polaires inversant l'ordre,

$$h^* \geqq -\alpha + \psi_V^*$$

et par suite,

$$h^{*\leqq}(\rho) \subset \psi_V^{*\leqq}(\rho + \alpha) .$$

Comme la fonction ψ_V^* est positivement homogène, l'ensemble $\psi_V^{*\leqq}(\rho + \alpha)$ est, pour $\rho + \alpha > 0$, homothétique de l'ensemble $\psi_V^{*\leqq}(1)$ lequel (Cf. § 6.c.) est l'ensemble polaire V° de V. Cet ensemble est donc $\mathcal{T}$-équicontinu et par suite aussi $h^{*\leqq}(\rho)$ pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ (puisque $h^{*\leqq}(\rho)$ décroît avec ρ).

En invoquant la règle de translation du § 6.g., on en tire :

GÉNÉRALISATION. Si $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est majorée sur un $\mathcal{T}$-voisinage du point $a \in X$, la «section oblique»

$$(h^* - \langle a,. \rangle)^{\leqq}(\rho) = \{y \in Y : h^*(y) - \langle a,y \rangle \leqq \rho\}$$

est, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, une partie $\mathcal{T}$-équicontinue de Y.

7.b. D'après la définition de la topologie forte $\beta(X,Y)$ (Cf. § 6.a.) une partie de Y qui est équicontinue pour cette topologie est bornée (pour les topologies sur Y compatibles avec la dualité) ; donc (Cf. ROCKAFELLAR [9]) :

COROLLAIRE. Si $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est majorée sur un voisinage fort de $a \in X$, l'ensemble

$$(h^* - \langle a,. \rangle)^{\leqq}(\rho)$$

est, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, une partie bornée de Y .

7.c. Si $\mathscr{C}$ est une topologie sur X compatible avec la dualité, il est connu qu'une partie $\mathscr{C}$-équicontinue de Y est faiblement relativement compacte. Comme $h^*\in\Gamma(Y)$ les sections obliques de h^* sont faiblement fermées : si elles sont $\mathscr{C}$-équicontinues, elles sont faiblement compactes et même (Cf. BOURBAKI [1], Chap. III, § 5, proposition 5) compactes pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties $\mathscr{C}$-précompactes de X. Donc (Cf. MOREAU [13] :

COROLLAIRE. Si $\mathscr{C}$ est une topologie (localement convexe) sur l'espace X compatible avec la dualité et si $h\in\bar{\mathbb{R}}^X$ est majorée sur un $\mathscr{C}$-voisinage du point $a\in X$, l'ensemble $(h^*- \langle a,.\rangle)^{\leqq}(\rho)$ est, pour tout $\rho\in\mathbb{R}$, une partie faiblement compacte de Y et même compacte pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties $\mathscr{C}$-précompactes de X (laquelle induit sur cet ensemble la même topologie que $\sigma(Y,X)$).

7.d. Prenons enfin pour $\mathscr{C}$ la topologie faible $\sigma(X,Y)$. L'ensemble polaire d'un $\mathscr{C}$-voisinage équilibré de l'origine est contenu dans l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points ; c'est donc un ensemble de dimension finie ; on va en tirer :

COROLLAIRE. Si $h\in\bar{\mathbb{R}}^X$ est majorée sur un voisinage faible de $a\in X$, il existe dans Y une variété linéaire L de dimension finie hors de laquelle h^* prend la valeur $+\infty$ (autrement dit $\operatorname{dom} h^*$ est un ensemble de dimension finie) et, dans L, l'ensemble $(h^*- \langle a,.\rangle)^{\leqq}(\rho)$ est borné pour tout $\rho\in\mathbb{R}$.

En effet, par la règle de translation (6.13), on peut se ramener au cas $a=0$ sans modifier $\operatorname{dom} h^*$. Laissant de côté le cas trivial où $h^* = \omega_Y$, on voit par la proposition 7.a. que l'hypothèse implique l'existence d'un réel $\rho_1 > \inf h^*$ tel que l'ensemble $h^{*\leqq}(\rho_1)$ soit de dimension finie, donc contenu dans une variété linéaire L de dimension finie. D'abord :

$$\rho \leqq \rho_1 \Rightarrow h^{*\leqq}(\rho) \subset h^{*\leqq}(\rho_1) \subset L$$

D'autre part il existe y_o tel que

$$h^*(y_o) = \rho_o < \rho_1$$

(évidemment $y_o\in L$). Soit $\rho > \rho_1$; il existe α_o et α dans $]0,1[$, avec $\alpha_o + \alpha = 1$, tels que

$$\rho_1 = \alpha_o\,\rho_o + \alpha\rho\ .$$

La convexité de h^* fournit les implications

$$y \in h^{*\leqq}(\rho) \Rightarrow h^*(\alpha_o\, y_o + \alpha y) \leqq \alpha_o\, h^*(y_o) + \alpha\, h^*(y)$$
$$\leqq \alpha_o\, \rho_o + \alpha\rho = \rho_1$$
$$\Rightarrow \alpha_o\, y_o + \alpha y \in h^{*\leqq}(\rho_1)$$
$$\Rightarrow \alpha(y - y_o) \in -y_o + h^{*\leqq}(\rho_1)\ ,$$

d'ou l'inclusion

$$h^{*\leqq}(\rho) \subset y_o + \frac{1}{\alpha}[- y_o + h^{*\leqq}(\rho_o)]\ .$$

L'ensemble du second membre est déduit de $h^{*\leqq}(\rho_o) \subset L$ par une homothétie de centre $y_o \in L$; donc $h^{*\leqq}(\rho) \subset L$. Cela donne la conclusion :

$$\mathrm{dom}\, h^* = \bigcup_{\rho\in\mathbb{R}} h^{*\leqq}(\rho) \subset L\ .$$

L'ensemble $(h^* - < a,. >)^{\leqq}(\rho)$ est borné, puisque faiblement compact, en vertu du corollaire 7.c.

7.e. PROPOSITION. Si la fonction numérique h est finie et uniformément continue sur X pour la topologie $\mathcal{E}$, l'ensemble $\mathrm{dom}\, h^*$ est une partie $\mathcal{E}$-équicontinue de Y.

En effet, si h est uniformément continue, il existe V, équilibré, $\mathcal{E}$-voisinage de 0 dans X, tel que

$$(7.1) \qquad x - x' \in V \Rightarrow |h(x) - h(x')| < 1\ .$$

Le polaire V° de V est une partie $\mathcal{E}$-équicontinue de T. Soit $y \notin V^\circ$: il existe $a \in V$ tel que $< a,y > > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$; en invoquant n fois l'implication (7.1), on obtient

$$h(na) \leqq h(0) + n,$$

tandis que, en posant $< a,y > = 1 + \varepsilon$, on a

$$< na, y > = n + n\varepsilon$$

Quel que soit $r \in \mathbb{R}$, on voit, en choisissant n assez grand, que la fonction affine continue $< .,y > - r$ ne minore pas h, donc que $h^*(y) > r$. Cela prouve

$$h^*(y) = + \infty\ ,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{dom}\, h^* \subset V^\circ,$$

ce qui démontre la proposition.

Comme dans les paragraphes précédents on tirera des corollaires utiles de cette proposition en prenant pour $\mathcal{C}$ soit la topologie forte, soit la topologie de Mackey, soit la topologie faible.

7\. f. A titre d'illustration, utilisons le corollaire 7.c. pour retrouver des résultats de FAN [1] :

PROPOSITION. Soit B une partie faiblement fermée de Y. Si l'ensemble polaire B° a un intérieur non vide pour une topologie $\mathcal{C}$ sur X compatible avec la dualité (donc a fortiori pour la topologie de Mackey $\tau(X,Y)$), l'ensemble B est complet et localement compact pour la topologie faible $\sigma(Y,X)$. Si de plus le τ-intérieur de B° contient un u tel que la forme linéaire $< u,. >$ soit bornée sur B, alors B est faiblement compact.

En effet (Cf. § 6.c.) on a $B^\circ = \psi_B^*{}^{\leqq}(1)$. Donc si a est un point intérieur de B° pour une topologie $\mathcal{C}$ compatible avec la dualité, la fonction ψ_B^* se trouve majorée sur un $\mathcal{C}$-voisinage de ce point. Le corollaire 7.d. affirme alors que, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, l'ensemble $(\psi_B^{**} - < a,. >)^{\leqq}(\rho)$ est faiblement compact.

ψ_B^{**} est la fonction indicatrice de l'ensemble B', enveloppe convexe fermée de B ; comme B est σ-fermé dans B' il suffit de prouver que B' est σ-localement compact et σ-complet. On suppose $a \neq 0$, sans quoi B' est σ-compact et les conclusions immédiates (c'est d'ailleurs précisément le cas de Alaoglu-Bourbaki)

Soit $y \in B'$; si on prend $\rho > - < a,y >$ l'ensemble $(\psi_{B'} - < a,. >)^{\leqq}(\rho)$, qui est σ-compact, est un σ-voisinage de y dans B', d'où la σ-compacité locale de B' (qui est même la réunion dénombrable des ensembles σ-compacts obtenus pour $\rho \in \mathbb{N}$).

Soit $\mathcal{F}$ un σ-filtre de Cauchy dans B'. Puisque l'ensemble $< a,. >^{<}(1)$ est un σ-voisinage de 0 dans Y, il existe $U \in \mathcal{F}$ tel que

$$y \in U \ , \ y' \in U \Rightarrow < a, y' - y > < 1$$

c'est-à-dire, en fixant y' dans U,

$$y \in U \Rightarrow - < a,y > \ < \ 1 - < a,y' >$$

Donc U est contenu dans l'ensemble σ-compact $(\psi_{B'} - < a,. >)^{\leqq}(1 - < a,y' >)$. Par suite la trace du filtre $\mathcal{F}$ sur U est un filtre convergent ; cela montre la convergence de $\mathcal{F}$.

Enfin si la forme linéaire $< u,. >$ (avec u intérieur à B°) est bornée sur B par $\rho \in \mathbb{R}$, elle l'est aussi sur B'. Alors B' est identique à l'ensemble σ-compact $(\psi_{B'} - < a,. >)^{\leqq}(\beta)$.

REMARQUE. On améliore un peu le résultat de FAN en remarquant, comme au § 7.c., qu'on peut remplacer dans ce qui précède la topologie faible $\sigma(Y,X)$ (et la structure uniforme corrrespondante) par la topologie (et la structure uniforme) de la convergence uniforme dans les parties $\mathcal{E}$-relativement compactes de X.

7.g. Voici une autre application du corollaire 7.c. :

PROPOSITION. Soient h et h' deux fonctions numériques faiblement s.c.i. sur Y; supposons qu'il existe $a \in X$ en lequel les fonctions polaires h^* et h'^* prennent des valeurs finies, l'une d'elles (soit h^* par exemple) étant continue en ce point pour une topologie $\mathcal{E}$ compatible avec la dualité. Alors la fonction $h \triangledown h'$ est faiblement s.c.i. sur Y et cette inf-convolution est exacte.(Cf. proposition 4.e.).

En effet, puisque les valeurs $h^*(a)$ et $h'^*(a)$ sont finies, les fonctions affines continues $< a,. > - h^*(a)$ et $< a,. > - h'^*(a)$ sont des minorantes de h et h' respectivement. Donc les fonctions faiblement s.c.i. $h - < a,. >$ et $h' - < a,. >$ sont bornées inférieurement. En outre la première est minorée par la fonction $h^{**} - < a,. >$ laquelle est faiblement inf-compacte en vertu du corollaire 7.c. ; donc $h - < a,. >$ est elle-même faiblement inf-compacte. La proposition 4.e. montre alors que la fonction $(h - < a,. >) \triangledown (h' - < a,. >)$ est faiblement s.c.i. et que cette inf-convolution est exacte. Or

$$[(h - < a,. >) \triangledown (h' - < a,. >)] (y)$$

$$= \inf_{u + u' = y} [h(u) - < a,u > \dotplus h'(u') - < a,u'>]$$

$$= - < a,y > + \inf_{u + u' = y} [h(u) \dotplus h'(u')]$$

On reconnait dans le dernier «inf» l'inf-convolution $(h \triangledown h')(y)$: cela montre que cette inf-convolution est, elle aussi, exacte et définit une fonction de y faiblement s.c.i..

On peut en tirer un autre résultat de FAN [1] :

COROLLAIRE. Soient B et B' deux ensembles faiblement fermés dans Y. Si l'intérieur de l'ensemble polaire B° (pour une topologie sur X compatible avec la dualité) rencontre l'ensemble polaire B'° l'ensemble $B + B'$ est faiblement fermé dans Y.

En effet il suffit d'appliquer la proposition précédente aux fonctions indicatrices ψ_B et $\psi_{B'}$ puisque $\psi_{B+B'} = \psi_B \triangledown \psi_{B'}$.

8. FONCTIONS DUALES

8.a. X et Y désignent, comme précédemment, deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$, mis en dualité par la forme bilinéaire $< .,. >$.

Une fonction $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ appartient à $\Gamma(X)$ si et seulement si $f = f^{**}$ (Cf. §6.c) Autrement dit encore, si on suppose <u>à priori</u> que $f \in \Gamma(X)$ et $g \in \Gamma(Y)$, on a l'équivalence

$$f = g^* \Leftrightarrow f^* = g .$$

DÉFINITION. <u>On dit que deux fonctions</u> $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ <u>et</u> $g \in \bar{\mathbb{R}}^Y$ <u>constituent une paire de fonctions duales (ou que chacune est la duale de l'autre) si chacune est la fonction polaire de l'autre ; alors</u> $f \in \Gamma(X)$ <u>et</u> $g \in \Gamma(Y)$.

La polarité définit de la sorte une correspondance bijective entre $\Gamma(X)$ et $\Gamma(Y)$. Comme d'ailleurs la constante $\omega_X = +\infty$ a pour fonction polaire $\omega_Y = -\infty$ (et de même: $\omega_Y^* = -\omega_X$) la correspondance est aussi bijective entre $\Gamma_0(X)$ et $\Gamma_0(Y)$ (Cf. §. 5.e.).

<u>Exemple</u> : Si A est une partie convexe fermée non vide de X, la fonction indicatrice ψ_A appartient à $\Gamma_0(X)$. Sa duale est la fonction d'appui ψ_A^* de A (Cf. § 6.c.). Le cas où A contient l'origine sera examiné plus complètement au § 14.a.

En particulier pour tout $a \in X$, la fonction ψ_a, fonction indicatrice de l'ensemble $\{a\}$, a pour duale la forme linéaire $< a,. >$.

Un autre cas particulier usuel est obtenu en prenant deux cônes convexes fermés $P \subset X$ et $Q \subset Y$ mutuellement polaires, c'est-à-dire que

$$Q = \{y \in Y \ : \ < x,y > \leq 0 \ , \ \forall \ x \in P\}$$

et vice versa. Alors ψ_P et ψ_Q sont des fonctions duales.

8.b. Soient α et β dans $\bar{\mathbb{R}}$; on vérifiera l'équivalence

$$\alpha \mathbin{\mathring{+}} \beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq -\beta \ . \tag{8.1}$$

La définition des fonctions polaires montre que, si $f \in \Gamma(X)$ et $g \in \Gamma(Y)$ sont deux fonctions duales, on a, pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$,

$$g(y) \geq < x,y > - f(x) ,$$

c'est-à-dire en invoquant (8.1),

$$f(x) \mathbin{\dot{+}} g(y) \geq < x,y > , \tag{8.2}$$

le signe $\dot{+}$ équivaut d'ailleurs à $+$ si $f \in \Gamma_0(X)$ (soit aussi bien $g \in \Gamma_0(Y)$).

Plus généralement (Cf. MOREAU [17] deux fonctions $F \in \bar{\mathbb{R}}^X$ et $G \in \bar{\mathbb{R}}^Y$ sont dites <u>sur-duales</u> si l'inégalité $F(x) \mathbin{\dot{+}} G(y) \geq < x,y >$ est vérifiée pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$. Par (8.1), cela équivaut à l'inégalité $F \geqq G^*$, elle même équivalente à $G \geq F^*$: chacune des deux fonctions majore la fonction polaire de l'autre. Visiblement alors :

Dans l'ensemble des couples de fonctions sur-duales, ordonné par l'ordre naturel de $\overline{\mathbb{R}}^X \times \overline{\mathbb{R}}^Y$, un couple (f,g) est un élément minimal si et seulement si f et g sont des fonctions duales.

En un autre langage une inégalité de la forme (8.2), affirmée pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, est «non améliorable» si et seulement si f et g sont deux fonctions duales.

La notion suivante prendra toute son importance dans la section 10 :

DÉFINITION. Les points $x \in X$ et $y \in Y$ sont dits conjugués par rapport au couple de fonctions duales f et g si on a l'égalité dans (8.2); cela exige visiblement que les valeurs $f(x)$ et $g(y)$ soient finies, de sorte que l'égalité s'écrit de façon équivalente :

$$f(x) + g(y) = \langle x,y \rangle . \tag{8.3}$$

EXEMPLE. Soit A une partie convexe fermée de X ; les points x et y sont conjugués par rapport aux fonctions duales ψ_A et $\psi_A{}^*$ si et seulement si le demi espace fermé (minimal parmi ceux qui contiennent A)

$$\{u \in X \ : \ \langle u,y \rangle - \psi_A{}^*(y) \leqq 0\}$$

est un demi-espace d'appui de A au point x c'est-à-dire si l'hyperplan frontière de ce demi-espace rencontre A au moins au point x .

8c. La correspondance entre $f \in \Gamma(X)$ et sa duale $g = f^* \in \Gamma(Y)$ étant bijective, les règles de calcul données dans la section 6 pour les fonctions polaires se condensent en un «dictionnaire» d'équivalences entre propriétés respectives ou transformations de ces deux fonctions. La symétrie complète des rôles joués par les deux espaces X et Y permet d'ailleurs d'abréger un tel dictionnaire ; par exemple, s'il est posé à priori que $h \in \Gamma(X)$, les identités (6.13) et (6.14) sont symétriques l'une de l'autre.

Dans ce qui suit f, f' ,... désignent des éléments de $\Gamma(X)$; g, g',... sont leurs fonctions duales respectives, éléments de $\Gamma(Y)$.

1°) La définition de f^* donne immédiatement

$$g(0) = -\inf_{x \in X} f(x) \tag{8.4}$$

Donc f est minorée si et seulement si g est finie à l'origine.

2°) Le § 6.e. montre que

(8.5) $$f \leq f' \Leftrightarrow g \geq g'.$$

Plus généralement, soit $\mathcal{F}$ une partie quelconque de $\Gamma(X)$ et soit $\mathcal{G} \subset \Gamma(Y)$ son image par la dualité. Le plus petit majorant $\vee \mathcal{F}$, c'est-à-dire simplement l'enveloppe supérieure (ou sup dans $\bar{\mathbb{R}}^X$; cf. § 5.c.) des $f \in \mathcal{F}$, a pour duale le plus grand minorant $\wedge \mathcal{G}$, c'est-à-dire la Γ-régularisée de l'enveloppe inférieure des $g \in \mathcal{G}$.

3°) Si $\sigma \in \mathbb{R}$ est une constante non nulle, (6.10) donne

(8.6) $$f' = f \circ \sigma \Leftrightarrow g' = g \circ \frac{1}{\sigma}$$

4°) si $\lambda \in]0, +\infty[$ est une constante, (6.11) ou (6.12) donnent (Cf. notation du § 3.f.) :

(8.7) $$f' = \lambda f \Leftrightarrow g' = f\lambda \ .$$

Comme au § 6.f., on en tire que $f \in \Gamma_o(X)$ est positivement homogène si et seulement si g est la fonction indicatrice d'une partie convexe fermée non vide de Y.

5°) si $a \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, (6.13) donne la règle de translation :

(8.8) $$f'(x) = \alpha + f(x-a) \Leftrightarrow g'(y) = g(y) + < a,y > - \alpha \ .$$

6°) Les résultats du § 6.i. prennent, dans le cadre présent, la forme suivante ;

On considère S, partie de X stable pour l'addition et contenant l'origine ; l'enveloppe convexe fermée de S est un cône convexe noté P ; soit Q le cône polaire de P. On définit le préordre $\preccurlyeq_S$ et le préordre moins fort $\preccurlyeq_P$ par

$$x \preccurlyeq_S x' \Leftrightarrow x' - x \in S$$

$$x \preccurlyeq_P x' \Leftrightarrow x' - x \in P$$

La décroissance de f pour le préordre $\preccurlyeq_S$ est équivalente à sa décroissance pour le préordre $\preccurlyeq_P$ et équivalente à l'inclusion $\operatorname{dom} g \subset Q$.

7°) Nous réservons pour la section 9 l'exploitation de l'identité (6.15) concernant l'inf-convolution.

8.d. Pour un couple de fonctions duales f et g l'établissement d'une réciproque de la proposition 7.a. va permettre de formuler une équivalence (Cf. MOREAU [13]):

PROPOSITION. Soit $\mathcal{C}$ une topologie d'e.v.t. sur l'espace X (non nécessairement compatible avec la dualité). La fonction $f \in \Gamma_o(X)$ est finie et $\mathcal{C}$-continue à l'origine de X (il suffit pour cela qu'elle soit majorée sur un $\mathscr{C}$-voisinage de 0) si et seulement s'il existe un réel $\rho_1 > \inf g$ tel que l'ensemble $g^{\leqq}(\rho_1)$ soit une partie $\mathscr{C}$-équicontinue de Y ; en ce cas $g^{\leqq}(\rho)$ est $\mathscr{C}$-équicontinu pour tout $\rho \in \mathbb{R}$.

La partie «seulement si» résulte de 7.a. Réciproquement, supposons l'existence de $\rho_1 > \inf g$ tel que l'ensemble $g^{\leqq}(\rho_1)$ soit $\mathscr{C}$-équicontinu. Il existe donc un $\mathscr{C}$-voisinage équilibré de zéro dans X, notons-le V, tel que $g^{\leqq}(\rho_1)$ soit contenu dans l'ensemble polaire $V°$. Puisque V est un ensemble absorbant dans X, le polaire $V°$ est borné dans Y (toutes les fonctions $< x, . >$, $x \in X$, sont bornées sur $V°$). La fonction g, appartenant à $\Gamma_0(Y)$ possède au moins une minorante affine continue (Cf. § 5.d.), donc elle est minorée sur l'ensemble borné $g^{\leqq}(\rho_1)$ et, *a fortiori*, sur tout l'espace Y ; posons :

$$\beta = \inf g = - f(0) \in \mathbb{R} . \tag{8.9}$$

Il existe $y_0 \in Y$ tel que

$$\rho_0 = g(y_0) \in [\beta , \rho_1[.$$

Puisque $y_0 \in g^{\leqq}(\rho_1) \subset V°$, la forme linéaire $< . , y_0 >$ est bornée sur V, donc $\mathscr{C}$-continue. Par suite f sera $\mathscr{C}$-continue à l'origine de X si est aussi $\mathscr{C}$-continue la fonction

$$f' = f - < . , y_0 > + \rho_0$$

laquelle d'après (8.8) est la duale de la fonction

$$y \mapsto g'(y) = g(y+y_0) - \rho_0 .$$

Pour cette dernière (translatée de g), on a :

$$g'(0) = 0$$

$$\inf g' = \beta - \rho_0 \leqq 0 \tag{8.10}$$

et l'ensemble

$$C = g'^{\leqq}(\rho_1 - \rho_0) = g^{\leqq}(\rho_1) - y_0 \subset g^{\leqq}(\rho_1) - g^{\leqq}(\rho_1)$$

est $\mathscr{C}$-équicontinu. Cet ensemble est convexe et contient l'origine ; soit j sa fonction jauge (Cf. § 2.h.). La restriction de j à toute demi-droite δ, d'origine 0, est linéaire ou infinie hors de 0, tandis que la restriction de g' est une fonction convexe unidimensionnelle, nulle en 0 ; on en conclut que sur le segment $C \cap \delta$ (peut-être réduit au point 0) la fonction $(\rho_1 - \rho_0)j$ majore g', tandis qu'au delà de ce segment, sur δ, elle minore g'. Compte tenu de (8.10), on voit finalement que la fonction $(\rho_1 - \rho_0)j + \beta - \rho_1$ minore g' partout sur Y. La fonction duale de cette minorante, à savoir (Cf. § 6.c.) la fonction $\psi_W - \beta + \rho_1$, en appelant W la partie $(\rho_1 - \rho_o)C^o$ de X, majore donc f. Cela signifie que f est majorée par $\rho_1 - \beta$ sur l'ensemble W, lequel est $\mathcal{T}$-voisinage de zéro, puisque C est équicontinu ; donc f est $\mathcal{T}$-continue à l'origine (Cf. § 5.a.).

C'est ensuite la proposition 7.a. qui montre que $g^{\leqq}(\rho)$ est $\mathcal{T}$-équicontinu pour tout $\rho \in \mathbb{R}$. (en fait, on peut le déduire directement de l'existence de ρ_1 et de la convexité de g, en renouvelant le raisonnement employé pour la démonstration du corollaire 7.d.).

8.e. Comme au § 7.b., on en tire (Cf. ROCKAFELLAR [9]) :

COROLLAIRE. *La fonction* $f \in \Gamma(X)$ *est finie et continue au point* $a \in X$ *pour la topologie forte si et seulement si, pour tout* $\rho \in \mathbb{R}$, *l'ensemble* $(g - \langle a, . \rangle)^{\leqq}(\rho)$ *est une partie bornée de* Y. *Il suffit d'ailleurs pour cela que cet ensemble soit borné pour un* $\rho > \inf (g - \langle a, . \rangle)$.

Exemple : (Cf. HÖRMANDER [1]). *Une partie non vide* A *de* Y *est bornée si et seulement si sa fonction d'appui* $\psi_A^* \in \Gamma_o(Y)$ *est continue à l'origine (donc finie et continue partout dans* X) *pour la topologie forte de* X.

En effet A est borné si et seulement si il en est de même de son enveloppe convexe fermée A' ; or $\psi_{A'}$ et ψ_A^* sont des fonctions duales.

Par un raisonnement semblable à celui du § 5.f., le corollaire précédent conduit à (Cf. ROCKAFELLAR [9]) :

Une fonction $f \in \Gamma_o(X)$ *est finie et continue pour la topologie forte en un point* $a \in X$ *si et seulement si* a *est un point interne de* dom f. *En particulier* ($f = \psi_C$) *si* $C \subset X$ *est convexe fermé (pour les topologies compatibles avec la dualité) son intérieur fort coïncide avec son «intérieur algébrique» (ensemble des points internes de* C).

8.f. De même (Cf. MOREAU [13] :

COROLLAIRE. *Il existe une topologie* $\mathcal{T}$ *(d'e.v.t. localement convexe) sur* X, *compatible avec la dualité, telle que* $f \in \Gamma(X)$ *soit finie continue au point* $a \in X$, *si et seulement si il existe* $\rho_1 > \inf (g - \langle a, . \rangle)$ *tel que l'ensemble*

$$(g - \langle a, . \rangle)^{\leqq}(\rho_1)$$

soit une partie faiblement compacte de Y. *En ce cas, pour tout* $\rho \in \mathbb{R}$, *l'ensemble* $(g - \langle a, . \rangle)^{\leqq}(\rho)$ *est faiblement compact (et même compact pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties* $\mathcal{T}$*-précompactes de* X *laquelle induit sur cet* ensemble la même topologie que $\sigma(Y,X)$).

Exemple : Un cône convexe fermé $P \subset X$ (de sommet 0) possède un intérieur non vide pour la topologie de Mackey $\tau(X,Y)$ si et seulement si son cône polaire $Q \subset Y$ admet une base (ou semelle) faiblement compacte.

En effet P possède un τ-intérieur non vide si et seulement si il existe $a \in X$ en lequel la fonction ψ_P est finie et τ-continue, c'est-à-dire, d'après le corollaire précédent, si et seulement si les ensembles

$$(\psi_Q - \langle a,.\rangle)^{\leqq}(\rho) = Q \cap \langle a,.\rangle^{\geqq}(-\rho)$$

sont faiblement compacts (car ψ_Q est la duale de ψ_P). Si cela est, la section de Q par l'hyperplan $\langle a,.\rangle + \rho = 0$ (avec $\rho > 0$) est faiblement compacte et constitue nécessairement une base de ce cône. Réciproquement si un hyperplan – écrivons le $\langle a,.\rangle + \rho = 0$ avec $\rho > 0$ – coupe Q selon un ensemble (convexe) faiblement compact K, cet ensemble est nécessairement une base du cône Q ; l'ensemble $Q \cap \langle a,.\rangle^{\geqq}(-\rho)$ est bien faiblement compact car c'est l'enveloppe convexe de $K \cup \{0\}$.

On pourra utiliser les remarques ci-dessus pour établir le résultat suivant, publié sans démonstration par DUBOVICKII, MILJUTIN [1] (en vue d'applications au calcul des variations) :

Soit dans X une famille finie Ω_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ de cônes convexes non vides de sommet 0, ouverts (pour une topologie compatible avec la dualité) et soit L un sous-espace vectoriel de X. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

I) $L \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_n = \emptyset$,

II) Il existe dans Y des éléments non tous nuls b et b_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ appartenant respectivement aux cônes polaires L° et Ω_i°, tels que

$$b = \sum_i b_i .$$

8.g. Enfin :

COROLLAIRE. La fonction $f \in \Gamma(X)$ est finie et continue au point $a \in X$ pour la topologie faible $\sigma(X,Y)$ si et seulement si il existe $\rho_1 > \inf(g - \langle a,.\rangle)$ tel que l'ensemble $(g - \langle a,.\rangle)^{\leqq}(\rho_1)$ soit borné et de dimension finie. En ce cas l'ensemble $\operatorname{dom} g$ est de dimension finie et l'ensemble $(g - \langle a,.\rangle)^{\leqq}(\rho)$ en est, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, une partie bornée. En outre, la fonction f est «cylindrique» c'est-à-dire qu'il existe dans X un sous-espace vectoriel E, de codimension finie, tel que

$$x' - x \in E \Rightarrow f(x') = f(x)$$

On établit en effet la dernière assertion en appelant E l'orthogonal du sous espace vectoriel F, de dimension finie, engendré dans Y par $\mathrm{dom}\, g$. D'après le § 8.c., 6°, la fonction f est décroissante pour le préordre $<_E$ défini par

$$x <_E x' \Leftrightarrow x' - x \in E .$$

Comme E est un espace vectoriel ce préordre est en fait une relation d'équivalence d'où le résultat.

Notons d'ailleurs qu'on peut raffiner un peu la conclusion, en considérant la variété linéaire L engendrée par $\mathrm{dom}\, g$: si elle ne contient pas 0, sa dimension n sera inférieure d'une unité à celle de F. Soit F' le sous-espace vectoriel de Y, parallèle à L, et soit E', de codimension n, l'orthogonal de F'. Choisissons $b \in L$; la fonction translatée $y \mapsto g(y + b)$ a son domaine effectif contenu dans F' de sorte que la fonction $f - \langle \cdot, b \rangle$ est constante sur chaque classe mod E' (structure «cylindrique oblique» de la fonction f).

8.h. Pour un couple de fonctions duales on peut aussi, dans la voie ouverte par ROCKAFELLAR [9], obtenir une réciproque de la proposition 7.e. et formuler une équivalence :

PROPOSITION. Soit $\mathcal{G}$ une topologie d'e.v.t. sur l'espace X (non nécessairement compatible avec la dualité). La fonction $f \in \Gamma_0(X)$ est partout finie et uniformément continue pour la topologie $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathrm{dom}\, g$ est une partie $\mathcal{G}$-équicontinue de Y.

La partie «seulement si» résulte de la proposition 7.e. Réciproquement, si $\mathrm{dom}\, g$ est $\mathcal{G}$-équicontinu, on voit en écrivant

$$f(x) = \sup_{y \in \mathrm{dom}\, g} [\langle x, y \rangle - g(y)]$$

que f est l'enveloppe supérieure d'une famille $\mathcal{G}$-uniformément équicontinue de fonctions affines.

8.k. Soit $f \in \Gamma_0(X)$; soit $a \in \mathrm{dom}\, f$; soit $x \in X$; soit $\lambda > 0$.

Il résulte de la convexité de f que l'expression

$$\frac{f(a + \lambda x) - f(a)}{\lambda}$$

croit avec λ.

Avec ROCKAFELLAR [9] on écrira

(8.11)
$$(f0^+)(x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f(a+\lambda x) - f(a)}{\lambda}$$
$$= \sup_{\lambda > 0} \frac{f(a+\lambda x) - f(a)}{\lambda}$$

La fonction (positivement homogène) $f0^+$, appelée <u>fonction asymptote</u> de f, appartient à $\Gamma(X)$ puisqu'enveloppe supérieure des

(8.12)
$$x \mapsto \frac{f(a+\lambda x) - f(a)}{\lambda}.$$

D'après le paragraphe 8.c., 4° et 5°, la fonction (8.12) a pour duale

(8.13)
$$y \mapsto \frac{1}{\lambda}\,[f(a) + g(y) - \langle a,y \rangle]\,.$$

Donc $f0^+$ a pour duale (§ 8.c.,2°) la Γ-régularisée de l'enveloppe inférieure des fonctions (8.13) pour $\lambda \in]0, +\infty[$. Or $f(a) + g - \langle a,. \rangle$ a même domaine effectif que g et elle est partout $\geqq 0$ puisque sa duale $f(a+.) - f(a)$ est nulle à l'origine (§ 8.c., 1°). Donc l'enveloppe inférieure en question est la <u>fonction indicatrice</u> de dom g.

Par analogie avec 8.c.,4°, on notera 0^+g la duale de $f0^+$:

(8.14)
$$0^+g = (\psi_{\mathrm{dom}\, g})^{**}$$

(c'est aussi la fonction indicatrice de l'adhérence de dom g).

<u>Bref,</u> $f0^+$ <u>est la fonction d'appui de l'ensemble convexe</u> dom g (<u>non fermé en général). Cela montre que dans (8.11) le choix de</u> $a \in$ dom f <u>est indifférent.</u>

REMARQUE. Par la notation (8.11) l'expression $(f\mu)(x)$, c'est-à-dire $\mu f(\frac{1}{\mu}x)$ lorsque $\mu > 0$, conserve un sens pour $\mu = 0$. La cohérence de cette écriture est frappante dans le fait suivant :

<u>Si</u> $f \in \Gamma_o(X)$, <u>la fonction numérique</u>
$$(\mu,x) \mapsto (f\mu)\,(x)$$
<u>est s.c.i. en tout point de</u> $[0, +\infty[\times X$.

En effet, cette semi-continuité est évidente en tout point de $]0, +\infty[\times X$, puisque l'application $(\mu,x) \mapsto \frac{1}{\mu}x \in X$ est continue sur cet ensemble et que f est s.c.i. sur X. Pour montrer la semi-continuité inférieure au point $(0, x_o)$, considérons $\alpha < (f0^+)(x_o)$, c'est-à-dire

$$\alpha < \sup \{ < x_o, y > \ : \ g(y) < +\infty \}$$

Alors il existe $y_o \in Y$ tel que $g(y_o) = \beta < +\infty$ et que

$$\alpha = < x_o, y_o > - \eta \quad , \quad \eta > 0 .$$

La fonction affine $< . , y_o > - \beta$ étant une minorante de f, on a, pour tout $\mu > 0$,

$$(f\mu)(x) = \mu f(\frac{1}{\mu} x) \geqq < x, y_o > - \mu\beta .$$

Il existe un voisinage V de x_o dans X tel que

$$x \in V \Rightarrow < x, y_o > \ > \ < x_o, y_o > - \frac{\eta}{2} ;$$

en outre

$$\mu \in [0, \frac{\eta}{2|\beta|} [\Rightarrow - \mu\beta > - \frac{\eta}{2} .$$

Donc, par addition,

$$(\mu, x) \in [0, \frac{\eta}{2|\beta|}[\times V \Rightarrow (f\mu)(x) > < x_o, y_o > - \eta = \alpha .$$

8.ℓ. L'enveloppe supérieure h_c des fonctions positivement homogènes de degré 1, minorant une fonction quelconque $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est la plus grande minorante de h qui soit positivement homogène de degré 1 : appelons-la <u>enveloppe conique</u> de h (car l'épigraphe d'une telle fonction dans l'espace vectoriel $X \times \mathbb{R}$ est un cône). Cette enveloppe conique peut être la constante $-\omega = -\infty$. La Γ-régularisée h_c^{**} est la plus grande minorante de h qui appartienne à $\Gamma(X)$ et soit positivement homogène de degré 1. On peut la construire comme enveloppe supérieure des formes linéaires continues minorant h. D'après (6.5), la forme linéaire $< . , y >$ minore h si et seulement si

$$h^*(y) \leqq 0 .$$

Donc

$$h^{**}(x) = \sup \{ < x, y > \ : \ y \in h^{*\leqq}(0) \} \tag{8.15}$$

<u>c'est-à-dire que</u> h_c^{**} <u>est la fonction d'appui de l'ensemble</u> $h^{*\leqq}(0)$.

Une fonction $m \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est «conique» (c'est-à-dire positivement homogène de degré 1) si et seulement si , pour tout $\mu > 0$, on a $m\mu = m$ (Cf. § 3.f.). En outre, pour chaque $\mu > 0$ on a l'équivalence

$$m \leqq h \Leftrightarrow m\mu \leqq h\mu .$$

Bref, une fonction conique m minore h si et seulement si elle minore h_μ pour cheque $\mu > 0$, donc si et seulement si elle minore l'enveloppe inférieure des h_μ. Comme cette enveloppe inférieure est visiblement conique, on a

(8.16) $$h_c = \inf_{\mu > 0} h_\mu .$$

On vérifie que si h est convexe, il en est de même de h_c.

La propriété suivante a été déduite par ROCKAFELLAR [9] de résultats de CHOQUET [1] sur les cônes projetants et cônes asymptotes d'ensembles convexes fermés ; nous en donnons une démonstration directe.

PROPOSITION. Si $f \in \Gamma(X)$ et si $0 < f(0) < +\infty$, l'enveloppe conique f_c appartient aussi à $\Gamma(X)$; elle coïncide donc avec f_c^{**}, fonction d'appui de $g^{\leqq}(0)$.

En effet, f étant l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues, il existe $b \in Y$ et $\rho > 0$ tels que

(8.17) $$< .,b > + \rho \leq f .$$

A fortiori la fonction «conique» $< .,b >$ minore f, donc minore f_c. Cette dernière est ainsi une fonction convexe à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$; il reste à prouver qu'elle est s.c.i.

Par (8.16), on a

(8.18) $$f_c(x) = \inf_{\mu > 0} \mu f(\frac{1}{\mu} x)$$

Par ailleurs, (8.11) donne, en prenant $a = 0 \in \text{dom}\, f$ et $\lambda = \frac{1}{\mu}$, $\mu > 0$:

$$\begin{aligned}(f0^+)(x) &= \lim_{\mu \to 0} \mu[f(\frac{1}{\mu} x) - f(0)] \\ &= \lim_{\mu \to 0} \mu f(\frac{1}{\mu} x) \\ &\geqq \inf_{\mu > 0} \mu f(\frac{1}{\mu} x) .\end{aligned}$$

Posant donc, par convention, que $f\mu = f0^+$ pour $\mu = 0$, on peut écrire (8.18) sous la forme

$$f_c(x) = \inf_{\mu \geqq 0} (f\mu)(x) .$$

En outre (8.17) donne

(8.19) $$(f\mu)(x) \geqq < x,b > + \mu\rho .$$

Pour montrer la semi-continuité inférieure de f_c au point x_o, on prend

$$\alpha < f_c(x_o) .$$

Considérons d'abord un voisinage V de x_o dans X sur lequel la fonction $< .,b >$ soit bornée. Par (8.19) on construit $\mu_o \in]0, +\infty[$ tel que

$$\mu > \mu_o , \quad x \in V \Rightarrow (f_\mu)(x) > \alpha$$

Il suffit dès lors d'établir la semi-continuité inférieure au point x_o pour la fonction

$$x \to \inf_{\mu \in [0, \mu_o]} (f\mu)(x)$$

Or, l'intervalle $[0, \mu_o]$ étant compact, cette semi-continuité résulte du lemme 4.e. et de la remarque du § 8.k.

9. Γ-CONVOLUTION

9.a. La dualité définissant une bijection de $\Gamma(X)$ sur $\Gamma(Y)$, la structure de cône convexe $(\Gamma(X), \underset{\cdot}{+})$ (§ 5.c.) peut être transportée sur $\Gamma(Y)$, ce qui munira cet ensemble d'une structure de cône convexe autre que $(\Gamma(Y), \underset{\circ}{+})$.

D'abord, d'après (8.7), la loi externe

$$\lambda \in]0, +\infty[\quad , \quad f \in \Gamma(X) \mapsto \lambda f \in \Gamma(X)$$

se transmue en la loi externe

$$\lambda \in]0, +\infty[\quad , \quad g \in \Gamma(Y) \to g\lambda \in \Gamma(Y)$$

On appellera Γ-*convolution la loi de composition interne, notée* $\underline{\nabla}$, *transmuée de l'addition* $\underset{\circ}{+}$, *c'est-à-dire que, pour tout* g *et tout* g' *dans un* Γ, *on écrit* :

$$g \,\underline{\nabla}\, g' = (g^* \underset{\circ}{+} g'^*)^* \tag{9.1}$$

Cette loi est donc commutative, associative et satisfait, avec l'opération $(\lambda, g) \mapsto g\lambda$, aux axiomes des cônes convexes ; elle admet pour élément neutre la fonction duale de la constante 0, à savoir ψ_0 , fonction indicatrice de l'origine.

Cela resterait purement formel si l'on ne possédait pas une construction directe de la fonction $g \,\underline{\nabla}\, g'$. Or (6.15) donne

$$g \,\underline{\nabla}\, g' = (g \nabla g')^{**}$$

La Γ-*convolution est la* Γ-*régularisée de l'inf-convolution*.

Il est important pour les applications de formuler des cas, où $g \nabla g'$ se trouvant appartenir à Γ, la Γ-convolution est identique à l'inf-convolution.

9.b. PROPOSITION. *Soient* g *et* g' *dans* $\Gamma(Y)$; *si l'ensemble* $\operatorname{cont} g$ *des points de* Y *où* g *est finie et continue (pour une topologie compatible avec la dualité) et l'ensemble* $\operatorname{dom} g' = \{y \in Y : g'(y) < +\infty\}$ *sont tels que*

$$\operatorname{cont} g + \operatorname{dom} g' = Y$$

on a $g \nabla g' = g \,\underline{\nabla}\, g'$.

En effet

$$(g \nabla g')(y) = \inf_{v \in Y} [g(y - v) \dotplus g'(v)] \, . \tag{9.2}$$

Soit $y_o \in Y$; d'après l'hypothèse il existe v_o tel que $g'(v_o) < +\infty$ et que la fonction g soit finie continue au point $y_o - v_o$. Alors la fonction

$$y \mapsto g(y - v_o) \dot{+} g'(v_o)$$

laquelle, d'après (9.2), est majorante de $g \nabla g'$, est finie continue au point y_o ou (si $g'(v_o) = -\infty$) égale à $-\infty$ sur un voisinage de ce point. Donc la fonction convexe $g \nabla g'$ (proposition 3.f) est majorée sur un voisinage de chaque $y_o \in Y$: d'après le § 5.a. cela montre qu'elle est partout finie et continue ou partout égale à $-\infty$. Ainsi elle appartient bien à $\Gamma(Y)$.

9.c. La proposition 7.g. donne immédiatement un autre cas :

PROPOSITION. Soient g et g' dans $\Gamma(Y)$; s'il existe $a \in X$ en lequel les fonctions duales respectives f et f' prennent des valeurs finies, l'une d'elle étant continue en ce point (pour une topologie compatible avec la dualité), on a

$$g \underline{\nabla} g' = g \nabla g'$$

et cette inf-convolution est exacte.

Noter qu'en vertu du corollaire 8.f., l'hypothèse ci-dessus équivaut à : g et g' appartiennent à $\Gamma_o(Y)$; les fonctions $g - \langle a, . \rangle$ et $g' - \langle a, . \rangle$ sont bornées inférieurement et l'une d'entre elles est inf-compacte pour la topologie faible $\sigma(Y,X)$.

En particulier si $g \in \Gamma(Y)$ est faiblement inf-compacte pour toutes les pentes, c'est-à-dire si, pour tout $a \in X$, la fonction $g - \langle a, . \rangle$ est σ- inf-compacte, on a $g \underline{\nabla} g' = g \nabla g'$ pour tout $g' \in \Gamma_o(Y)$ et cette inf-convolution est exacte.

9.d. Signalons d'autres cas où $g \underline{\nabla} g' = g \nabla g'$:

D'après des résultats de MOREAU [7], si $Q \subset Y$ est un cône convexe (de sommet 0 inclus), admettant une base (faiblement) compacte et si g et $g' \in \Gamma_o(Y)$ ont leurs domaines effectifs contenus dans Q, la fonction $g \nabla g'$ (qui a aussi son domaine dans Q) est s.c.i., à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, donc égale à $g \underline{\nabla} g'$. Là encore l'inf-convolution est exacte. Rappelons d'ailleurs (Cf. § 8.e, 6° et § 8.f.) que l'hypothèse précédente équivaut à la décroissance des fonctions duales respectives f et f' pour le préordre défini dans X par la cône polaire P de Q ; Q admet une base faiblement compacte si et seulement si P possède un intérieur non vide pour une topologie compatible avec la dualité (Cf. § 8.f, exemple).

Dans la ligne des travaux de CHOQUET [1] sur les ensembles convexes faiblement complets (Cf. BOURBAKI [1] Chap. 1-2, 2eme édition), LESCARRET [2] a formulé aussi un cas ou $\underset{-}{\nabla}$ équivaut à ∇ . Cet auteur qualifie de <u>saillante</u> une fonction $g \in \Gamma_0(Y)$ dont l'épigraphe est une partie saillante de $Y \times \mathbb{R}$ (c'est-à-dire ne contient pas de droite affine) ; il faut et suffit pour cela que la plus petite variété linéaire fermée contenant dom g^* soit l'espace X entier. Il dit que $g \in \Gamma_0(Y)$ <u>est faiblement inf-complète</u> si, dans l'e.v.t. produit $Y \times \mathbb{R}$ (Y faible), l'épigraphe de g est un ensemble complet (par des raisonnements semblables à ceux de la section 7, on voit qu'il suffit pour cela de l'existence de $a \in X$ et de

$$\rho > \inf (g - < a,. >)$$

tels que l'ensemble $(g - < a,. >)^{\leq}(\rho)$ soit complet dans Y faible). On trouve alors que si g_1 et g_2 , appartenant à $\Gamma_0(Y)$, sont minorés par une même fonction $g_0 \in \Gamma_0(Y)$, faiblement inf-complète et saillante, on a $g_1 \underset{-}{\nabla} g_2 = g_1 \nabla g_2$.

10. SOUS-GRADIENTS

10.a. DÉFINITIONS. On dit que la fonction $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est sous-différentiable au point $x_o \in X$ s'il existe une fonction affine continue prenant la même valeur qu'elle au point x_o (cela implique $h(x_o) \in \mathbb{R}$) et la minorant partout sur X.

Une telle minorante peut s'écrire

$$x \mapsto < x - x_o , y_o > + h(x_o) \ ;$$

on dit qu'elle est exacte au point x_o.

On dit que la «pente» $y_o \in Y$ de cette fonction affine est un sous-gradient de h au point x_o.

L'ensemble (éventuellement vide) des sous-gradients de h au point x_o est appelé sous-différentiel de la fonction en ce point et est noté $\partial h(x_o)$.

Donc $y_o \in \partial h(x_o)$ si et seulement si le «terme constant» $h(x_o) - < x_o , y_o >$ de la fonction ci-dessus est fini et vérifie (6.2). Compte tenu de (8.1) et de la définition de h^* cela équivaut à

$$(10.1) \qquad h(x_o) \dot{+} h^*(y_o) - < x_o , y_o > = 0$$

(cette égalité implique en effet $h(x_o) \in \mathbb{R}$ et $h^*(y_o) \in \mathbb{R}$). Le sous-différentiel s'écrit dès lors :

$$(10.2) \qquad \partial h(x_o) = \{ y \in Y : h^*(y) - < x_o , y > \leqq - h(x_o) \}$$

Comme la fonction $h^* - < x_o , . >$ est convexe et s.c.i., cela montre que $\partial h(x_o)$ est une partie convexe fermée (éventuellement vide) de Y.

La Γ-régularisée de h^{**} de h étant l'enveloppe supérieure des minorantes affines continues de h, il est clair que

$$(10.3) \qquad \partial h(x_o) \neq \emptyset \Rightarrow h(x_o) = h^{**}(x_o)$$

En outre, les minorantes affines continues de h étant les mêmes que celles de h^{**}

$$(10.4) \qquad h(x_o) = h^{**}(x_o) \Rightarrow \partial h(x_o) = \partial h^{**}(x_o)$$

Enfin, si on suppose $y_o \in \partial h(x_o)$, on voit par (10.1), (10.3) et (10.4) que

$$h^{**}(x_o) \dot{+} h^*(y_o) = < x_o , y_o >$$

donc, si on invoque à nouveau (10.1), en échangeant les rôles de X et Y, on trouve l'implication

(10.5) $$y_o \in \partial h(x_o) \Rightarrow x_o \in \partial h^*(y_o)$$

La notion de sous-différentiel tire une bonne partie de son intérêt de la remarque tautologique suivante :

La fonction $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ possède un minimum, atteint au point x_o si et seulement si $0 \in \partial h(x_o)$.

10.b. Dans le cas particulier où $h = f \in \Gamma(X)$, de sorte que $h^* = g$ est sa fonction duale, les faits précédents se condensent comme suit :

Si f et g sont deux fonctions duales, les trois propriétés suivantes sont, pour un couple de points $x \in X$, $y \in Y$, équivalentes :

$$y \in \partial f(x)$$

$$x \in \partial g(y)$$

$$f(x) + g(y) = < x, y >$$

Autrement dit y est un sous-gradient de f au point x (et x un sous gradient de g au point y) si et seulement si x et y sont conjugués (Cf.§ 8.b., définition) par rapport à f et g.

Notamment $f \in \Gamma_o(X)$ présente un minimum si et seulement si la duale g est sous-différentiable à l'origine ; l'ensemble des points de X où ce minimum est atteint est le sous-différentiel $\partial g(0)$.

10.c. Un cas usuel de sous-différentiabilité est le suivant :

PROPOSITION. Si la fonction $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est convexe et si elle est finie continue au point $x_o \in X$ (pour une topologie $\mathcal{C}$ compatible avec la dualité), l'ensemble $\partial h(x_o)$ est une partie faiblement compacte non vide de Y (cet ensemble est même compact pour la topologie de la convergence uniforme dans les parties $\mathcal{C}$ relativement compactes de X, laquelle induit sur lui la même topologie que la topologie faible $\sigma(Y,X)$).

En effet, comme on l'a rappelé au § 5.a., l'hypothèse implique que h est finie et continue sur un ouvert contenant x_o. En chaque point de cet ouvert, elle prend donc la même valeur que sa régularisée s.c.i., soit $\hat{h}$. Cette régularisée est une fonction convexe qui, en vertu du § 2.f., ne peut prendre la valeur $-\infty$; elle appartient donc à $\Gamma(X)$ et coïncide ainsi (Cf. proposition 5.e.) avec la

Γ-régularisée h^{**}. Par (10.2) on obtient alors

$$\partial h(x_o) = \{y \in Y : h^*(y) - < x_o, y > \leqq - h^{**}(x_o)\} .$$

En vertu du corollaire 7.c., la fonction $h^* - < x_o, . >$ est inf-compacte pour la topologie $\sigma(Y,X)$(et aussi bien pour la topologie signalée dans l'énoncé) donc atteint son ≪inf≫, à savoir

$$- h^{**}(x_o) = - h(x_o) \in \mathbb{R}$$

sur un ensemble σ-compact non vide.

REMARQUE. Pour prouver, sous les hypothèses de la proposition précédente, que le sous-différentiel $\partial h(x_o)$ est non vide, on pourrait aussi considérer l'épigraphe

$$H = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : h(x) \leqq r\}$$

qui constitue, dans l'e.v.t. $X \times \mathbb{R}$, un ensemble convexe d'intérieur non vide. Comme $(x_o, h(x_o))$ est un point frontière de cet ensemble il existe classiquement en ce point un <u>hyperplan d'appui</u> fermé. Et cet hyperplan est ≪non-vertical≫ puisque h est majoré sur un voisinage de x_o ; c'est donc le graphe d'une minorante affine continue de h, exacte au point x_o.

Ce raisonnement a l'avantage d'être directement applicable au cas où X n'est pas localement convexe ; mais il ne fournit pas la compacité faible de $\partial h(x_o)$. D'une façon générale, si on se place dans un couple d'espaces vectoriels X et Y en dualité, le corollaire 7.c. permet, assez systématiquement, de remplacer des raisonnements fondés sur la considération d'ouverts convexes non vides dans X par des raisonnements fondés sur la considération d'ensembles convexes faiblement compacts dans Y. Du point de vue de l'auteur, ces derniers sont habituellement plus faciles. Le lecteur pourra s'en convaincre en essayant les deux voies pour démontrer le théorème de DUBOVICKII-MILJUTIN (§ 8.h.) ; voir également ci-dessous, la remarque du § 10.d.

10.d. Soient h et h' deux fonctions numériques sur X. Soit $x \in X$; il est clair que si h possède une minorante affine continue exacte au point x et h' une pareille minorante exacte au point x (cela implique que ces deux fonctions prennent leurs valeurs dans $]-\infty; +\infty]$), la somme de ces deux fonctions affines continues est une minorante de $h + h'$, aussi exacte au point x ; donc

$$\partial(h + h')(x) \supset \partial h(x) + \partial h'(x) . \tag{10.6}$$

Il est important pour les applications de formuler des cas où l'inclusion (10.6) est une égalité :

PROPOSITION. Si les deux fonctions numériques h et h' sont convexes sur X et s'il existe un point $x_o \in X$ où les deux fonctions prennent des valeurs finies, l'une d'entre elles étant continue en ce point (pour une topologie d'e.v.t. sur X donnant Y comme dual), on a

$$\partial(h + h')(x) = \partial h(x) + \partial h'(x) \tag{10.7}$$

pour tout $x \in X$.

Vu l'inclusion (10.6), il suffit de montrer que tout $y \in \partial(h + h')(x)$ se décompose en somme d'un $v \in \partial h(x)$, d'un $v' \in \partial h'(x)$. L'existence de cet y implique que h et h' ont des valeurs finies au point x et que, pour tout $u \in X$,

$$h(u) + h'(u) \geq < u - x, y > + h(x) + h'(x) \, . \tag{10.8}$$

On suppose h continue au point x_o, donc aussi la fonction

$$u \mapsto h(u) - < u - x, y > - h(x) \tag{10.9}$$

par suite de l'épigraphe de cette fonction

$$C = \{(u, \rho) \in X \times \mathbb{R} : h(u) - < u - x, y > - h(x) \leq \rho\}$$

est un ensemble convexe dont l'intérieur Ω est un ouvert convexe non vide. De même, la fonction

$$u \mapsto h'(u) - h'(x) \tag{10.10}$$

étant convexe, l'ensemble (déduit de l'épigraphe de cette fonction par une réflexion dans $X \times \mathbb{R}$)

$$D = \{(u, \rho) \in X \times \mathbb{R} : - h'(u) + h'(x) \geq \rho\}$$

est convexe.

En vertu de l'inégalité (10.8), C et D ont au plus en commun des points frontière. Donc D et Ω sont disjoints ; il en résulte classiquement l'existence d'un hyperplan fermé H qui les sépare. H sépare aussi D de l'adhérence de Ω donc de C, et comme la fonction (10.9) est finie continue au point x_o, la fonction (10.10) finie en ce même point, cet hyperplan est «non vertical» : il est le graphe d'une fonction affine m continue sur X. La séparation des ensembles se traduit par

$$- h'(u) + h'(x) \leq m(u) \leq h(u) - < u - x, y > - h(x)$$

pour tout $u \in X$. Les membres extrêmes de cette inégalité s'annulent pour $u = x$.

On en tire que la pente v' de la fonction affine-m est un sous-gradient de h' au point x et que $y - v'$ un sous gradient de h en ce point. Cela achève la démonstration.

REMARQUE. La proposition précédente a été établie par ROCKAFELLAR [6] par un raisonnement de type ci-dessus (ce qui, notons-le, ne suppose pas la topologie de X localement convexe). A titre d'une comparaison de méthodes, illustrant la remarque du § 10.c., voici la démonstration donnée primitivement dans MOREAU [11], pour le cas particulier où h et h' sont deux fonctions f et f' appartenant à $\Gamma_o(X)$. L'existence de $x_o \in X$ où f est finie continue (pour une topologie compatible avec la dualité) et où f' est finie implique, par la proposition 9.c. (argument de compacité) que la Γ-convolution des duales respectives g et g' est égale à leur inf-convolution ; de plus cette inf-convolution est exacte. Si

$$y \in \partial(f + f')(x)$$

on a donc, d'après (10.1),

$$(f + f')(x) + (g \triangledown g')(y) - \langle x,y \rangle = 0$$

Comme l'inf-convolution est exacte, il existe v et v', avec $v + v' = y$, permettant d'écrire cette égalité sous la forme

$$f(x) + g(v) - \langle x,v \rangle + f'(x) + g'(v') - \langle x,v' \rangle = 0 \tag{10.11}$$

Mais, d'après la définition des fonctions duales, on a essentiellement

$$f(x) + g(v) - \langle x,y \rangle \geq 0$$

$$f'(x) + g'(v') - \langle x,v' \rangle \geq 0$$

Rapprochées de (10.11) ces deux inégalités se précisent en égalité, c'est-à-dire $v \in \partial f(x)$ et $v' \in \partial f'(x)$, d'où $y \in \partial f(x) + \partial f'(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

10.e. Dans LESCARRET [2], apparait aussi un cas assurant l'égalité (10.7). Cet auteur note $\Gamma_1(X)$ l'ensemble des $f \in \Gamma_o(X)$ dont la fonction duale est <u>faiblement inf-complète et saillante</u> (Cf. §. 9.d.). Il montre alors que si f_1 et f_2, appartenant à $\Gamma_o(X)$, sont minorées par une même fonction $f_o \in \Gamma_1(X)$ (cela implique que f_1 et f_2 appartiennent elles-mêmes à $\Gamma_1(X)$), on a pour tout $x \in X$,

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

10.f. Soit $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ et soit $x_o \in X$ tel que $h(x_o) \in \mathbb{R}$.

Il est usuel de noter $h'(x_o,x)$ <u>la dérivée de la fonction</u> h <u>au point</u> x_o <u>dans la direction définie par</u> $x \in X$, c'est-à-dire

$$h'(x_o,x) = [\frac{d}{d\lambda} h(x_o + \lambda x)]_{\lambda = 0^+}$$

(10.11) $$= \lim_{\lambda \to 0,\ \lambda > 0} \frac{h(x_o + \lambda x) - h(x_o)}{\lambda} ,$$

si cette dérivée existe.

Visiblement la fonction

(10.12) $$x \mapsto h'(x_o,x), \quad \text{notée } h_o(x),$$

est alors <u>positivement homogène</u>. Si h est convexe, h_o est définie pour tout x et convexe (à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$); dans ce cas, l'expression écrite au second membre de (10.11) étant fonction décroissante de λ, on a aussi bien

(10.13) $$h_o(x) = \inf_{\lambda > 0} \frac{h(x_o + \lambda x) - h(x_o)}{\lambda}$$

(Cf. la notion <u>d'enveloppe conique</u>, § 8.ℓ.). Comme la fonction

$$x \mapsto \frac{h(x_o + \lambda x) - h(x_o)}{\lambda} \qquad (\lambda > 0)$$

a pour fonction polaire (§ 6.f,g.)

(10.14) $$y \mapsto \frac{1}{\lambda} [h(x_o) + h^*(y) - < x_o,y >] ,$$

le «sup» de ces fonctions polaires fournit, d'après (6.8) et (10.13), la fonction polaire de h_o. D'après la définition de h^*, l'expression (10.14) est ≥ 0 pour tout y. Il en résulte que le «sup» en question est la <u>fonction indicatrice de l'ensemble</u> (éventuellement vide) :

$$\{y \in Y : h(x_o) + h^*(y) - < x_o,y > = 0\} = \partial h(x_o) .$$

<u>Donc la Γ-régularisée</u> h_o^{**} <u>de</u> h_o <u>est la fonction d'appui de l'ensemble</u> $\partial h(x_o)$.

A une translation près dans X et dans $\mathbb{R}$ (ce qui revient, si on préfère, à se ramener au cas particulier $x = 0$, $h(0) = 0$) la fonction h_o^{**} apparaît comme l'enveloppe supérieure des minorantes affines continues de h qui sont <u>exactes au point</u> x_o.

Même pour $h \in \Gamma_o(X)$ et X de dimension finie, h_o^{**} peut différer de h_o (la proposition 8.ℓ. qu'on invoquerait ici pour la fonction $x \mapsto h(x_o + x) - h(x_o)$ ne s'applique pas car cette fonction n'est pas > 0 à l'origine ; voir toutefois § 10.h., ci-après).

Si h (qu'on a supposé finie au point x_o) <u>convexe</u>, est <u>continue</u> au point x_o pour une topologie compatible avec la dualité, la fonction $x \mapsto h(x_o + x) - h(x_o)$ est continue à l'origine, nulle et sous-différentiable en ce point. Comme cette dernière fonction majore h_o, laquelle est convexe, minorée par h_o^{**}, fonction d'appui de l'ensemble non vide $\partial h(x_o)$, il résulte du § 5.a. que h_o est finie et continue à l'origine ; elle est donc finie et continue partout en vertu de l'homogénéité. Alors $h_o = h_o^{**}$, fonction d'appui de $\partial h(x_o)$ et, dans la définition de cette fonction d'appui, le «sup» est un «max» car h_o, convexe continue, est partout sous-différentiable (proposition 10.C.), donc enveloppe supérieure de minorantes affines continue <u>exactes</u>. Bref :

PROPOSITION. (MOREAU [11]). <u>Si</u> $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$, <u>convexe, est finie et continue au point</u> x_o <u>pour une topologie compatible avec la dualité, on a, pour tout</u> $x \in Y$,

$$(10.15) \qquad \left[\frac{d}{d\lambda} h(x_o + \lambda x)\right]_{\lambda=0^+} = \max_{y \in \partial h(x_o)} < x,y > .$$

REMARQUE. Il peut être intéressant de relier ce résultat à la proposition 10.d. par le raisonnement suivant qui a l'avantage d'être directement applicable pour toute topologie d'e.v.t. sur X donnant Y comme dual, sans que cette topologie soit localement convexe.

Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, la fonction $\Phi(t) = h(x_o + tu)$ est convexe sur R, finie et continue sur un voisinage de l'origine. Elle admet donc une dérivée à droite de l'origine $\Phi'(0^+)$ et une dérivée à gauche $\Phi'(0^-)$. L'étude de Φ revient à celle de la restriction de h à la droite

$$D = \{x_o + tx \ ; \ t \in \mathbb{R}\},$$

c'est-à-dire aussi bien à l'étude de la fonction $h + \psi_D$ (égale à f sur D, à $+\infty$ ailleurs ; l'hypothèse implique, notons-le, que h prend ses valeurs dans $]-\infty, +\infty]$). Par définition $y \in Y$ appartient à $\partial(h + \psi_D)(x_o)$ si et seulement si la fonction

$$u \mapsto < u - x_o, y > + h(x_o)$$

minore $h + \psi_D$ c'est-à-dire si la fonctionù

$$t \mapsto t < x,y > + h\ (x_o)$$

minore Φ. Il faut et suffit pour cela que

$$\Phi'(0^-) \leqq < x,y > \leqq \Phi'(0^+) .$$

Donc

$$(10.16) \qquad \Phi'(0^+) = \max \{ < x,y > : y \in \partial(h + \psi_D)(x_o) \}$$

Mais, d'après la proposition 10.d.,

$$\partial(h + \psi_D)(x_o) = \partial h(x_o) + \partial\psi_D(x_o)$$

et $\partial\psi_D(x_o)$ consiste dans le sous-espace de Y orthogonal à x. Ainsi (10.16) fournit (10.15).

10.g. Si la fonction $h_o(x)$ définie en (10.12) se trouve être une <u>forme linéaire</u> continue qu'on pourra écrire $< x,y_o >$, on dit classiquement que la fonction h est <u>faiblement différentiable</u> ou <u>différentiable au sens de Gateaux</u> au point x_o ; l'élément $y_o \in Y$ est son <u>gradient</u> ou <u>différentielle</u> en ce point (parfois la fonc-(10.12), même non linéaire, est aussi appelée différentielle de h). Tel est le cas, en particulier, si X est un espace normé et que h est <u>différentiable au sens de Fréchet</u> (on dit aussi <u>fortement différentiable</u>) au point x_o. <u>Visiblement si $h \in \bar{R}^X$ est convexe et faiblement différentiable au point x_o, le sous-différentiel $\partial h(x_o)$ consiste dans l'unique élément y_o, gradient de h en ce point.</u>

La proposition 10.f. nous fournit inversement :

COROLLAIRE. <u>Si $h \in \bar{R}^X$ finie et continue au point x_o, est convexe et si le sous différentiel $\partial h(x_o)$ contient un seul élément $y_o \in Y$, la fonction est faiblement différentiable au point x_o et y_o est son gradient.</u>

D'après (10.2) une condition suffisante pour que $h(x_o)$ contienne au plus un élément est que <u>la fonction polaire</u> h^* <u>soit strictement convexe</u> c'est-à-dire que pour x et x' tels que $h(x)$ et $h(x')$ soient finis, on ait l'implication

$$x \neq x' \Rightarrow h(\alpha x + \alpha' x') < \alpha h(x) + \alpha' h(x')$$

(α et α' dans $]0,1[$ avec $\alpha + \alpha' = 1$).

10.h. A la suite de BROENDSTED, ROCKAFELLAR [1] posons :

DÉFINITION. <u>Soient</u> $f \in \Gamma_o(X)$, $g \in \Gamma_o(Y)$ <u>un couple de fonctions duales et soit</u> $\varepsilon > 0$. <u>On appelle sous-différentiel à</u> ε <u>près de</u> f <u>au point</u> x <u>l'ensemble</u> :

$$(10.17) \qquad \partial_\varepsilon f(x) = \{ y \in Y : f(x) \dot{+} g(y) - < x,y > \leq \varepsilon \}$$

Evidemment $y \in \partial_\varepsilon f(x)$ équivaut à $x \in \partial_\varepsilon g(y)$; cela signifie aussi bien que la fonction

$$u \mapsto f(x) + < u - x,y > - \varepsilon$$

minore f (et propriété semblable en échangeant f et g).

De la définition de g comme fonction polaire de f, il résulte que $\partial_\varepsilon f(x)$ est non vide si et seulement si la valeur $f(x)$ est finie. Les ensembles $\partial_\varepsilon f(x)$ décroissent avec $\varepsilon > 0$ et leur intersection (éventuellement vide) est le sous-différentiel $\partial f(x)$.

La propriété suivante (ROCKAFELLAR [7])établit d'autre part une relation entre les ensembles $\partial_\varepsilon f(x_o)$ et les dérivées directionnelles étudiées au § 10.f. :

PROPOSITION. Soit $f \in \Gamma_o(X)$ et soit $x_o \in X$ tel que $f(x_o) \in \mathbb{R}$. Lorsque $\varepsilon > 0$ décroit et tend vers zéro, la fonction d'appui de l'ensemble $\partial_\varepsilon f(x_o)$ décroit et converge simplement vers la fonction f_o (dérivée directionnelle) :

$$f_o(x) = \left[\frac{d}{d\lambda} f(x_o + \lambda x)\right]_{\lambda = 0^+}$$

En effet, par translation dans X et dans $\mathbb{R}$ (ce qui ne modifie pas l'ensemble $\partial f_\varepsilon(x_o)$ ni la fonction f_o) ramenons-nous au cas où $x_o = 0$ et $f(0) = 0$. Alors si $g = f^*$ on a

$$\partial_\varepsilon f(0) = \{y \in Y : g(y) - \varepsilon \leqq 0\}$$

La fonction duale de $g - \varepsilon$ étant $f + \varepsilon$, la proposition 8.ℓ. montre que la fonction d'appui de $\partial_\varepsilon f(0)$ est l'enveloppe conique de $f + \varepsilon$:

(10.18) $$(f + \varepsilon)_c(x) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(\lambda x) + \varepsilon}{\lambda}$$

D'autre part, puisque f est convexe, on a

$$f_o(x) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(\lambda x)}{\lambda}$$

L'expression (10.18) décroit avec ε ; une commutation d' «inf» fournit le résultat.

10.i. L'intérêt principal de la notion de sous-différentiel à ε près réside dans le théorème d'approximation suivant (BROENDSTED, ROCKAFELLAR [1]), qui domine l'étude de la sous-différentiabilité dans les espaces de Banach (Cf. § 10.j., 12.e. et 13.b.).

PROPOSITION. On suppose que X est un espace de Banach et Y son dual ; dans chacun de ces deux espaces on note $\|.\|$ la norme (noter que la topologie de la norme sur Y n'est pas compatible avec la dualité, à moins qu'on ne soit dans le cas réflexif). Soit $\varepsilon > 0$ et soient $x \in X$, $y \in Y$ tels que $y \in \partial_\varepsilon f(X)$. Alors pour tout

$\lambda > 0$ <u>il existe</u> $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y$ <u>tels que</u> $\bar{y} \in \partial f(x)$ <u>et que</u>

$$\|\bar{x} - x\| \leqq \lambda \quad , \quad \|\bar{y} - y\| \leqq \frac{\varepsilon}{\lambda} .$$

Nous reproduisons la démonstration des auteurs, inspirés d'un travail de BISHOP PHELPS [1] sur les hyperplans d'appui des ensembles convexes dans un espace de Banach.

Pour u et u' dans dom f définissons la relation $u \prec u'$ par

$$(10.19) \qquad \frac{\varepsilon}{\lambda} \|u - u'\| \leqq |f(u) - < u,y> | - |f(u') - < u',y > |$$

Il est clair que cette relation est réflexive et antisymétrique; sa transitivité résulte de la sous-additivité de la norme. Donc $\prec$ est une relation d'ordre sur l'ensemble dom f. D'après le théorème de Zorn, l'ensemble $\{u \in \text{dom } f : x \prec u\}$, ordonné par la relation précédente, possède une partie <u>totalement ordonnée maximale</u>, soit M. Comme $y \in \partial_\varepsilon f(x)$, (10.15) et (10.16) donnent si $u \prec u'$:

$$f(u) - < u,y > \geqq f(u') - < u',y > \geqq - g(y) \geqq f(x) - < x,y > - \varepsilon > - \infty$$

Il en résulte que la suite généralisée des réels $f(u) - < u,y >$ $(u \in M)$ tend en décroissant vers une limite finie ρ lorsque u croit dans M. On en déduit que l'ensemble totalement ordonné des $u \in M$ constitue une suite généralisée de Cauchy dans X. En effet les réels $f(u) - < u,y >$ $(u \in M)$ formant eux-mêmes une suite généralisée de Cauchy, on peut à tout $\delta > 0$ associer $u \in M$ tel que les inégalités $u \prec u' \prec u''$ (u' et u'' dans M) impliquent :

$$[f(u') - < u',y >] - [f(u'') - < u'',y >] \leqq \frac{\delta\varepsilon}{\lambda}$$

donc impliquent d'après la définition de $\prec$;

$$\|u' - u''\| \leqq \varepsilon$$

Puisque X est un espace de Banach, on en conclut que la suite généralisée des u croissants dans M possède une limite x dans X.

Comme f est s.c.i., on a

$$f(\bar{x}) - < \bar{x},y > = \liminf_{u \to \bar{x}} [f(u) - < u,y >]$$

et le second membre est majoré par la limite $\rho \in \mathbb{R}$ des $f(u) - < u,y >$ pour u croissant dans M ; donc $\bar{x} \in$ dom f. En outre, pour tout $u_o \in M$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\lambda}\|u_o-\bar{x}\| &= \lim_{u\in M}\frac{\varepsilon}{\lambda}\|u_o-u\| \\ &= \lim_{u\in M\,,\,u_o\prec u}\frac{\varepsilon}{\lambda}\|u_o-u\| \\ &\leqq \lim_{u\in M}[f(u_o)-<u_o,y>-f(u)+<u,y>]\,.\end{aligned}$$

Ce dernier membre vaut

$$f(u_o)-<u_o,y>-p \leqq |f(u_o)-<u_o,y>|-|f(x)-<\bar{x},y>|.$$

Donc $\bar{x}$ majore M pour l'ordre $\prec$. En particulier $x \prec \bar{x}$, de sorte que

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}\|x-\bar{x}\| \leqq f(x)-f(\bar{x})+<\bar{x}-x,y> \leqq \varepsilon.$$

Soit d'autre part $x'\in\mathrm{dom}\, f$, différent de $\bar{x}$. On ne peut avoir $\bar{x}\prec x'$ puisque M est une partie totalement ordonnée maximale de $\{u\in\mathrm{dom}\, f : x\prec u\}$; donc

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}\|\bar{x}-x'\| > [f(\bar{x})-<\bar{x},y>]-[f(x')-<x',y>]$$

Cela signifie que, dans l'espace $X\times\mathbb{R}$, les ensembles

$$C_1 = \{(z,\zeta)\in X\times\mathbb{R} : \zeta \geqq f(\bar{x}+z)-f(\bar{x})-<z,y>\}$$

$$C_2 = \{(z,\zeta)\in X\times\mathbb{R} : \zeta < -\frac{\varepsilon}{\lambda}\|z\|\}$$

sont disjoints. Mais C_1 est convexe fermé, puisque c'est l'épigraphe d'une fonction convexe s.c.i., tandis que C_2 est un cône convexe ouvert. Il existe donc un hyperplan fermé non vertical (vu la nature de C_2) qui sépare ces deux ensembles; c'est-à-dire qu'il existe $w\in Y$ tel que, pour tout $z\in X$,

$$-\frac{\varepsilon}{\lambda}\|z\| \leqq <z,v> \leqq f(\bar{x}+z)-f(\bar{x})-<z,y>\,.$$

Posons $\bar{y}=y+v$: l'inégalité de gauche signifie que

$$\|\bar{y}-y\| \leqq \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

et l'inégalité de droite que

$$\bar{y}\in\partial f(\bar{x})\,.$$

Cela achève la démonstration.

REMARQUE. La proposition précédente montre en particulier que, si X est un espace de Banach, toute $f\in\Gamma_o(X)$ est sous-différentiable en un point au moins. On conclut de là que cette proposition et ses conséquences principales (Cf. section 12) ne peuvent guère être étendues au delà du cas des espaces de Banach. En effet, Broendsted et Rockafellar construisent, dans un certain espace de Fréchet (donc métrisable complet et qui est même espace de Montel) un exemple de fonction appartenant à Γ_0 dont le sous-différentiel est partout vide. Ils s'appuient sur la construction, donnée antérieurement par KLEE [1], [2], d'ensembles convexes fermés n'ayant pas d'hyperplans d'appui fermés. BOURBAKI [1], chap. V, § 2, exercice 11, donne par ailleurs un exemple de tel ensemble dans un certain espace normé : là encore, on en déduira une fonction de Γ_0 dont le sous-différentiel est partout vide (pour un autre exemple, d'après G. Choquet, d'ensemble convexe fermé sans hyperplan d'appui fermé, voir aussi BOURBAKI [1], chap. II, 2ème édition, § 6, exercice 18).

De tels exemples montrent aussi que, à l'inverse de ce qui se passe pour les différentielles classiques, l'égalité $\partial f_1 = \partial f_2$ supposée vérifiée en tout point par deux fonctions f_1 et $f_2 \in \Gamma_0(X)$, n'implique pas nécessairement $f_1 = f_2 +$ constante (prendre pour f_1 une fonction à sous-différentiel partout vide et pour f_2 une de ses translatées). Mais dans le cas des espaces de Banach :

10.j. PROPOSITION (ROCKAFELLAR [7]. <u>Soit</u> X <u>un espace de Banach et soient</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>appartenant à</u> $\Gamma_0(X)$. <u>Si, quel que soit</u> $x \in X$, <u>on a l'inclusion</u>

(10.20) $$\partial f_1(x) \subset \partial f_2(x)$$

<u>les fonctions</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>ont pour différence une constante finie</u>.

En vertu de la proposition 10.i., il existe $a \in X$ tel que $\partial f_1(a) = \emptyset$. On va d'abord montrer que, pour tout $x \in X$,

(10.21) $$f_1(x) - f_1(a) \leqq f_2(x) - f_2(a) .$$

Fixons x et choisissons $\alpha < f_1(x) - f_1(a)$. Pour $\lambda \in R$, posons

$$Q(\lambda) = f_1[a + \lambda(x - a)] .$$

Q est une fonction convexe s.c.i. sur $\mathbb{R}$ avec $Q(0)$ fini et

$$Q(1) - Q(0) = f_1(x) - f_1(a) > \alpha$$

L'ensemble des $\lambda \in [0,1]$ tels que $Q(\lambda) < +\infty$ est un intervalle contenant 0 et la dérivée à droite Q'_+ est bien définie, non décroissante, sur cet intervalle. La théorie élémentaire des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ montre l'existence d'une suite finie (λ_i) telle que

$$0 \leqq \lambda_o < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < 1 = \lambda_{n+1}$$

$$Q(\lambda_i) < \infty \qquad (i \leqq n)$$

$$Q'_+(\lambda_i) > -\infty \quad (i \leqq n)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_o)\, Q'_+(\lambda_o) + \ldots + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)\, Q'_+(\lambda_n) > \alpha$$

Notons

$$x_i = a + \lambda_i(x - a) \quad (i \leqq n + 1) \; .$$

En termes de la fonction f_1 et de ses dérivées directionnelles, les égalités ci-dessus s'écrivent :

$$f_1(x_i) < +\infty \quad (i \leqq n)$$

$$f'_1(x_i \, , x_{i+1} - x_i) > -\infty \quad (i \leqq n)$$

$$f'_1(x_o \, , x_1 - x_o) + \ldots + f'_1(x_n \, , x_{n+1} - x_n) > \alpha \; .$$

On peut ensuite choisir des $\alpha_i \in R$ et un $\delta > 0$ tels que

$$f'_1(x_i \, , x_{i+1} - x_i) > \alpha_i \quad (i \leqq n)$$

et

(10.22) $$\alpha_o + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n > \alpha + (n+1)\delta \; .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la proposition 10.h. montre l'existence de $y_i \in Y$, $i \leqq n$, tels que

$$y_i \in \partial_\varepsilon f_1(x_i)$$

$$< x_{i+1} - x_i \, , y_i > \; > \alpha_i \; .$$

La proposition 10.i., avec $\lambda^2 = \varepsilon$, fournit alors $\overline{x_i}$ et $\overline{y_i}$ $(i \leqq n)$ tels que $\overline{y_i} \in \partial f_1(\overline{x_i})$ et

$$\|\overline{x_i} - x_i\| \leqq \sqrt{\varepsilon}, \quad \|\overline{y_i} - y_i\| \leqq \sqrt{\varepsilon} \; .$$

En choisissant ε assez petit on peut assurer

(10.23) $$< \overline{x_{i+1}} - \overline{x_i} \, , \overline{y_i} > \; > \alpha_i - \delta \quad (i \leqq n) \; ,$$

où on pose conventionnellement

$$\overline{x_{n+1}} = x_{n+1} = x$$

En choisissant en même temps x_o suffisamment voisin de a, on peut obtenir $\overline{x_o}$ aussi voisin qu'on le veut de a. Par (10.22) et (10.23) on obtient

$$< x - \overline{x_n} , \overline{y_n} > + \ldots\ldots\ldots\ldots + < \overline{x_1} - \overline{x_o} , \overline{y_o} > > 0 .$$

L'hypothèse (10.20) impliquant $\overline{y_i} \in \partial f_2(\overline{x_i})$, cela donne

$$\alpha < [f_2(x) - f_2(\overline{x_n})] + \ldots\ldots + [f_2(\overline{x_1}) - f_2(\overline{x_o})] = f_2(x) - f_2(\overline{x_o})$$

Comme tout voisinage de a contient $\overline{x_o}$ pour lequel cette inégalité a lieu, on a

$$f_2(x) - \alpha \geqq \liminf_{u \to a} f_2(u) = f_2(a)$$

car f_2 est s.c.i. . Bref :

$$\alpha < f_1(x) - f_1(a) \Rightarrow \alpha < f_2(x) - f_2(a)$$

ce qui établit (10.21).

Appelons g_1 et g_2 les duales respectives de f_1 et f_2 ; l'inclusion (10.20) équivaut à l'implication

$$f_1(x) + g_1(y) - < x,y > = 0$$
$$\Rightarrow f_2(x) + g_2(y) - < x,y > = 0 ,$$

c'est-à-dire à l'inclusion

$$\partial g_1(y) \subset \partial g_2(y)$$

pour tout $y \in Y$.

D'autre part, la proposition 10.i, invoquée ci-dessus avec $\lambda^2 = \varepsilon$, fait jouer des rôles entièrement symétriques à X et Y (bien que l'espace de Banach X n'ait pas été supposé réflexif). La même démonstration montre donc, que si $b \in \partial f_1(a) \subset \partial f_2(a)$, on a, pour $y \in Y$,

(10.24) $$g_1(y) - g_1(b) \leqq g_2(y) - g_2(b)$$

Posons

$$f_2(a) - f_1(a) = C .$$

La relation des points conjugués

$$f_1(a) + g_1(b) - < a,b > = 0$$
$$f_2(a) + g_2(b) - < a,b > = 0$$

donne

$$g_2(b) - g_1(b) = - C$$

de sorte que (10.21) s'écrit

(10.25) $$f_2 \geqq f_1 + C$$

et

(10.24) $$g_2 \geqq g_1 - C$$

En passant aux fonctions duales cette dernière inégalité donne

$$f_2 \leqq f_1 + C .$$

Vu(10.25), cela achève la démonstration.

REMARQUE. Si X est un espace de Hilbert, l'implication

$$\partial f_1 \subset \partial f_2 \Rightarrow f_2 = f_1 + \text{constante}$$

avait été primitivement signalée, avec une démonstration très simple, dans MOREAU [17].

10. k. Dans le même ordre d'idées on a le résultat plus facile suivant :

PROPOSITION. Soit X un e.v.t. quelconque et $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, finie, convexe, partout continue. Si $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est telle que $\partial f \subset \partial h$, les deux fonctions f et h diffèrent d'une constante finie.

En effet, d'après la proposition 10.c., la fonction f est partout sous-différentiable. Il en est donc de même de h qui est ainsi enveloppe supérieure de minorantes affines continues exactes : cela montre que h est convexe partout finie.

Soient x_o et x_1 dans X avec $x_1 - x_o = u \neq 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$ posons :

$$\Phi(t) = f(x_o + tu)$$

$$\theta(t) = h(x_o + tu) .$$

Les fonctions Φ et θ sont convexes finies, donc possèdent, en tout point de $\mathbb{R}$ des dérivées à droite Φ'_+ et θ'_+. La proposition montre l'existence de

$$y_t \in \partial f(x_o + tu)$$

tel que

$$\Phi'_+(t) = < u, y_t > .$$

D'après l'hypothèse, y_t est aussi un sous-gradient de h au point $x_o + tu$. Par restriction à la droite $x_o\, x_1$, on en tire que la fonction affine sur $\mathbb{R}$

$$\tau \mapsto (\tau - t) < u, y_t > + \theta(t)$$

est une minorante de θ exacte au point t, donc que

$$< u, y_t > \leqq \theta'_+ (t)$$

Bref θ'_+ majore Φ'_+ ; par une intégration (de Riemann), il en résulte :

$$\Phi(1) - \Phi(0) \leqq \theta(1) - \theta(0) ,$$

c'est-à-dire

$$f(x_1) - f(x_o) \leqq h(x_1) - h(x_o) .$$

En intervertissant x_o et x_1 on obtiendrait l'inégalité inverse, ce qui démontre la proposition.

11. SEMI-CONTINUITÉ DES MULTI-APPLICATIONS SOUS-DIFFÉRENTIELLES

11.a. Pour toute fonction $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$, le symbole ∂h, défini dans la section précédente, représente une application de X dans l'ensemble des parties de Y. Il est souvent efficace d'aborder une telle situation comme une généralisation du concept d'application de X dans Y lui-même : on dira qu'il s'agit d'une <u>application multivoque</u> (Cf. BERGE [1]) ou <u>multi-application</u> de X dans Y.

Soit T une telle multi-application ; $T(x)$ est, pour chaque $x \in X$, une partie de Y. On appelle <u>domaine effectif</u> de T l'ensemble

$$\mathrm{dom}\, T = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\} .$$

Le graphe (ou représentation graphique) de T est l'ensemble

$$\{(x,y) \in X \times Y : y \in T(x)\} .$$

C'est aussi bien le graphe de la multi-application T^- de Y dans X, <u>inverse-inférieure</u> de T, définie par :

$$T^-(y) = \{x \in X : y \in T(x)\} .$$

Evidemment

$$x \in T^-(y) \Leftrightarrow y \in T(x) ,$$

c'est-à-dire que $(T^-)^- = T$.

<u>Exemple</u> : Soient X et Y, comme dans les sections antérieures, un couple d'espaces vectoriels en dualité. Si $f \in \Gamma(X)$ et $g \in \Gamma(Y)$ est un couple de fonctions duales il résulte du § 10.b. que les multi-applications ∂f et ∂g sont chacune l'inverse inférieure de l'autre. Leur graphe est

$$\{(x,y) \in X \times Y : f(x) \dot{+} g(y) = \langle x,y \rangle \} .$$

11.b. DÉFINITION. <u>Notons X et Y deux espaces topologiques quelconques. On dit qu'une multi-application T de X dans Y est semi-continue supérieurement au sens de Bouligand-Kuratowski (nous dirons simplement s.c.s.) au point $x_o \in X$ si, pour chaque Ω, ouvert dans Y contenant $T(x_o)$, il existe un voisinage V de x_o dans X tel que</u>

$$x \in V \Rightarrow T(x) \subset \Omega .$$

Nous renvoyons à BERGE [1] pour diverses propriétés simples et importantes de cette semi-continuité (ainsi que d'une autre, dite <u>semi-continuité inférieure</u>) ; prendre garde toutefois que certains énoncés de cet ouvrage exigeraient la précision que les ensembles invoqués sont non vides.

Exemple 1 : Soit f une application (univoque, partout définie) de X dans Y. Définissons l'ensemble $T(x)$ comme constitué, pour chaque $x \in X$, de l'unique élément $f(x) \in Y$: par abus on écrira alors $f = T$. La multi-application T ainsi définie est s.c.s. au point x_o si et seulement si f est continue en ce point, au sens classique.

Exemple 2 : Soit $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, considérons la multi-application T de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ définie par

$$T(x) = [- \infty, f(x)]$$

La fonction f est s.c.s. en un point, au sens classique de la semi-continuité des fonctions numériques, si et seulement si, en ce point, la multi-application T est s.c.s. de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ (ou, aussi bien, de X dans l'espace topologique $\bar{\mathbb{R}}_{sup}$ défini au § 4.b.).

11.c. PROPOSITION. (MOREAU [16]). Soit Y un espace topologique séparé et soit $g \in \bar{\mathbb{R}}^Y$ une fonction numérique inf-compacte (Cf. § 4.d.). Alors la multi-application $g^{\leqq}$:

$$g^{\leqq}(\rho) = \{y \in Y : g(y) \leqq \rho\}$$

est s.c.s. de $\bar{\mathbb{R}}$ dans Y en tout point (et même s.c.s. de l'espace topologique $\bar{\mathbb{R}}_{sup}$, défini au § 4.b., dans Y).

Démonstration : On remarque d'abord que g est une fonction numérique s.c.s. sur Y, puisque Y étant séparé, les ensembles compacts $g^{\leqq}(\rho)$ sont fermés.

La semi-continuité supérieure de la multi-application $g^{\leqq}$ au point $+\infty$ de $\bar{\mathbb{R}}$ est triviale car $g^{\leqq}(+\infty) = Y$.

Soit $\rho_o \in [-\infty, +\infty[$ et soit Ω un ouvert de Y contenant l'ensemble (éventuellement vide) $g^{\leqq}(\rho_o)$. Il faut montrer l'existence d'un voisinage V de ρ_o dans $\bar{\mathbb{R}}_{sup}$ tel que $f^{\leqq}(\rho) \subset \Omega$ pour tout $\rho \in V$. Choisissons $\rho_1 > \rho_o$ et notons

$$K = g^{\leqq}(\rho_1) \cap \complement_Y \Omega .$$

Si K est vide, il suffira de prendre $V = [-\infty, \rho_1]$, puisque alors

$$\rho \leqq \rho_1 \Rightarrow g^{\leqq}(\rho) \subset g^{\leqq}(\rho_1) \subset \Omega .$$

Si K n'est pas vide, il est, tout au moins, compact et ne rencontre pas $g^{\leqq}(\rho_o)$. A chaque point $y \in K$, donc tel que $g(y) > \rho_o$, associons un réel

$$\gamma(y) \in]\rho_o , g(y)[;$$

en vertu de la semi-continuité inférieure de g, il s'y associe $\omega(y)$, ouvert dans

Y contenant y, tel que

$$g(\omega(y)) \subset]\, \gamma(y), +\infty\,] .$$

La compacité de K implique l'existence d'une famille finie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ telle que les $\omega(y_i)$ recouvrent K. Notons

$$\rho_2 = \min \{\rho_1, \gamma(y_1), \ldots, \gamma(y_n)\} > \rho_0 .$$

Appelant z un élément de Y, on voit que l'hypothèse $g(z) \leqq \rho_2$ entraîne $z \in g^{\leqq}(\rho_1)$ et $z \notin K$, donc entraîne $z \in \Omega$; bref $g^{\leqq}(\rho_2) \subset \Omega$. Le but est ainsi atteint avec $V = [-\infty, \rho_2]$.

11.d. X et Y désignent maintenant, comme dans les sections précécentes, un couple d'espaces vectoriels en dualité.

PROPOSITION. (Cf. MOREAU [16]). <u>Soit une fonction</u> $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ <u>majorée sur l'ensemble</u> ω, <u>ouvert dans</u> X <u>pour une topologie</u> $\mathcal{C}$ <u>compatible avec la dualité. Sur</u> Y <u>notons</u> $\mathcal{C}'$ <u>la topologie (compatible avec la dualité) de la convergence uniforme dans les parties</u> $\mathcal{C}$<u>-compactes de</u> X. <u>A tout</u> $x \in X$ <u>et tout</u> $\xi \in \mathbb{R}$ <u>on associe l'ensemble (section oblique de la fonction</u> h^*) :

$$S(x,\xi) = \{y \in Y : h^*(y) - \langle x,y \rangle + \xi \leqq 0\} ,$$

<u>ce qui définit une multi-application</u> S <u>de</u> $X \times \mathbb{R}$ <u>dans</u> Y. <u>En chaque point</u>

$$(x_0, \xi_0) \in \omega \times \mathbb{R}$$

<u>cette multi-application est s.c.s. de l'espace topologique</u> $(X, \mathcal{C}) \times R$ inf <u>dans l'espace topologique</u> $(Y, \mathcal{C}')$ (<u>donc, a fortiori, de</u> $(X,\mathcal{C}) \times \mathbb{R}$ <u>dans</u> Y <u>faible</u>).

Rappelons qu'en vertu de la proposition 7.a., pour tout $x \in \omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S(x,\xi)$ est $\mathcal{C}$-équicontinu, donc $\mathcal{C}'$-compact et, <u>a fortiori</u>, faiblement compact.

<u>Démonstration</u> : Par une translation dans X et une translation dans $\mathbb{R}$, ramenons nous au cas où x_0 est l'origine 0_X de X et où $\xi_0 = 0$. Si h^* est la constante $\omega_Y = +\infty$, la proposition est triviale avec $S(x,\xi) = \emptyset$ pour tout x et tout ξ. Cette éventualité mise à part, la Γ-régularisée h^{**} de h est finie et $\mathcal{C}$-continue dans ω puisque convexe, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, majorée sur cet ouvert.

<u>Premier cas</u> : $S(0_X, 0) = \emptyset$, c'est-à-dire

$$\min_{y \in Y} h^*(y) = -h^{**}(0) > 0$$

Choisissons $\nu \in]h^{**}(0), 0[$; en vertu de la $\mathcal{C}$-continuité de h^{**}, l'ensemble

$$V = \{x \in X : h^{**}(x) < \nu\}$$

est un $\mathcal{C}$-voisinage de 0_X. Par addition avec

$$h^{**}(x) + h^{*}(y) - < x,y > \geqq 0$$

(puisque h^{**} et h^{*} sont des fonctions duales) et avec

$$\nu > h^{**}(x)$$

(c'est-à-dire $x \in V$), l'hypothèse $\xi > \nu$ impliquera

$$h^{*}(y) - < x,y > + \xi > 0$$

Donc

$$x \in V \ , \ \xi > \nu \Rightarrow S(x,\xi) = \emptyset$$

ce qui achève la démonstration dans ce cas.

<u>Deuxième cas</u> : $S(0_X , 0) \neq \emptyset$, c'est-à-dire

$$\min_{y \in Y} h^{*}(y) \leqq 0 \ .$$

Par translation dans Y (ce qui ajoute à h^{**} une fonction linéaire continue), faisons en sorte que $S(0_X , 0)$ contienne l'origine 0_Y de Y ; à ce moment

(11.1) $$h^{*}(0_Y) \leqq 0 \ .$$

Soit Ω un $\mathcal{C}'$-ouvert de Y contenant $S(0_X , 0)$. D'après la proposition 11.c., il existe $\mu > 0$ tel que l'ensemble $\mathcal{C}'$-compact

$$K = S(0_X , - \mu) = h^{*\leqq}(\mu)$$

soit contenu dans Ω. Puisque K est $\mathcal{C}$-équicontinu, l'ensemble

$$W = \{x \in X : \max_{y \in K} < x,y > \leqq \frac{\mu}{2}\}$$

est un $\mathcal{C}$-voisinage de 0_X.

Démontrons la proposition en établissant l'implication

(11.2) $$x \in W \ , \ \xi > - \frac{\mu}{2} \Rightarrow S(x,\xi) \subset K \subset \Omega$$

Comme l'ensemble $S(x,\xi)$ décroît lorsque ξ croît, il suffit de raisonner dans l'hypothèse $\xi < 0$. Supposons donc $\xi \in]- \frac{\mu}{2} , 0[$; alors, d'après (11.1); $S(x,\xi)$ contient l'origine 0_Y , laquelle appartient aussi au demi-espace ouvert

$$\Delta = \{y \in Y : < x,y > - \xi - \mu < 0\}$$

$(x \neq 0_X)$. Si $x \in W$, l'hyperplan frontière de ce demi-espace ne rencontre pas $S(x,\xi)$; en effet, l'équation de cet hyperplan :

$$< x,y > - \xi - \mu = 0 \ , \tag{11.3}$$

conjointe à la définition de $S(x,\xi)$:

$$h^*(y) - < x,y > + \xi \leqq 0 \ ,$$

entraîne $h^*(y) - \mu \leqq 0$, c'est-à-dire $y \in K$, d'où, selon la définition de W,

$$< x,y > \leqq \frac{\mu}{2}$$

et, en rapprochant de (11.3), l'inégalité $\xi \leqq - \frac{\mu}{2}$ qui contredit l'hypothèse faite sur ξ. Puisque l'ensemble $S(x,\xi)$ est convexe, il doit être contenu dans le demi espace Δ. Pour tout $y \in S(x,\xi)$ on a donc les inégalités

$$< x,y > - \xi - \mu < 0$$

$$h^*(y) - < x,y > + \xi = 0$$

qui entraînent $f^*(y) - \mu < 0$ donc $y \in K$. Cela établit l'implication (11.2).

REMARQUE. La démonstration ci-dessus prouve plus précisément que, sous les hypothèses de l'énoncé, le point (x_o, ξ_o) possède un voisinage dans $(X,\mathfrak{E}) \times \mathbb{R}_{inf}$ tel que si (x,ξ) décrit ce voisinage, les ensembles $S(x,\xi)$ sont uniformément $\mathfrak{E}$-équicontinus, puisque tous contenus dans l'ensemble K.

11.e. Conservant les notations de la propoisition 11.d., nous en tirons le résultat suivant, qui améliore légèrement un énoncé de MOREAU [16] :

PROPOSITION. <u>Si la fonction</u> $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ <u>est $\mathfrak{E}$-s.c.i. au point</u> x_o <u>et si elle est majorée sur un $\mathfrak{E}$-voisinage de ce point, la multi-application</u> ∂h <u>est, au point</u> x_o, <u>s.c.s. de l'espace topologique</u> $(X,\mathfrak{E})$ <u>dans l'espace topologique</u> $(Y,\mathfrak{E}')$ <u>(donc, a fortiori, dans l'espace</u> Y <u>faible). Il existe en outre un $\mathfrak{E}$-voisinage</u> W <u>de</u> x_o <u>tel que les ensembles</u> $\partial h(x)$, $x \in W$, <u>soient uniformément $\mathfrak{E}$-équicontinus</u>.

Laissant en effet de côté le cas trivial ou h prend quelque part la valeur $-\infty$, ce qui donne $\partial h(x) = \emptyset$ pour tout x, on a, d'après (10.2),

$$\partial h(x) = S(x,h(x)) \ .$$

Or, par hypothèse, h est, au point x_o, continue de $(X,\mathfrak{E})$ dans $\mathbb{R}_{inf}$ et S est, d'après la proposition 11.d., s.c.s. de $(X,\mathfrak{E}) \times \mathbb{R}_{inf}$ dans $(Y,\mathfrak{E}')$ d'où la semi-continuité de ∂h. La dernière assertion découle de la remarque finale du § 11.d.

COROLLAIRE. _Si_ $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$ _est convexe sur_ X, _finie et_ $\mathcal{C}$-_continue au point_ x_o, _faiblement différentiable sur un_ $\mathcal{C}$-_voisinage de_ x_o, _l'application univoque_

$$x \mapsto \operatorname{grad} h(x)$$

est continue de $(X, \mathcal{C})$ _dans_ $(Y, \mathcal{C}')$ (_donc, a fortiori, de_ $(X, \mathcal{C})$ _dans_ Y _faible_).

REMARQUE. Sous les hypothèses de ce corollaire, la continuité de l'application $\operatorname{grad} h$ de $(X, \mathcal{C})$ dans Y faible est facile à établir directement. Il suffit pour cela de prouver que, pour chaque $u \in X$, la fonction numérique

$$x \mapsto \langle u, \operatorname{grad} h(x) \rangle \tag{11.4}$$

est $\mathcal{C}$-continue au point x_o ou simplement, puisqu'on peut changer u en $-u$, qu'elle est s.c.s.. De fait, vu la convexité de h,

$$\langle u, \operatorname{grad} h(x) \rangle = \left[\frac{d}{dt} h(x + tu)\right]_{t = 0^+}$$

$$= \inf_{t > 0} \frac{h(x + tu) - h(x)}{t}.$$

Les hypothèses impliquant la $\mathcal{C}$-continuité de h sur un voisinage de x_o, donc, pour t assez petit, la fonction

$$x \mapsto \frac{h(x + tu) - h(x)}{t}$$

et continue au point x_o. La fonction (11.4) est ainsi s.c.s. en ce point, puisqu'enveloppe inférieure d'une famille de fonctions continues.

12. MONOTONIE DES MULTI-APPLICATIONS SOUS-DIFFÉRENTIELLES

12.a. X et Y désignent, comme précédemment, un couple d'espaces vectoriels en dualité.

DÉFINITION. _On dit qu'une multi-application_ T _de_ X _dans_ Y _est monotone si, pour tout_ x _et tout_ x' _dans_ X, _tout_ $y \in T(x)$, _tout_ $y' \in T(x')$, _on a_ :

$$(12.1) \qquad < x - x' \ , \ y - y' > \geqq 0 \ .$$

Evidemment alors, la multi-application T^{-} de Y dans X (Cf. § 11.a.) est aussi monotone ; c'est là, si on préfère, une propriété de la partie de $X \times Y$ qui constitue le graphe de T et les deux espaces X et Y jouent à cet égard des rôles symétriques.

Divers auteurs (Cf. KACHUROVSKI [1], ZARANTONELLO [1], [2]) ont remarqué que si $f \in \mathbb{R}^X$ est une fonction numérique convexe et différentiable, l'application grad f (univoque de X dans Y) est monotone ; cela généralise une propriété élémentaire de toute fonction numérique convexe différentiable sur $\mathbf{R}$: sa dérivée est une fonction non décroissante (donc monotone au sens traditionnel). Ils constatèrent que le succès des méthodes dites variationnelles pour établir l'existence des solutions de problèmes fonctionnels était étroitement lié à cette monotonie : l'hypothèse de monotonie permet d'établir l'existence de solutions pour des problèmes concernant certaines applications de X dans Y qui ne sont plus des gradients de fonctions numériques. Cette idée a été largement exploitée depuis par F.E. BROWDER, J. LERAY, J.L. LIONS, G.J. MINTY, G. STAMPACCHIA, M.I. VISIK, etc... (voir bibliographie dans BROWDER [3], [4]).

MINTY [1], [2], a, le premier, étudié la monotonie de multi-applications et constaté en particulier que la multi-application sous-différentielle (appelée «gradient généralisé») d'une fonction convexe était monotone :

PROPOSITION. _Pour toute fonction_ $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ _la multi-application_ ∂h _de_ X _dans_ Y _est monotone_.

Soient en effet x et x' dans X, y et y' dans Y tels que $y \in \partial h(x)$ et $y' \in \partial h(x')$. Cela signifie que les valeurs $h(x)$ et $h(x')$ sont finies et que les fonctions

$$u \mapsto < u - x, y > + h(x)$$

et

$$u \mapsto < u - x', y' > + h(x')$$

minorent h. On en tire :

$$h(x') \geqq \langle x' - x, y \rangle + h(x)$$

$$h(x) \geqq \langle x - x', y' \rangle + h(x')$$

d'où (12.1) par addition.

Noter que la considération d'une fonction h non nécessairement convexe n'apporte pas une généralité bien substantielle car, d'après (10.3) et (10.4) on a, pour tout $x \in X$,

$$\partial h(x) \subset \partial h^{**}(x)$$

12.b. Une multi-application monotone n'est pas nécessairement une sous-différentielle (contre-exemple : une application linéaire <u>antisymétrique</u> de X dans Y est monotone). Dans le but d'obtenir une propriété caractéristique des applications sous-différentielles, ROCKAFELLAR [7] considère une famille finie de couples

$$(x_i, y_i) \in X \times Y \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

tels que $y_i \in \partial h(x_i)$. Comme ci-dessus, on écrit;

$$h(x_1) \geqq \langle x_1 - x_o \ , y_o \rangle + h(x_o)$$

$$h(x_2) \geqq \langle x_2 - x_1 \ , y_1 \rangle + h(x_1)$$

....

$$h(x_n) \geqq \langle x_n - x_{n-1}, y_{n-1} \rangle + h(x_{n-1})$$

$$h(x_o) \geqq \langle x_o - x_n \ , y_n \rangle + h(x_n)$$

(où toutes les valeurs de h sont finies), d'où, par addition,

$$(12.2) \qquad 0 \geqq \langle x_1 - x_o \ , y_o \rangle + \ldots + \langle x_n - x_{n-1}, y_{n-1} \rangle + \langle x_o - x_n \ , y_n \rangle$$

DÉFINITION. (ROCKAFELLAR [7]). <u>On dit qu'une multi-application</u> T <u>de</u> X <u>dans</u> Y <u>est cycliquement monotone si pour tout entier</u> $n > 0$ <u>et toute famille finie de couples</u> $(x_i, y_i) \in X \times Y$, $i = 0, 1, \ldots, n$, <u>tels que</u> $y_i \in T(x_i)$ <u>on a l'inégalité</u> (12.2).

Réindexons les (x_i, y_i) en posant

$$x'_i = x_{i-n} \ , \quad y'_i = y_{n-i}$$

puis omettons les ' : (12.2) se récrit sous la forme

$$0 \geqq \langle x_{n-1} - x_n \ , y_n \rangle + \ldots + \langle x_o - x_1 \ , y_1 \rangle + \langle x_n - x_o \ , y_o \rangle$$

ou, par groupement différent des termes,

$$0 \geqq \langle x_o , y_1 - y_o \rangle + \dots + \langle x_{n-1} , y_n - y_{n-1} \rangle + \langle x_n , y_o - y_n \rangle$$

Cela montre que la multi-application T^{-} de Y dans X est cycliquement monotone en même temps que T : c'est donc là une propriété du graphe de T dans laquelle les deux espaces X et Y jouent des rôles symétriques.

Evidemment si T est cycliquement monotone, elle est monotone au sens de la définition 12.a., (prendre $n = 1$).

PROPOSITION. (ROCKAFELLAR [7]). Soit T une multi-application de X dans Y. Pour qu'il existe une fonction $f \in \Gamma_o(X)$ telle que $T \subset \partial f$, il faut et il suffit que T soit cycliquement monotone.

La nécessité vient d'être établie.

Réciproquement, supposons T cycliquement monotone. La conclusion étant triviale si $T(x)$ est vide pour tout x, fixons $x_o \in X$ et $y_o \in T(x_o)$. Pour chaque $x \in X$ posons

$$f(x) = \sup \{ \langle x - x_n , y_n \rangle + \langle x_n - x_{n-1} , y_{n-1} \rangle + \dots + \langle x_1 - x_o , y_o \rangle \}$$

où le «sup» est étendu à l'ensemble des valeurs de $n > 0$ et à tous les couples $(x_i , y_i) \in X \times Y$ tels que $y_i \in T(x_i)$. On va montrer que $f \in \Gamma_o(X)$ et $T \subset \partial f$.

f est une enveloppe supérieure de fonctions affines continues et, puisque T est cycliquement monotone, $f(x_o) = 0$ (prendre $n = 1$, $x_1 = x_o$, $y_1 = y_o$). Donc $f \in \Gamma_o(X)$.

Soit $\bar{x} \in X$ et $\bar{y} \in T(x)$; soit $\alpha < f(\bar{x})$. D'après la définition de f on peut trouver une famille finie de k couples (x_i , y_i), $i = 1,2,\dots, k$, avec $y_i \in T(x_i)$ tels que

$$\alpha < \langle \bar{x} - x_k , y_k \rangle + \dots + \langle x_1 - x_o , y_o \rangle \tag{12.3}$$

Prenant maintenant $x_{k+1} = \bar{x}$ et $y_{k+1} = \bar{y}$ la définition de f donne, pour tout x,

$$f(x) \geqq \langle x - x_{k+1} , y_{k+1} \rangle + \langle x_{k+1} - x_k , y_k \rangle + \dots + \langle x_1 - x_o , y_o \rangle$$

d'où, d'après (12.3);

$$f(x) - \langle x - \bar{x}, \bar{y} \rangle > \alpha .$$

Cela ayant lieu pour tout $\alpha < f(\bar{x})$, on en conclut

$$f(x) \geqq \langle x - \bar{x}, \bar{y} \rangle + f(\bar{x})$$

quel que soit $x \in X$, c'est-à-dire $\bar{y} \in \partial f(\bar{x})$. Bref $T \subset \partial f$.

12.c. DÉFINITION. T <u>est dite cycliquement monotone maximale si son graphe dans $X \times Y$ n'est pas strictement inclus dans le graphe d'une multi-application cycliquement monotone</u>.

Autrement dit T n'admet pas de prolongement strict qui soit encore cycliquement monotone : toute multi-application T', cycliquement monotone et telle que $T \subset T'$ est nécessairement identique à T.

Il résulte de la proposition 12.b. que si T est <u>cycliquement monotone maximale il existe</u> $f \in \Gamma_0(X)$ <u>telle que</u> $T = \partial f$.

Réciproquement, ROCKAFELLAR [7] remarque :

<u>Si</u> X <u>est un espace de Banach et si</u> $f \in \Gamma_0(X)$, <u>la multi-application</u> ∂f <u>est cycliquement monotone maximale</u>.

En effet on déduit du théorème de Zorn l'existence d'une multi-application cycliquement monotone maximale, donc de la forme $\partial f'$, qui contient ∂f. La proposition 10.k. montre que $f = f' +$ constante, donc $\partial f = \partial f'$.

Le même argument montre, en invoquant la proposition 10.1. :

<u>Soit</u> X <u>un e.v.t. quelconque et</u> $f \in \mathbb{R}^X$, <u>finie convexe partout continue. La multi-application</u> ∂f <u>est cycliquement monotone maximale</u>.

En fait on va voir que, dans les deux cas ci-dessus, la multi-application ∂f est même maximale dans l'ensemble, plus grand, des applications qui sont simplement <u>monotones</u> (définition 12.a.).

12.d. La maximalité dans l'ensemble des applications monotones a été invoquée pour la première fois par MINTY [1], [2] (cela fournit des théorèmes d'existence pour les solutions de certains problèmes fonctionnels). Cet auteur constate :

PROPOSITION . <u>Soit</u> X <u>un e.v.t. quelconque et</u> $f \in \mathbb{R}^X$, <u>finie, convexe, partout continue. La multi-application</u> ∂f <u>est monotone maximale</u>.

<u>Démonstration</u> : On appelle Y le dual de l'e.v.t. X. Soit $(x_0, y_0) \in X \times Y$; il faut montrer que si pour tout couple $(x,y) \in X \times Y$, avec $y \in \partial f(x)$, on a

$$\langle x - x_0 , y - y_0 \rangle \geqq 0 \tag{12.4}$$

alors $y_0 \in \partial f(x_0)$. Ou, de façon équivalente, montrer que l'hypothèse $y_0 \notin \partial f(x_0)$ implique l'existence de $x \in X$ et $y \in \partial f(x)$ ne vérifiant pas (12.4).

On allège l'écriture en se ramenant, par translation dans X et translation dans Y au cas $x_o = 0$, $y_o = 0$. Supposons donc $0 \notin \partial f(0)$; cela signifie que $f(0)$ n'est pas le minimum de f sur X, donc qu'il existe u non nul dans X tel que

$$f(0) > f(u) .$$

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ posons

$$\Phi(\tau) = f(\tau u) .$$

La fonction Φ est convexe, partout finie, donc possède en chaque point de $\mathbb{R}$ une dérivée à droite Φ'_+. Comme $\Phi(0) > \Phi(1)$ il existe $\tau_1 \in]0, 1[$ tel que $\Phi'_+(\tau_1) < 0$. Si l'on pose $x = \tau_1 u$, cela implique, d'après la proposition 10.f., l'existence de $y \in \partial f(x)$ tel que

$$< x,y > < 0 .$$

Ce couple (x,y) ne vérifie donc pas l'inégalité (12.4) (écrite ici avec

$$x_o = 0, \quad y_o = 0) .$$

12.e. De même (ROCKAFELLAR [7]) :

PROPOSITION. <u>Si</u> X <u>est un espace de Banach et si</u> $f \in \Gamma_o(X)$, <u>la multi-application</u> ∂f <u>est monotone maximale</u>.

Reprenons en effet le raisonnement précédent jusqu'à la construction de la fonction Φ. On a toujours $\Phi(0) > \Phi(1)$ mais on n'est plus assuré que $\Phi(0)$ soit fini. On peut donc seulement affirmer l'existence de $\tau_1 \in]0, 1]$ tel que la dérivée à gauche $\Phi'_-(\tau_1)$ soit strictement négative, avec $\Phi(\tau_1)$ fini. En termes de la fonction f et de sa dérivée directionnelle, cela donne, si on pose $x = \tau_1 u$,

$$f(x) < + \infty ,$$

$$f'(x, - u) > 0 .$$

Soit $\rho \in]0, f'(x, - u)[$; la proposition 10.h. montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in \partial_\varepsilon f(x)$ tel que

$$< - u,y > > \rho$$

c'est-à-dire

$$< x,y > < -\tau_1 \rho < 0 \tag{12.5}$$

En invoquant la proposition 10.i. avec $\lambda^2 = \varepsilon$, on en tire l'existence de $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in \partial f(\bar{x})$ tels que

$$\|\bar{x} - x\| \leq \sqrt{\varepsilon} , \quad \|\bar{y} - y\| \leq \sqrt{\varepsilon} .$$

Vu (12.5), il suffit de prendre ε assez petit pour assurer $< \bar{x},\bar{y} > < 0$, ce qui achève la démonstration.

13. MINORANTES EXACTES ET HYPERPLANS D'APPUI

13.a. Toute fonction $f \in \Gamma_o(X)$ étant, par définition, l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues, cette fonction est l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues. Parmi ces dernières on peut évidemment, pour la construction de l'enveloppe supérieure, ne retenir que celles qui sont <u>maximales</u> c'est-à-dire de la forme.

$$x \mapsto < x,y > - f^*(y) \tag{13.1}$$

avec $y \in \operatorname{dom} f^*$.

On peut se demander s'il est possible d'obtenir la même enveloppe supérieure avec une famille encore plus restreinte de minorantes de f, par exemple celles qui sont exactes en quelque point (§ 10.a.) : on les obtient sous la forme (13.1) en prenant y dans l'ensemble $\operatorname{dom} \partial f^*$, appelé <u>assise</u> de f^*. Cela n'est certainement pas vrai en toute généralité puisqu'on a signalé au § 10.i. qu'une fonction $f \in \Gamma_o(X)$ pouvait n'avoir aucune minorante affine continue exacte.

La question de savoir si l'épigraphe de f, ensemble convexe fermé dans $X \times \mathbb{R}$, est égal à l'intersection de ses <u>demi-espaces d'appui fermés</u> n'est pas strictement équivalente à la précédente : un <u>hyperplan d'appui</u> de cet épigraphe n'est en effet le graphe d'une minorante exacte de f que s'il est «non vertical».

La question de savoir si C, partie convexe fermée non vide de X, est l'intersection de ses demi-espaces d'appui fermés, se réduit par contre à la précédente pour $f = \psi_C \in \Gamma_o(X)$, fonction indicatrice de C (Cf. § 13.b.).

Notons d'abord (Cf. MOREAU [11]) :

PROPOSITION. <u>Soit</u> $f \in \Gamma_o(X)$, $g \in \Gamma_o(Y)$ <u>une paire de fonctions duales. La fonction</u> g <u>est égale à l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues exactes si et seulement si</u> f <u>est égale à la</u> Γ-<u>régularisée de sa restriction à son assise</u> $A = \operatorname{dom} \partial f$, <u>c'est-à-dire si</u>

$$f = (f + \psi_A)^{**} \tag{13.2}$$

En effet la fonction affine continue $< x,.> - \beta$ est une minorante exacte de g si et seulement si $\beta = f(x)$, x appartenant à $\partial g(y)$ pour un certain $y \in Y$, c'est-à-dire $\partial f(x) \neq \emptyset$. Bref la propriété invoquée pour g signifie que cette fonction est le plus petit élément de $\Gamma(Y)$ majorant toutes les fonctions

$$v \mapsto < x,v > - f(x) \quad , \quad x \in A .$$

Comme la dualité inverse l'ordre, il est équivalent que f soit le plus grand élément de $\Gamma(X)$ minorant les duales de ces fonctions affines, c'est-à-dire (Cf.§ 8.a) les fonctions

$$u \mapsto f(x) + \psi_x(u) \quad , \quad x \in A \; .$$

Cela veut dire que f est la Γ-régularisée de l'enveloppe inférieure $f + \psi_A$ des fonctions en question.

Dans le cas où X est un espace de Hilbert (qu'on peut identifier à son dual Y), la théorie des applications «prox»(Cf. MOREAU [17]) permet de voir très simplement que toute $f \in \Gamma_o(X)$ possède les deux propriétés ci-dessus. Par la théorie de l'inf-convolution on voit qu'il en est encore de même plus généralement si X est un espace de Banach réflexif (Cf. MOREAU [11]). En fait BROENDSTED, ROCKAFELLAR [1] ont finalement établi le résultat suivant dans la ligne des travaux de BISHOP, PHELPS [1] sur les hyperplans d'appui d'ensembles convexes dans les espaces de Banach (non nécessairement réflexifs) :

13.b. PROPOSITION. On suppose que X est un espace de Banach et Y son dual (resp. Y un espace de Banach et X son dual). Soit $f \in \Gamma_o(X)$ et soit $A = \operatorname{dom} \partial f$ l'assise de cette fcnction. Alors, pour tout $x \in X$ on a

$$f(x) = \liminf_{u \to x} \, [f(u) + \psi_A(u)] \tag{13.3}$$

où «lim. inf» est pris selon la topologie de la norme sur X ou selon n'importe quelle topologie compatible avec la dualité.

En effet la fonction de x définie par le second membre de (13.3) est la régularisée s.c.i. de $f + \psi_A$, pour la topologie adoptée, c'est-à-dire la plus grande fonction minorant $f + \psi_A$ qui soit s.c.i. pour ladite topologie. Visiblement la fonction f minore $f + \psi_A$ et elle est s.c.i. pour les topologies compatibles avec la dualité, donc a fortiori pour la topologie de la norme (laquelle est plus fine que les topologies compatibles avec la dualité, strictement plus fine lorsque Y est un espace de Banach non réflexif et X son dual). Il reste donc à prouver que $f(x)$ majore le second membre de (13.3) pour tout $x \in X$.

Le fait étant trivial si $f(x) = +\infty$, supposons $x \in \operatorname{dom} f$. Nous atteindrons le but cherché en montrant que pour tout $\mu > 0$ et tout $\rho > 0$ il existe dans la boule de centre x, de rayon ρ un point où $f + \psi_A$ prend une valeur inférieure à $f(x) + \mu$. Appliquons la proposition 10.i. en prenant $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$: on choisit

$$y \in \partial_\varepsilon f(x) \; ;$$

pour tout $\lambda > 0$ il existe $\bar{x} \in X$ et $\bar{y} \in \partial f(\bar{x})$ tels que

$$\|\bar{x} - x\| \leqq \lambda \quad , \quad \|\bar{y} - y\| \leqq \frac{\alpha}{2\lambda}$$

Puisque $\bar{y}$ est un sous-gradient de f au point $\bar{x}$ on a

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + (x - \bar{x}, \bar{y})$$

donc

$$f(\bar{x}) - f(x) \leqq \|x - \bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \leqq \lambda(\|y\| + \frac{\alpha}{2\lambda})$$

Si on a choisi λ strictement inférieur à ρ et à $\frac{\alpha}{2\|y\|}$ cela donne bien

$$\|\bar{x} - x\| < \rho$$

et

$$f(\bar{x}) + \psi_A(\bar{x}) \leqq f(x) + \alpha$$

puisque $\bar{x} \in A$.

La propriété (13.3) implique, a fortiori, (13.2), donc :

COROLLAIRE 1. *Si X est un espace de Banach et Y son dual (resp. Y un espace de Banach et X son dual) toute fonction $f \in \Gamma_o(X)$ et égale à l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues exactes est égale à la Γ-régularisée de sa restriction à son assise.*

On va en tirer :

COROLLAIRE 2 (BISHOP, PHELPS [1] ; PHELPS [1]). *Soit X un espace de Banach et Y son dual (resp. Y un espace de Banach et X son dual). Tout ensemble $C \subset X$ convexe non vide, fermé pour les topologies compatibles avec la dualité, est égal à l'intersection des demi-espaces fermés (pour ces mêmes topologies) qui le contiennent et sont déterminés par des hyperplans d'appui.*

En effet la fonction indicatrice ψ_C appartient à $\Gamma_o(X)$. Il faut montrer que si $x_o \notin C$, le point x_o n'appartient pas à l'intersection des demi-espaces considérés. De fait on a $\psi_C(x_o) = +\infty$ et la fonction ψ_C est, d'après le corollaire 1, l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues exactes. Il existe donc une telle minorante, soit $x \mapsto m(x)$ telle que $m(x_o) > 0$. Le demi-espace $\overset{\leqq}{m}(0)$ contient C, ne contient pas x_o , et, puisqu'il existe x_1 tel que

$$m(x_1) = \psi_C(x_1) = 0 \ ,$$

sa frontière est bien un hyperplan d'appui.

13.c. PROPOSITION (BROENDSTED, ROCKAFELLAR [1]). *Soit X un espace de Banach et Y son dual (resp. Y un espace de Banach et X son dual) et soit $f \in \Gamma_o(X)$.*

L'assise $A = \operatorname{dom} \partial f$ est une partie de $\operatorname{dom} f$ dense dans cet ensemble, pour la topologie de la norme.

En effet, si $x_o \in \operatorname{dom} f$, c'est-à-dire $f(x_o) < +\infty$, la proposition 13.b. montre que toute boule de centre x_o contient des points où $f + \psi_A$ prend une valeur finie, c'est-à-dire des points de A.

On verrait de même que dans l'ensemble

$$\{x \in X : f(x) - \langle x, b \rangle + \rho > 0\}$$

($b \in Y$, $\rho \in \mathbb{R}$) les points où f est sous-différentiable sont denses pour la topologie de la norme.

COROLLAIRE (BISHOP, PHELPS [1] ; PHELPS [1]). Soit X un espace de Banach et Y son dual (resp. Y un espace de Banach et X son dual) et soit $C \subset X$ un ensemble convexe non vide, fermé pour les topologies compatibles avec la dualité. Dans l'ensemble des $y \in Y$ tels que la fonction $\langle \cdot, y \rangle$ soit majorée sur C, les y tels que cette fonction atteigne un maximum sur C sont denses pour la topologie de la norme. Si, en particulier, C est borné, les $y \in Y$ tels que la fonction $\langle \cdot, y \rangle$ atteigne un maximum sur C sont denses dans Y pour la topologie de la norme.

En effet, les $y \in Y$ tels que la fonction $\langle \cdot, y \rangle$ soit majorée sur C sont caractérisés par

$$\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = \psi_C^*(y) < +\infty$$

Ils forment donc l'ensemble $\operatorname{dom} \psi_C^*$. D'après la proposition 13.c. l'ensemble $\operatorname{dom} \partial\psi_C^*$ en est une partie dense pour la topologie de la norme. Or y appartient à $\operatorname{dom} \partial\psi_C^*$ si et seulement si la fonction $\langle \cdot, y \rangle - \psi_C^*(y)$ est minorante exacte de ψ_C, c'est-à-dire atteint la valeur 0 qui est son «sup» sur C.

14. JAUGES CONJUGUÉES ET DUALES DE YOUNG

14.a. X et Y sont, comme d'habitude, deux espaces vectoriels en dualité. On sait que si $A \subset X$ est un ensemble convexe fermé contenant l'origine et $B \subset Y$ son ensemble polaire, A est, symétriquement, l'ensemble polaire de B : nous dirons que les ensembles A et B sont mutuellement polaires. Soient respectivement $a \in \Gamma_0(X)$ et $b \in \Gamma_0(Y)$ les fonctions jauges de A et B : nous dirons que ce sont deux jauges conjuguées.

Comme A et B contiennent l'origine, (6.5) montre que a est la fonction d'appui de B et b celle de A.

De la définition d'une jauge il résulte que la fonction a est finie partout dans X si et seulement si l'origine est point interne de A (autrement dit si A est absorbant) ce qui équivaut à B borné dans Y (pour les topologies compatibles avec la dualité).

La fonction a est strictement positive hors de l'origine si et seulement si A ne contient pas de demi-droite (autrement dit, si son cône asymptote est réduit à $\{0\}$).

Si de plus on suppose que A est équilibré les deux conditions précédentes assurent que a constitue une norme dans X. La topologie définie par cette norme est compatible avec la dualité si et seulement si A satisfait aux deux conditions plus fortes suivantes :

1°) 0 est point intérieur de A pour une topologie compatible avec la dualité (donc en particulier et a fortiori pour la topologie de Mackey $\tau(X,Y)$) ce qui signifie (Cf. § 8.f) que B est compact pour la topologie $\sigma(Y,X)$.

2°) A est borné, ce qui signifie que B est absorbant dans Y.

Si ces conditions sont satisfaites, la topologie définie par la norme a est nécessairement identique à $\tau(X,Y)$. On peut alors constater que a est une norme d'espace de Banach réflexif si et seulement si A est, de plus, compact pour la topologie $\sigma(X,Y)$.

14.b. Dans le cas simple où a et b sont partout finies, strictement positives hors de l'origine, il est assez classique d'expliciter la relation entre ces deux fonctions sans invoquer les ensembles A et B. On trouve dans ce cas

$$b(y) = \sup_{a \in X} \frac{\langle x,y \rangle}{a(x)} \tag{14.1}$$

et symétriquement (pour la bibliographie, avec $X = Y = \mathbb{R}^n$, voir BECKENBACH, BELLMAN [1], chap. 1, § 25).

Le cas général exige des raisonnements plus minutieux. Ce qui suit s'inspire de AGGERI, LESCARRET [1], [2].

PROPOSITION. Si a et b sont des jauges duales, on a, pour tout y non nul dans Y,

$$b(y) = \sup\{\frac{< x,y >}{a(x)} : x \in X, \ < x,y > > 0\} . \tag{14.2}$$

Cette égalité reste vraie pour $y = 0$ (auquel cas l'ensemble entre accolades est vide) si on convient que le «sup» ci-dessus est pris par rapport à l'ensemble ordonné $[0, + \infty]$.

Démonstration : Appelons $b'(y)$ le second membre de (14.2). Il est visible que la fonction b' est, comme b, positivement homogène, à valeurs dans $[0, + \infty]$. Pour établir que $b = b'$ il suffit donc de prouver que l'assertion

$$b(y) \leqq 1 \tag{14.3}$$

équivaut à $b'(y) \leqq 1$, c'est-à-dire à :

$$\frac{< x,y >}{a(x)} \leqq 1 \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } < x,y > > 0 .$$

Comme on utilise naturellement la convention $\frac{p}{0} = + \infty$ pour $p > 0$ et que a prend ses valeurs dans $[0, + \infty]$, cela équivaut à :

$$< x,y > \leqq a(x) \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } < x,y > > 0 ,$$

c'est-à-dire aussi bien à :

$$< x,y > \leqq a(x) \quad \text{pour tout } x .$$

Cela s'écrit finalement

$$a^*(y) = \sup_{x \in X} [< x,y > - a(x)] \leqq 0$$

Mais, puisque a est la fonction d'appui de B, a^* est la fonction indicatrice de B ; donc cette dernière inégalité équivaut à $y \in B$, ce qui équivaut bien à (14.3).

VARIANTE I. Si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose la notation

$$\alpha^+ = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geqq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

et, pour tout $\rho \in [0, +\infty]$, la convention

$$\frac{0}{\rho} = 0$$

(14.2) s'écrit

(14.4) $$b(y) = \sup_{x \in X} \frac{\langle x, y \rangle^{+}}{a(x)}$$

où le «sup» est pris dans $[0, +\infty]$.

VARIANTE 2. (AGGERI, LESCARRET [1], [2]). Si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose la convention

$$\frac{\alpha}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha \leqq 0 \end{cases}$$

(14.2) s'écrit, pour tout y non nul,

$$b(y) = \sup_{x \in X} \frac{\langle x, y \rangle}{a(x)}$$

où le «sup» est pris dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ceci vaut d'ailleurs encore pour $y = 0$ pourvu que l'ensemble B ne soit pas réduit à $\{0\}$).

COROLLAIRE. Si a et b sont des jauges duales, on a, pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$,

(14.5) $$a(x)\, b(y) \geqq \langle x, y \rangle,$$

avec la convention $0 \times (+\infty) = +\infty$. Le couple (a, b) est d'ailleurs minimal dans l'ensemble, ordonné par l'ordre naturel de $\overline{\mathbb{R}}^X \times \overline{\mathbb{R}}^Y$, des couples de fonctions $\geqq 0$ vérifiant l'inégalité (14.5).

14.c. Les conventions d'écriture posées pour formuler la variante 1 ou le corollaire ci-dessus peuvent sembler de pure opportunité. En fait, moyennant une transformation logarithmique, la relation entre jauges duales se ramène à un schéma général de dualité des enveloppes supérieures dont les considérations des sections précédentes sont un autre cas particulier.

Soient X et Y deux ensembles quelconques et soit $c \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ dite fonction de couplage.

On dira que deux fonctions $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ et $g \in \overline{\mathbb{R}}^Y$ sont sur-duales si pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, on a

(14.6) $$f(x) \dot{+} g(y) \geqq c(x, y).$$

Cela équivaut à dire que l'une des deux fonctions, soit f par exemple, majore la fonction g^* :

(14.7) $$g^*(y) = \sup_{x \in X} \; [c(x,y) \dot{+} - f(x)] ,$$

dite <u>fonction polaire</u> de g. Dans l'ensemble des couples de fonction sur-duales, ordonné par l'ordre naturel de $\bar{\mathbb{R}}^{X+Y}$, le couple (f,g) est <u>minimal</u> si et seulement si on a simultanément $f = g^*$ et $f^* = g$: on dira en ce cas qu'il s'agit d'un couple de <u>fonctions duales</u> par rapport à la fonction de couplage c.

Revenant alors au cas où X et Y sont deux espaces vectoriels en dualité, on considère a et b, fonctions à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ définies sur X et Y respectivement. On constate que a et b sont des jauges conjuguées si et seulement si les fonctions

$$f = \mathrm{Log}\; a$$

$$g = \mathrm{Log}\; b$$

(avec, naturellement, $\mathrm{Log}\; 0 = -\infty$, $\mathrm{Log}\,(+\infty) = +\infty$) sont duales par rapport à la fonction de couplage

$$c(x,y) = \begin{cases} \mathrm{Log} < x,y > & \text{si} \quad < x,y > \; > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad < x,y > \; \leqq 0 \end{cases}$$

La transcription de (14.6) et (14.7) en termes des fonctions a et b conduit naturellement à noter $\overset{\circ}{\times}$ et $\underset{\bullet}{\times}$ les lois de composition définies dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ comme transmuées, par l'application exponentielle, des lois $\dot{+}$ et $\underset{\bullet}{+}$ de $\bar{\mathbb{R}}$: ces lois prolongent la multiplication classique selon les conventions

(14.8) $$0 \overset{\circ}{\times} (+\infty) = +\infty$$

(14.9) $$0 \underset{\bullet}{\times} (+\infty) = 0$$

14.d. Le schéma précédent englobe notamment la notion classique de <u>fonctions duales de Young</u>.

Prenons ici $X = Y = \bar{\mathbb{R}}_+$, avec pour fonction de couplage

$$c(\xi,\eta) = \xi \overset{\circ}{\times} \eta$$

(notation (14.8)). On dira que Φ et γ, applications de $\bar{\mathbb{R}}_+$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, sont <u>duales sur</u> $\bar{\mathbb{R}}_+$ si elles constituent un élément minimal dans l'ensemble des couples vérifiant

(14.10) $$\Phi(\xi) \dot{+} \gamma(\eta) \geqq \xi \overset{\circ}{\times} \eta$$

pour tout ξ et tout η dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. Il faut et suffit pour cela qu'on ait simultanément

(14.11) $$\Phi(\xi) = \sup \{\xi \overset{\cdot}{\times} \eta \underset{\cdot}{+} - \gamma(\eta) \ : \ \eta \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$$

(14.12) $$\gamma(\eta) = \sup \{\xi \overset{\circ}{\times} \eta \underset{\circ}{+} - \Phi(\xi) \ : \ \xi \in \bar{\mathbb{R}}_+\} .$$

En ce cas Φ et γ appartiennent à l'ensemble, noté $\Gamma(\bar{\mathbb{R}}_+)$, des fonctions qui sont enveloppes supérieures de familles de fonctions de la forme

$$\xi \mapsto \xi \overset{\cdot}{\times} \lambda \underset{\circ}{+} - \mu$$

avec λ et μ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$; ce sont donc des fonctions <u>convexes, non décroissantes</u>.

On note $\Gamma_o(\bar{\mathbb{R}}_+)$ l'ensemble des éléments de $\Gamma(\bar{\mathbb{R}}_+)$ autres que les deux constantes $-\infty$ et $+\infty$ (qui forment pour leur part un couple de fonctions duales sur $\bar{\mathbb{R}}_+$).

Toute $\Phi \in \Gamma_o(\bar{\mathbb{R}}_+)$ fournit un couple de fonctions duales sur $\bar{\mathbb{R}}_+$ si on lui associe sa fonction polaire $\Phi^* = \gamma \in \Gamma_o(\bar{\mathbb{R}}_+)$ définie par (14.12). On voit alors que, si $\Phi \in \Gamma_o(\bar{\mathbb{R}}_+)$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(+\infty) &= \sup \{+\infty \overset{\cdot}{\times} \eta \underset{\circ}{+} - \gamma(\eta) \ : \ \eta \in \bar{\mathbb{R}}_+\} \\ &= \sup \{+\infty \underset{\cdot}{+} - \gamma(\eta) \ : \ \eta \in \bar{\mathbb{R}}_+\} = +\infty \end{aligned}$$

(puisque γ n'est pas la constante $+\infty$).

En outre

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \sup \{0 \overset{\cdot}{\times} \eta \underset{\cdot}{+} - \Phi(\eta) \ : \ \eta \in \bar{\mathbb{R}}_+\} \\ &= \sup \{-\Phi(\eta) \ : \ \eta \in \bar{\mathbb{R}}_+\} \\ &= -\inf \Phi = -\Phi(0) \end{aligned}$$

(puisque Φ est non décroissante). Comme ni Φ ni γ n'est la constante $+\infty$, $\inf \Phi$ et $\inf \gamma$ sont strictement inférieures à $+\infty$. Donc $\Phi(0)$ et $\gamma(0)$ sont opposés et finis.

<u>Dans le cas où les fonctions</u> Φ <u>et</u> γ, <u>duales sur</u> $\bar{\mathbb{R}}_+$, <u>sont telles que</u>

$$\Phi(0) = \gamma(0) = 0 ,$$

<u>nous dirons que ce sont des fonctions duales de Young</u> (bien que la dualité de Young soit présentée classiquement pour le cas particulier de fonctions différentiables); elles prennent alors leurs valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.

EXEMPLE 1. Soient deux constantes strictement positives p et q telles que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Les fonctions

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{p}\ \xi^p$$

et

$$\gamma(\eta) = \frac{1}{q}\ \eta^q$$

constituent l'exemple le plus classique de duales de Young.

EXEMPLE 2. Si $\lambda \in [0, +\infty[$ est une constante, les fonctions

$$\Phi(\xi) = \lambda \mathring{\times} \xi = \begin{cases} \lambda\xi & \text{si } 0 \leqq \xi < +\infty \\ +\infty & \text{si } \xi = +\infty \end{cases}$$

et

$$\gamma(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqq \eta \leqq \lambda \\ +\infty & \text{si } \lambda < \eta \leqq +\infty \end{cases}$$

sont duales de Young.

REMARQUE 1. Il est classique de construire un couple de duales de Young en partant <u>a priori</u> d'une fonction $\xi \mapsto \alpha(\xi)$, nulle à l'origine, continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Notons $\eta \mapsto \beta(\eta)$ sa fonction réciproque. Alors les fonctions

$$\Phi(\xi) = \int_0^\xi \alpha(x)\ dx$$

$$\gamma(\eta) = \int_0^\eta \beta(y)\ dy$$

sont des duales de Young finies et différentiables sur $[0, +\infty[$.

Cette construction de Φ et γ à partir des deux fonctions croissantes réciproques α et β, lesquelles sont leurs dérivées, peut s'adapter au cas général (cf. AGGERI, LESCARRET [2]).

Comme dans la théorie de la dualité sur les espaces vectoriels, on dira que ξ et η <u>appartenant à</u> $[0, +\infty[$ sont <u>conjugués</u> par rapport à (Φ, γ) si on a l'égalité dans (14.10). Pour tout $\xi \in [0, +\infty[$ on posera alors

$$\begin{aligned} \partial\Phi(\xi) &= \{\eta \in [0, +\infty[\ :\ \Phi(\xi) + \gamma(\eta) = \xi\,\eta\} \\ &= \{\eta \in [0, +\infty[\ :\ \gamma(\eta) - \xi\eta \leqq -\Phi(\xi)\} \end{aligned}$$

(ensemble vide si $\Phi(\xi) = +\infty$). Si $\Phi \in \Gamma_0(\bar{R}_+)$, l'ensemble

$$\operatorname{dom} \Phi = \{\xi \in \bar{R}_+ : \Phi(\xi) < +\infty\}$$

est un segment d'origine 0, contenant ou non son extrémité. La théorie élémentaire des fonctions convexes sur R montre que Φ possède, en tout point ξ de dom Φ une dérivée à gauche $\Phi'_-(\xi)$ (conventionnellement $\Phi'_-(0) = 0$) et une dérivée à droite $\Phi'_+(\xi)$ (toutes deux finies si ξ est intérieur à dom Φ). Pour tout $\xi \in \operatorname{dom} \Phi$ on a alors

$$\partial\Phi(\xi) = [\Phi'_-(\xi),\ \Phi'_+(\xi)] \cap R$$

Les fonctions Φ'_- et Φ'_+ sont respectivement s.c.i. et s.c.s. sur l'intérieur de dom Φ, égales sauf sur un ensemble dénombrable (Cf. BOURBAKI [3], chap. 1, § 4). Elles sont non décroissantes et, plus précisément,

$$\xi' < \xi'' \Rightarrow \Phi'_-(\xi') \leqq \Phi'_+(\xi') \leqq \Phi'_-(\xi'') \leqq \Phi'_+(\xi'')$$

ce qui exprime la <u>monotonie</u> de l'application multivoque $\partial\Phi$.

On montre que, pour tout $\xi \in \operatorname{dom} \Phi$:

$$\Phi(\xi) = \int_0^\xi \Phi'_-(x)\, dx = \int_0^\xi \Phi'_+(x)\, dx$$

La fonction γ se construit de même à partir de la multi-application $\partial\gamma$, laquelle est <u>l'inverse inférieur</u> de $\partial\Phi$ (Cf. § 11.a.).

REMARQUE 2. Il est également possible de rattacher la dualité de Young à la dualité des espaces vectoriels, telle qu'elle a été développée dans les sections précédentes. A deux fonctions Φ et γ, définies sur $\bar{R}_+$, à valeurs dans $\bar{R}$ et telles que $\Phi(+\infty) = \gamma(+\infty) = +\infty$ correspondent biunivoquement les fonctions $\bar{\Phi}$ et $\hat{\gamma}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\bar{\Phi}(\xi) = \begin{cases} \Phi(\xi) & \text{si } 0 \leqq \xi < +\infty \\ 0 & \text{si } -\infty < \xi < 0 \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}(\eta) = \begin{cases} \gamma(\eta) & \text{si } 0 \leqq \eta < +\infty \\ +\infty & \text{si } -\infty < \eta < 0 . \end{cases}$$

On trouve alors que Φ et γ sont des duales de Young si et seulement si $\bar{\Phi}$ et $\hat{\gamma}$ sont duales, au sens de la section 8, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ mis en dualité avec lui-même par la forme bilinéaire $< \xi, \eta > = \xi\eta$.

14.e. PROPOSITION (AGGERI, LESCARRET [1], [2]). Soient X et Y deux espaces vectoriels en dualité et soient $a \in \Gamma_o(X)$, $b \in \Gamma_o(Y)$ deux jauges conjuguées. Soient Φ et γ deux fonctions duales sur $\bar{\mathbb{R}}_+$, finies au voisinage de l'origine (donc ni l'une ni l'autre n'est de la forme $\rho + \psi_o$, $\rho \in \mathbb{R}$ constante finie). Alors

$$f = \Phi \circ a \quad \text{et} \quad g = \gamma \circ b$$

sont des fonctions duales au sens de la section 8.

En rapprochant les inégalités (14.5) et (14.10) on a, pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$,

$$f(x) \dot{+} g(y) = \Phi[a(x)] \dot{+} \gamma[b(y)] \tag{14.13}$$

$$\geqq a(x) \overset{\circ}{\times} b(y) \geqq < x, y >$$

Donc f et g sont sur-duales, c'est-à-dire que $f^* \leqq g$; on doit établir, pour tout $y \in Y$, l'inégalité inverse

$$f^*(y) \geqq g(y) \tag{14.14}$$

Ier cas : y tel que $b(y) = +\infty$; puisque b est la fonction d'appui de A, pour tout $k \in \mathbb{R}$ il existe alors $x_k \in A$ (donc $a(x_k) \leqq 1$) tel que

$$< x_k, y > > k \tag{14.15}$$

Par hypothèse il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(\varepsilon) = m \in \mathbb{R}$. Si on prend $x = \varepsilon x_k$, on a

$$a(x) = \varepsilon\, a(x_k) \leqq \varepsilon$$

donc

$$f(x) = \Phi[a(x)] \leqq \Phi(\varepsilon) = m$$

et d'après (14.15),

$$< x, y > > \varepsilon k ,$$

d'où

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} [< x, y > - f(x)] > \varepsilon k - m .$$

Comme k peut être choisi arbitrairement grand, cela montre que $f^*(y) = +\infty$ et établit l'inégalité (14.14).

2ème cas : $b(y) \in \mathbb{R}$. Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha < g(y) = \sup \{\xi b(y) - \Phi(\xi) \; : \; \xi \in \mathbb{R}_+, \; \Phi(\xi) < +\infty\}$$

(en effet, dans l'expression (14.12) de la fonction γ, les valeurs de ξ telles que $\Phi(\xi) = +\infty$ peuvent être omises pour la construction du «sup»). Il existe donc $\xi \in [0, +\infty[$ tel que

(14.16) $$\alpha < \xi b(y) - \Phi(\xi)$$

Si $\xi = 0$, (14.16) se réduit à

$$\alpha < - \Phi(0) = < 0, y > - \Phi[a(0)]$$
$$\leq \sup_{x \in X} [< x, y > - f(x)] = f^*(y) .$$

Si $\xi > 0$, (14.16) s'écrit

$$\frac{1}{\xi} [\alpha + \Phi(\xi)] < b(y) = \sup_{x \in A} < x, y >$$

ce qui montre l'existence de $x_o \in A$ tel que

$$\alpha < \xi < x_o, y > - \Phi(\xi)$$

Comme $a(x_o) \leqq 1$ et que la fonction Φ est non décroissante, on a

$$\Phi[a(\xi\, x_o)] = \Phi[\xi\, a(x_o)] \leqq \Phi(\xi)$$

donc

$$\alpha < < \xi\, x_o, y > - f(\xi\, x_o) \leqq f^*(y)$$

Bref, quel que soit ξ, on a l'implication

$$\alpha < g(y) \Rightarrow \alpha \leqq f^*(y)$$

ce qui établit (14.14) d'où $g = f^*$.

Symétriquement, le même raisonnement montre que $f = g^*$.

REMARQUE. On ne peut pas s'affranchir de l'hypothèse que Φ et γ sont finies au vosinage de l'origine. Si on prend en effet ($\rho \in \mathbb{R}$ constante) :

$$\Phi(\xi) = \rho + \psi_o(\xi) = \begin{cases} \rho & \text{si } \xi = 0 \\ + \infty & \text{si } \xi \in]0, + \infty] \end{cases}$$

cela donne

$$\gamma(\eta) = \begin{cases} - \rho & \text{si } \eta \in [0, + \infty[\\ + \infty & \text{si } \eta = + \infty \end{cases}$$

Donc

$$g = \gamma \circ b = - \rho + \psi_C$$

avec

$$C = \{y \in Y : b(y) < + \infty\}$$

C est l'ensemble des points qui sont absorbés par B, c'est-à-dire le cône <u>projetant</u> B (depuis l'origine, laquelle appartient à B) ; il est connu que ce cône convexe n'est pas nécessairement fermé : alors $-\rho + \psi_C$ n'appartient pas à $\Gamma(Y)$ et ne peut donc être une fonction duale.

<u>Exemple</u> 1. Si on prend les fonctions Φ et γ définies au § 14.d., exemple 2, avec $\lambda = 1$, c'est-à-dire

$$\Phi(\xi) = \xi$$

$$\gamma(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqq \eta \leqq 1 \\ +\infty & \text{si } 1 < \eta \leqq +\infty \end{cases}$$

on a $f = \Phi \circ a = a$ et $g = \psi_B$. On retrouve donc que $a = \psi_B^*$, fonction d'appui de B.

<u>Exemple</u> 2. Si X est un espace normé et Y son dual, on peut prendre pour a et b les normes respectives de ces deux espaces. En invoquant alors les fonctions Φ et γ définies au § 14.d., exemple 1, on voit que $f = \frac{1}{p}\|.\|^p$ et $g = \frac{1}{q}\|.\|^q$ sont des fonctions duales.

Par exemple si X est un espace de Hilbert, identifié avec son dual Y, cela montre que la fonction $\frac{1}{2}\|.\|^2$ est à elle même sa propre duale (elle est d'ailleurs la seule à posséder cette propriété : Cf. MOREAU [17])

Dans le cas particulier où X est un <u>espace de Banach réflexif</u> (donc aussi Y) les fonctions duales ci-dessus prennent une importance particulière ; elles sont partout finies et continues pour les topologies fortes de X et Y (lesquelles sont dans ce cas compatibles avec la dualité) : par le corollaire 8.f. il en résulte que toutes leurs «sections» sont faiblement compactes. Par suite (Cf. proposition 9.c.) leur inf-convolution par toute fonction de Γ_0 est égale à la Γ-convolution ; cette inf-convolution est exacte et fournit une fonction partout finie et continue : c'est une opération <u>régularisante</u>. Au lieu de f on pourra pour tout $\varepsilon > 0$, considérer le produit à droite f^ε (Cf. § 3.f.) qui possède les mêmes propriétés. Lorsque ε décroit vers zéro, $f\varepsilon$ tend en croissant vers l'élément neutre ψ_0. On a là une technique pour l'approximation de toute fonction de Γ_0 par une suite croissante de fonctions régularisées (Cf. MOREAU [11]). Si on a pu obtenir que la boule unité de Y soit strictement convexe, g sera une fonction strictement convexe et les régularisées qu'on obtient dans Γ_0 (X) seront faiblement différentiables (Cf. corollaire 10.g.)

14.f. Les multi-applications sous-différentielles associées à un couple de fonctions duales construit par la proposition 14.d. ont été étudiées par AGGERI, LESCARRET [1], [2]. La structure de ces multi-applications est précisée par la remarque suivante qui découle immédiatement des inégalités (14.13) :

$x \in X$ <u>et</u> $y \in Y$ <u>sont conjugués par rapport au couple de fonctions duales</u>

$$f = \Phi \circ a \quad \underline{\text{et}} \quad g = \gamma \circ b$$

<u>si et seulement si on a les égalités</u>

(14.17) $$a(x) \stackrel{\circ}{\times} b(y) = < x,y >$$

<u>(cela implique que</u> $a(x)$ <u>et</u> $b(y)$ <u>sont finis) et</u>

(14.18) $$f(x) \dot{+} g(y) = a(x)\ b(y)$$

Cette dernière égalité signifie que les réels $a(x)$ et $b(y)$ sont conjugués par rapport aux fonctions Φ et γ, duales sur $\bar{R}_+$. L'égalité (14.17) définit une correspondance entre rayons, dits <u>rayons conjugués</u> par rapport aux jauges conjuguées a et b.

Des hypothèses convenables de convexité stricte peuvent faire que la multi-application ∂f soit univoque. On généralise par là certaines applications d'un espace de Banach dans son dual définies primitivement par BEURLING, LIVINGSTON [1] sous le nom de «duality mappings» (le prototype des «duality mappings» est l'application canonique d'un espace de Hilbert dans son dual, laquelle n'est autre que l'application ∂f pour $f = \frac{1}{2} \|.\|^2$). AGGERI, LESCARRET [1], [2] généralisent ainsi les théorèmes d'existence formulés par BROWDER [1], [2] pour les solutions de certains problèmes fonctionnels invoquant des «duality mappings».

15. BIBLIOGRAPHIE

AGGERI (J.C.)

[1] Les fonctions convexes continues et le théorème de Krein-Milman, C.R. Acad. Sci. Paris, 262 (1966), 229-232.

AGGERI (J.C.), LESCARRET (C.)

[1] Fonctions convexes duales associées à un couple d'ensembles mutuellement polaires, C.R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 6011-6014.

[2] Sur une application de la théorie de la sous-différentiabilité à des fonctions convexes duales associées à un couple d'ensembles mutuellement polaires, Faculté des Sciences, Séminaire de Mathématique, 1965 (multigraphié, 14 p.).

BECKENBACH (E.F.), BELLMAN (R.E.)

[1] Inequalities, Springer, 1961.

BEHNERT-SMIRNOV (K.N.)

[1] Ueber eine notwendige und hinreichende Bedingung der gleichgradigen Stetitgkeit von Funktionenmengen, Math. Annalen, 127 (1954), 424-432.

BELLMAN (R.E.), KALABA (R.E.)

[1] Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems, Elsevier, 1965.

BELLMAN (R.E.), KARUSH (W.)

[1] On a New Functional Transform in Analysis : The Maximum Transform, Bull. Amer. Math. Soc., 67 (1961).

[2] Mathematical Programming and the Maximum Transform, Journal S.I.A.M. 10 (1962).

[3] On the Maximum Transform and Semigroups of Transformations, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), 516-518.

[4] On the Maximum Transform, J. Math. Analysis Appl., 6 (1963), 67-74.

[5] Functional Equations and the Theory of Dynamic Programming - XII, An Application of the Maximum Transform, J. Math. Analysis Appl., 6 (1963), 155-157.

BERGE (C.)

[1] Espaces topologiques, fonctions multivoques, Dunod, (1959).

BERGE (C.), GHOUILA-HOURI (A.)

[1] Programmes, jeux et réseaux de transports, Dunod, (1962).

BEURLING (A.), LIVINGSTON (A.E.)

[1] A theorem on duality mappings in Banach space, Arkiv for Matematik, 4 (1960-63), 405-411.

BIRNBAUM (Z.), ORLICZ (W.)

[1] Ueber die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Studia Math., 3 (1931), 1-67.

BISHOP (E.), PHELPS (R.R.)

[1] The support functionals of a convex set, in KLEE (V.L.), editor, Convexity, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 7 (1963), 27-35.

BONNENSEN (T.), FENCHEL (W.)

[1] Theorie der konvexen Körper, Springer, (1934) et Chelsea Pub. Co., (1948).

BOURBAKI (N.)

[1] Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Act. Sci. Ind., fasc. 1189 et 1229.

[2] Intégration, Hermann, Act. Sci. Ind., fasc. 1175.

[3] Fonctions d'une variable réelle, Hermann, Act. Sci. Ind., fasc. 1074.

BROENDSTED (A.)

[1] Conjugate convex functions in topological Vector spaces, Mat.-fys. Medd. Dansk. Vid. Selsk., 34 (1964), n°2, 27.

[2] Milman's theorem for convex functions, à paraître dans Math. Scand.

BROENDSTED (A.), ROCKAFELLAR (R.T.)

[1] On the subdifferentiability of convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 605-611.

BROWDER (F.E.)

[1] On a theorem of Beurling and Livingston, Canad. J. Math., 17 (1965), 367-372.

[2] Multivalued monotone non-linear mappings in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 118 (1965), 338-351.

[3] On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 56 (1966), 419-425.

[4] Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities Proc. Nat. Acad. Sci. 56 (1966), 1080-1086.

CHOQUET (G.)

[1] Ensembles et cônes convexes faiblement complets, C.R. Acad. Sci. 254 (1962), 1908-1910.

[2] Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, Proc. Int. Congr. Math., Stockholm, 1962, p. 1130.

COURANT (R.), HILBERT (D.)

[1] Methods of mathematical physics, Interscience, 1953, vol. 1.

DIETER (U.)

[1] Theorie der Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen, Christian-Albrechts Universität, Kiel, (1964).

[2] Optimierungsaufgaben in Topologischen Vektorräumen, Z. Wahrscheinliehkeitstheorie verw. Gebiete, 5 (1966), 89-117.

DUBOVICKII (A.Ja.), MILJUTIN (A.A.)

[1] Extremum problems with constraints, Soviet Math. 4 (1963), 452-455, trad. de : Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., 1949 (1963) 759-762.

[2] Problèmes extrémaux en présence de contraintes, Zh. Vychisl. Mat. Fiz., 5 (1965), 395-453 (en russe).

EGGLESTON (H.G.)

[1] Convexity, Cambridge U.P., (1958).

FAN (K.)

[1] A generalization of the Alaoglu-Bourbaki theorem and its applications, Math. Zeitschr., 88 (1965), 48-60.

FENCHEL (W.)

[1] On conjugate convex functions, Canad. J. of Math., 1 (1949), 73-77.

[2] Convex cones, sets and functions. Lecture notes, Princeton University, (1953).

HÖRMANDER (L.)

[1] Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, Arkiv för Mat., 3 (1954), 181-186.

HARDY (G.H.), LITTLEWOODS (J.E.), POLYA (G.)

[1] Inequalities, Cambridge U.P., 1952.

JONES (W.L.)

[1] On conjugate functionals, Doctoral dissertation, Columbia University, (1960).

KACHUROVSKI (R.I.)

[1] Sur les opérateurs monotones et les fonctionnelles convexes, Uspekhi 15 (1960) 213-215 (en russe).

KARLIN (S.)

[1] Mathematical Methods and theory in games, Programming and Economics, vol. 1, Addison Wesley, 1960.

KLEE (V.L.)

[1] On a question of Bishop and Phelps, Amer. J. Math. 85 (1963) 95-98.

[2] Extremal structure of convex sets, II, Math. Z. 69 (1958), 90-104.

KNESER (H.)

[1] Konvexe Räume, Archiv der Math., 3 (1952), 198-206.

KRASNOSEL'SKII (M.A.), RUTICKII (Ya.B.)

[1] Convex functions and Orlicz spaces (trad. anglaise), Noordhoff, (1961).

LESCARRET (C.)

[1] Cas d'addition des applications monotones maximales dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris, 261 (1965), 1160-1163.

[2] Sur la sous-différentiabilité d'une somme de fonctionnelles convexes semi-continues inférieurement, C.R. Acad. Sci., 262 (1966), 443-446.

MANDELBROJT (S.)

[1] Sur les fonctions convexes, C.R. Acad. Sci., 209 (1939), 977-978.

MINTY (G.J.)

[1] Monotone (non linear) operators in Hilbert spaces, Duke Math. J., 29 (1962), 341-346.

[2] On the monotonicity of the gradient of a convex function, Pac. J. Math., 14 (1964), 243-247.

MOKOBODZKI (G.)

[1] Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s.c.i. ou s.c.s.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du Potentiel), 6 (1962), n° 9.

MOREAU (J.J.)

[1] Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires, C.R. Acad. Sci. Paris, 255 (1962), 238-240.

[2] Fonctions convexes en dualité, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, (1962) (multigraphié 18 pages).

[3] Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien, C.R. Acad. Sci. Paris, 255 (1962), 2897-2899.

[4] Applications "Prox", Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, (1963) (multigraphié, 20 pages).

[5] Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss, C.R. Acad. Sci., Paris, 256 (1963), 871-874.

[6] Propriétés des applications "Prox", C.R. Acad. Sci. Paris, 256 (1963), 1069-1071.

[7] Inf-convolution, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, (1963) (multigraphié, 48 pages).

[8] Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel, C.R. Acad. Sci. Paris, 256 (1963), 5047-5049.

[9] Fonctions à valeurs dans $[-\infty,+\infty]$; notions algébriques, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, (1963) (multigraphié, V + 37 pages).

[10] Remarques sur les fonctions à valeurs dans $[-\infty,+\infty]$ définies sur un demi-groupe. C.R. Acad. Sci. Paris, 257 (1963), 3107-3109.

[11] Etude locale d'une fonctionnelle convexe, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, (1963) (multigraphié, 25 pages).

[12] Fonctionnelles sous-différentiables, C.R. Acad. Sci. Paris, 257 (1963), 4117-4119.

[13] Sur la fonction polaire d'une fonction semi-continue supérieurement, C.R. Acad. Sci. Paris, 258 (1964), 1128-1131.

[14] Théorème "inf-sup", C.R. Acad. Sci. Paris, 258 (1964), 2720-2722.

[15] Sur la naissance de la cavitation dans une conduite, C.R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964), 3948-3951.

[16] Semi-continuité du sous-gradient d'une fonctionnelle, C.R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 1067-1070.

[17] Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 273-299.

[18] One-sided constraints in hydrodynamics, à paraître dans : ABADIE (J.), editor, Non linear programming, North Holland Pub. Co., 1967, p. 261-279.

[19] Quadratic programming in Mechanics : Dynamics of one-sided constraints, S.I. A.M. Journal on Control, 4 (1966), 153-158 (Proceedings of the First Int. Conf. on Programming and Control).

[20] Convexity and duality, à paraître dans CAIANIELLO (E.R.), editor, Functional analysis and optimization, Academic Press.

[21] Principes extrémaux pour le problème de la naissance de la cavitation, J. de Mécanique, 5 (1966), n° 4.

[22] Sous-différentiabilité, à paraître dans FENCHEL (W.), editor, Proceedings of the 1965 Colloquium on Convexity, Copenhagen.

MORREY (C.B.)

[1] Multiple integrals in the calculus of variations, Colloquium Lectures, Amer. Math. Soc., (1964).

[2] Multiple integrals in the calculus of variations, Springer, (1966).

PHELPS (R.R.)

[1] Weak* support points of convex sets in E*, Israel J. Math. 2 (1964), 177-182.

ROCKAFELLAR (R.T.)

[1] Convex Functions and Dual Extremum Problems, doctoral dissertation (multilith), Harvard, 1963, 166 pages.

[2] Duality theorems for convex functions, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 189-192.

[3] A combinatorial algorithm for linear programs in the general mixed form, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12 (1964), 215-225.

[4] Minimax theorems and conjugate saddle-functions, Math. Scand., 14 (1964), 151-173.

[5] Helly's theorem and minima of convex functions, Duke Math. J., 32 (1965), 381-398.

[6] Extensions of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J., 33 (1966), 81-90.

[7] Characterization of the subdifferentials of convex functions, Pacific J. Math. 17 (1966), 497-510.

[8] A monotone convex analog of linear algebra, to appear in the Proceedings of the 1965 Colloquium on Convexity held in Copenhagen.

[9] Level sets and continuity of conjugate convex functions, Trans. Amer. Math. Soc., 123 (1966), 46-63.

[10] Dual extremum problems involving convex functions, to appear in Pacific J. Math. in 1966.

[11] Conjugates and Legendre transforms of convex functions, to appear in the Canadian J. Math.

[12] A general correspondence between dual minimax problems and convex programs, submitted to the Pacific J. Math.

[13] Monotone Processes of Convex and Concave Type, submitted for publication as a Memoir of the Amer. Math. Soc., 93 pages.

[14] Polyhedral convex sets with some closed faces missing, submitted to Proc. Amer. Math. Soc.

[15] Convex programming and systems of elementary monotone relations, submitted to J. Math. Anal. and Appl.

[16] The basic vectors of a subspace of R^n , submitted to Pacific J. Math.

[17] Convex Analysis, mimeographed lecture notes (Princeton University, 1966), 216 pages.

[18] Integrals which are convex functionals, submitted to the Pacific J. Math.

SCHWARTZ (L.)

[1] Sous-espaces hilbertiens et antinoyaux associés, Séminaire Bourbaki, 14 (1961-62), n° 238.

[2] Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants), J. Analyse Math., 8 (1964), 115-256.

SEMADENI (Z.)

[1] Selected topics on functional analysis and categories, Lectures notes, Aarhus Universitet, (1965).

STONE (M.H.)

[1] Postulates for the barycentric calculus, Annali di Matematica, (4), 29 ( ) 25-30.

VALENTINE (F.A.)

[1] Convex sets, Mc Graw-Hill (1964).

YOUNG (W.H.)

[1] On classes of summables functions and their Fourier series, Proc. Roy. Soc. (A) 87 (1912), 225-229.

ZARANTONELLO (E.H.)

[1] Solving functional equations by contractive averaging, Math. Res. Center (Univ. of Wisconson), Tech. Rep. n° 160 (1960).

[2] The closure of the numerical range contains the spectrum, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 781-787.