Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

S. Mizohata

Quelques problèmes au bord, du type mixte, pour des équations hyperboliques

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1966-1967), p. 23-60
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1966-1967___1_23_0>

QUELQUES PROBLÈMES AU BORD, DU TYPE MIXTE, POUR DES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES

par S. MIZOHATA

1. Introduction

Le problème mixte pour des équations hyperboliques a été traité par plusieurs auteurs. J. Schauder et Krzyzanski [8] ont traité le problème mixte, du type Dirichlet, pour les équations hyperboliques du second ordre. Ladyženskaya [9] a traité ce problème et elle a considéré aussi le cas où la condition au bord est du type Neumann. D'autre part, pour des équations hyperboliques d'ordre supérieur, Agmon a fait une recherche [1]. Mais il a supposé que le domaine est un demi-espace et que les coefficients des opérateurs différentiels qui interviennent sont constants. Signalons que, pour les systèmes hyperboliques symétriques, il y a des travaux de Friedrichs [7], Phillips [12], Agronovič [2].

Dans cet exposé, je vais traiter d'abord les équations du second ordre au point de vue du semi-groupe, et puis je vais montrer quelques résultats sur des équations d'ordre supérieur au même point de vue. Le traitement que je vais montrer est inspiré par le travail de Yosida [14], et aussi celui de Lions [10]. Les résultats concernant les équations du second ordre ne sont pas nouveaux à de petits détails près.

2. Rappel (semi-groupe)

Nous allons exposer quelques résultats concernant le semi-groupe que nous allons utiliser dans la suite.

Soit E un espace de Banach. A est un opérateur linéaire fermé dont le domaine de définition $D(A)$ est dense dans E. Rappelons le théorème de Hille-Yosida.

THÉORÈME 2.1. Supposons qu'il existe deux constantes C (> 0) et β telles que

$$\|(\lambda I-A)^{-m}\| \leq C(\lambda-\beta)^{-m} \quad (m = 1,2,\dots), \qquad \lambda > \beta . \tag{2.1}$$

Il existe alors un semi-groupe unique T_t ayant A comme générateur infinitésimal.

Remarque. Dans l'application, il arrive assez souvent que (2.1) est vérifiée sous la forme très forte :

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\| \leq (\lambda-\beta)^{-1} \qquad (\lambda > \beta) \tag{2.2}$$

Considérons maintenant l'équation d'évolution dans E

$$\frac{d}{dt} u(t) = Au(t) + f(t) \tag{2.3}$$

Appliquons le Théorème 2.1. On a le

THÉORÈME 2.2. *Supposons* (2.1) *ou* (2.2). *Etant donnés la valeur initiale* $u_0 \in D(A)$ *à* $t = 0$ *et le second membre* $f(t)$ *tel que* $t \to f(t)$, $Af(t)$ *soient continus dans* E *pour* $t \geq 0$, *il existe alors une solution unique* $u(t)$, $t \geq 0$, *de* (2.3) *telle que* $u(t)$ $(\in D(A))$ *soit une fois continuement différentiable à valeurs dans* E. *La solution* $u(t)$ *se représente par*

$$u(t) = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds \ . \tag{2.4}$$

Inégalité d'énergie.- Supposons les hypothèses du Théorème 2.2. D'après (2.4),

$$\|u(t)\| \leq C \exp(\beta t)\|u_0\| + C \int_0^t \exp\{\beta(t-s)\}\|f(s)\| ds \ . \tag{2.5}$$

Si nous supposons de plus,

(2.6) $f(t)$ est continuement différentiable dans E

on a

$$u'(t) = T_t(Au_0 + f(0)) + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds \tag{2.7}$$

D'où,

$$\|u'(t)\| \leq C \exp(\beta t)\|Au_0 + f(0)\| + C \int_0^t \exp\{\beta(t-s)\}\|f'(s)\| ds \ . \tag{2.8}$$

Chapitre I

CAS DES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE

1. Conditions au bord.

Dans ce chapitre, nous allons considérer l'équation suivante,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + a_1(x,D)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + a_2(x,D)u(x,t) = f(x,t). \tag{1.1}$$

Explicitons les conditions; $x \in \mathbb{R}^n$.

$$a_1(x,D) = \Sigma\, h_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c_1(x) \tag{1.2}$$

$$a_2(x,D) = -\Sigma\, a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma\, b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c_2(x), \tag{1.3}$$

où $h_i(x)$ (fonctions à valeurs réelles), et $a_{ij}(x)$ (à valeurs réelles, $a_{ij} = a_{ij}(x)$) satisfont à la condition d'ellipticité :

$$\Sigma\, a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \delta|\xi|^2, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

δ étant une constante positive.

Pour simplifier notre raisonnement, nous supposons que tous les coefficients sont suffisamment différentiables et bornés avec leurs dérivées. Nous supposons que Ω est ou bien l'intérieur ou bien l'extérieur d'une hypersurface compacte S, supposée assez régulière. Mais, comme on verra, cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple, dans le cas où Ω est un demi-espace ou quelques domaines cylindriques, tout ce que nous allons montrer est vrai. Plus précisément, il suffit de supposer que Ω est uniformément régulier au sens de Browder [4].

Nous allons considérer deux types de conditions au bord.

1) Condition de Dirichlet $u(x,t)\big|_{x\in S} = 0$. Cela signifie que, dans L^2-cadre, $u(x,t)$ appartient à $\mathring{H}^1(\Omega)$ pour tout t.

2) Condition de Neumann. Soit ν la normale de longueur unité, extérieure à S considérée dans $\mathbb{R}^n$. Posons

$$\frac{d}{dn} = \Sigma\, a_{ij}(x)\cos(\nu,x_i)\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (x \in S). \tag{1.5}$$

La condition au bord est

$$(1.6)\qquad \frac{d}{dn}\,u(x,t) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\cos(\nu_i x_i)\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) + \sigma(x)u(x,t) = 0 \quad (x\in S),$$

où $\sigma(x)$ est une fonction, à valeurs réelles, définie sur S, supposée assez régulière, et où les $h_i(x)$ sont celles de (1.2)

En posant $\frac{\partial}{\partial t}\,u = v$, l'équation (1.1) devient

$$(1.7)\qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(x,D) & -a_1(x,D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

ou simplement

$$(1.8)\qquad \frac{d}{dt}\,U = AU + F.$$

Nous allons considérer (1.7) dans l'espace suivant :

1) <u>cas de Dirichlet</u>

$(u,v)\in H \Leftrightarrow u\in H_0^1(\Omega)$, $v\in L^2(\Omega)$,
$(u,v)\in D(A) \Leftrightarrow u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $v\in H_0^1(\Omega)$;

2) <u>cas de Neumann</u>

$(u,v)\in H \Leftrightarrow u\in H^1(\Omega)$, $v\in L^2(\Omega)$,
$(u,v)\in D(A) \Leftrightarrow u\in H^2(\Omega)$, $v\in H^1(\Omega)$,

de plus

$$(1.9)\qquad \frac{d}{dn}\,u(x) - \langle h,\gamma\rangle\, v(x) + \sigma(x)u(x) = 0, \quad x\in S,$$

où

$$\langle h,\gamma\rangle = \sum h_i(x)\cos(\nu,x_i)\ .$$

2. <u>Résolution (cas de Dirichlet)</u>

Munissons H du produit scalaire

$$(2.1)\qquad (U,U)_H = \sum\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\,u,\ \frac{\partial}{\partial x_j}\,u\right) + (v,v) + (u,u).$$

On voit que $\|U\|_H$ et $\|u\|_1 + \|v\|_0$ sont équivalentes. Calculons $(AU,U)_H + (U,AU)_H$ pour $U\in D(A)$. Compte tenu de

$$A\{u,v\} = \{v,-a_2u - a_1v\}\ ,$$

$$(AU,U)_H + (U,AU)_H = \Sigma(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \Sigma(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}) + (-a_2 u - a_1 v, v)$$
$$+ (v_1 - a_2 u - a, v) + 2\,\mathrm{Re}(u,v).$$

Or,

$$(-a_2 u, v) = -\Sigma(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}) + (e_1(x,D)u, v),$$

e_1 étant un opérateur différentiel d'ordre 1.

D'où

$$|(AU,U)_H + (U,AU)_H| \leqq \text{const}\ \|U\|_H^2 \qquad (U\in D(A)).$$

Il existe donc une constante β (> 0) telle qu'on ait

(2.2) $\|(\lambda I-A)U\|_H \geqq (|\lambda| - \beta)\|U\|_H$ pour λ réel, $|\lambda| > \beta$.

Puis, considérons l'équation en U,

(2.3) $$(\lambda I-A)U = F\in H .$$

En détaillant

(2.4) $$\begin{cases} \lambda u - v = f_1 \\ a_2 u + (a_1+\lambda)v = f_2 . \end{cases}$$

En substituant $v = \lambda u - f_1$ dans la seconde équation, il vient

(2.5) $$a_\lambda u \equiv (a_2 + \lambda a_1 + \lambda^2)u = f_2 + (a_1 + \lambda)f_1 .$$

On voit facilement que la résolution de (2.3) revient à trouver $u\in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ de l'équation elliptique dépendant du paramètre <u>réel</u> λ ,

$$a_\lambda(x,D)u(x) = f(x)\in L^2(\Omega) .$$

Or cette équation peut se résoudre pour $|\lambda|$ assez grand par la méthode variationnelle. Donc

PROPOSITION 2.1. <u>Il existe une constante</u> γ (> 0) <u>telle que</u>

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|_H \leqq (|\lambda|-\gamma)^{-1} \qquad \text{pour} \quad |\lambda| > \gamma .$$

Appliquons le théorème 2.2 de la partie au début. $F = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$, $AF = \begin{bmatrix} f \\ -a_1 f \end{bmatrix}$ montrent qu'il suffit de supposer que $t \to f(t)\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ soit continue. D'où

PROPOSITION 2.2. <u>Etant donnés la donnée initiale</u>

$$(u(0),u'(0)) = (u_0,u_1)\in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$$

et le second membre $f(t)\in\mathcal{E}_t^0(H_0^1(\Omega))$, c'est-à-dire fonction continue en t à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$, il existe alors une solution unique $u(t)$ de (1.1) telle que $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$ soient continus dans $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ respectivement.

Maintenant on va supprimer l'hypothèse que $f(t)\in\mathcal{E}_t^0(H_0^1(\Omega))$. On peut démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. Etant donnés $(u_0,u_1)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ et le second membre $f(t)$ tel que $t\to f(t),f'(t)$ soient continus dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire $f(t)\in\mathcal{E}_t^1(L^2(\Omega))$, il existe alors une solution unique $u(t)$ de (1.1) telle que $(u(t),u'(t),u''(t))$ soit continu dans $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Démonstration. Fixons $T>0$. Il existe une suite $f_j(t)$ telle que

1) $f_j(t)\in\mathcal{E}_t^0(H_0^1(\Omega))$,

2) $f_j(t),f_j'(t)$ convergent uniformément dans $[0,T]$ vers $f(t)$, $f'(t)$ respectivement pour la topologie de $L^2(\Omega)$. Désignons par $u_j(t)$ la solution de (1.1) avec $f=f_j$ (dont l'existence vient d'être montrée).

Ceci préparé, appliquons (2.5) et (2.8) de la partie au début à $u_j(t)$.

$$\|u_j(t)-u_k(t)\|_1 + \|u_j'(t)-u_k'(t)\|_0 \leq C(T)\int_0^T \|f_j(t)-f_k(t)\|_0\,dt$$

$$\|u_j'(t)-u_k'(t)\|_1 + \|u_j''(t)-u_k''(t)\|_0 \leq C(T)[\|f_j(0)-f_k(0)\|_0 + \int_0^T \|f_j'(t)-f_k'(t)\|_0\,dt].$$

Ces deux inégalités montrent que $(u_j(t),u_j'(t),u_j''(t))$ est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Or,

$$u_j''(t) + a_1(x,D)u_j'(t) + a_2(x,D)u_j(t) = f_j(t)$$

montre que $\{u_j(t)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}_t^0(H^2(\Omega))$. Donc, par passage à la limite, on a la solution $u(t)$ cherchée. L'unicité est déjà montrée dans la Proposition 2.2. C.Q.F.D.

En terminant, montrons une inégalité d'énergie. D'abord, d'après (2.8) du début, utilisant une suite $\{f_j\}$ régularisée, définie dans la démonstration du Théorème 2.1, on obtient

$$\|u'(t)\|_1 + \|u''(t)\|_0 \leq C\exp(\gamma t)[\|u_1\|_1+\|-a_2u_0-a_1u_1+f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0\,ds].$$

Compte tenu de

$$\|u(t)\|_2 \leq C'(\|a_2(x,D)u(t)\|_0 + \|u(t)\|_0)\ ,$$

et de

$$\|a_2(x,D)u(t)\|_0 \leq \|u''(t)\|_0 + \|a_1(x,D)u'(t)\|_0 + \|f(t)\|_0\ ,$$

on obtient

$$(2.6)\quad \|u(t)\|_2 + \|u'(t)\|_1 + \|u''(t)\|_0 \leqq C'' \exp(\gamma t)[\|u_0\|_2+\|u_1\|_1+\|f(0)\|_0+\int_0^t\|f'(s)\|_0 ds]$$

pour $t \geqq 0$.

3. Résolution (cas de Neumann).

Introduisons dans H la forme sesquilinéaire

$$(3.1)\qquad (U,U)_H = \Sigma(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u,\frac{\partial}{\partial x_j}u) + (v,v) + \int_S \sigma(x)u\bar{u}dS + \beta(u,u)\ ,$$

où $\beta > 0$ est choisi de telle manière que $\|U\|_H$ soit équivalente à $\|u\|_1 + \|v\|_0$.

Pour $u\in D(A)$,

$$(AU,U)_H + (U,AU)_H = \Sigma(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \Sigma(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u,\frac{\partial}{\partial x_j}v) + (-a_2u-a_1v,v)$$

$$\int_S \sigma v\bar{u}dS + (v,-a_2u-a_1v) + \int_S \sigma u\bar{v}dS + 2\beta\mathrm{Re}(u,v).$$

Or,

$$(-a_2u-a_1v,v) = \int_S \{\frac{du}{dn}\bar{v} - \langle h,\gamma\rangle v\bar{v}\}dS - \Sigma(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}) + (e_1(x,D)u,v)$$

$$+ (v,(a_1 + \tilde{c}(x))v)\ .$$

Comme $(u,v)\in D(A)$, compte tenu de (1.9), l'intégrale au bord devient $-\int \sigma u\bar{v}dS$. Donc,

$$|(AU,U)_H + (U,AU)_H| \leqq \text{const}\ \|U\|_H^2\ .$$

De là

$$(3.2)\qquad \|(\lambda I-A)U\|_H \geqq (|\lambda| - \beta)\|U\|_H \qquad \text{pour } \lambda \text{ réel, } |\lambda| > \beta\ .$$

Considérons l'équation

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \lambda u - v = f_1 \in H^1(\Omega) \\ a_2u + (a_1+\lambda)v = f_2 \in L^2(\Omega)\ . \end{cases}$$

Si (u,v) satisfait à (1.9), alors on a, pour $x\in S$,

$$\langle h,\gamma\rangle v(x) = \{\lambda u(x)-f_1(x)\}\langle h,\gamma\rangle = \frac{d}{dn}u(x) + \sigma(x)u(x)\ ,$$

c'est-à-dire: $u(x)$ doit satisfaire à la condition

(3.4) $$\frac{d}{dn}u(x) - \lambda\langle h,\gamma\rangle u(x) + \sigma(x)u(x) = -\langle h,\gamma\rangle f_1(x) .$$

Réciproquement, si $u(x)\in H^2(\Omega)$ satisfait à (3.4), alors en définissant $v(x)$ par $v = \lambda u - f_1$, on voit que (u,v) satisfait à (1.9), donc $(u,v)\in D(A)$.

Comme au cas de Dirichlet, le problème revient à trouver la solution $u(x)\in H^2(\Omega)$ de l'équation

(3.5) $$a_\lambda(x,D)u(x) = f(x)\in L^2(\Omega)$$

avec la condition au bord (3.4), où $a_\lambda = a_2 + \lambda a_1 + \lambda^2$.

Montrons que ce problème peut se résoudre avec la méthode variationnelle. Supposons d'abord que $u(x)\in H^2(\Omega)$ satisfait à (3.4) et (3.5). Pour toute $\varphi\in H^2(\Omega)$,

$$\langle(a_2 + \lambda a_1 + \lambda^2)u,\bar{\varphi}\rangle = (f,\varphi)$$

s'écrit par intégration par parties,

$$\Sigma \langle a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_j}\rangle + \langle e_1(x,D)u,\bar{\varphi}\rangle + \lambda\langle u, {}^t a_1\bar{\varphi}\rangle + \lambda^2\langle u,\bar{\varphi}\rangle - \int_S\{\frac{d}{dn}u - \lambda\langle h,\gamma\rangle u\}\bar{\varphi}dS = (f,\varphi).$$

Compte tenu de (3.4), l'intégrale au bord devient

$$\int_S\{\sigma u + \langle h,\gamma\rangle f_1\}\bar{\varphi}dS .$$

En résumé, $u(x)$ satisfait à l'équation

(3.6) $$\Sigma(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_j}) + (e_1 u,\varphi) + \lambda(u,a^*\varphi) + \lambda^2(u,\varphi) + \int_S \sigma u\bar{\varphi}dS = (f,\varphi) - \int_S \langle h,\gamma\rangle f_1 .\bar{\varphi}dS$$

Réciproquement, si $u(x)\in H^2(\Omega)$ satisfait à (3.6), on voit facilement que $u(x)$ satisfait à (3.4) et (3.5).

Or on sait bien que, si λ (réel) est assez grand, pour toute $f\in L^2(\Omega)$ et toute $f_1\in H^1(\Omega)$, il existe une solution unique $u(x)\in H^1(\Omega)$ de (3.6). Puis le théorème concernant la régularité au bord montre que $u(x)\in H^2(\Omega)$.

Appliquons le Théorème 2.2. $F(t)\in D(A)$ signifie que $f(t)\in H^1(\Omega)$ et $\langle h,\gamma\rangle f|_S = 0$. D'où

PROPOSITION 3.1. <u>Etant donnés</u> $(u_0,u_1)\in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$ <u>satisfaisant à</u>

(3.7) $$(\frac{d}{dn} + \sigma(x))u_0(x) - \langle h,\gamma\rangle u_1(x) = 0, \quad x\in S ,$$

et le second membre $f(t) \in \mathcal{E}^0_t(H^1(\Omega))$ tel que $\langle h,\gamma\rangle f(x,t)|_S = 0$, il existe alors une solution unique $u(t)$ de (1.1) satisfaisant à (1.6) telle que $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$ soient continus dans $H^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ respectivement.

Démonstration. Le Théorème 2.2 de la partie au début affirme que $u(t) \in H^2(\Omega)$, mais il n'affirme pas la continuité en t. Montrons-le. D'abord, $\langle h,\gamma\rangle \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)|_S$ est continu en t à valeurs dans $H^{\frac{1}{2}}(S)$; alors (1.6) implique que $(\frac{d}{dn} + \sigma) u(x,t)|_S$ l'est aussi. D'autre part, on connaît la majoration :

$$\|u\|_2 \leqq C[\|a_2(x,D)u\|_0 + \|u\|_0 + \|(\frac{d}{dn} + \sigma)u\|_{\frac{1}{2},S}] .$$

Or, l'équation (1.1)

$$a_2(x,D)u(x,t) = f(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - a_1(x,D)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$$

montre que $a_2 u(t)$ est une fonction continue en t à valeurs dans $L^2(\Omega)$. Donc la continuité de $u(t)$ dans $H^2(\Omega)$ est assurée. C.Q.F.D.

On peut supprimer les conditions sur $f(t)$ par la méthode analogue à celle que nous avons utilisée dans la section précédente. Nous nous limitons à énoncer le résultat.

THÉORÈME 3.1. Etant donnés la donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ satisfaisant à (3.7) et le second membre $f(t) \in \mathcal{E}^1_t(L^2(\Omega))$, il existe alors une solution $u(t)$ et une seule de (1.1) avec la condition (1.6) telle que $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$ soient continus dans $H^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ respectivement. On a alors une inégalité d'énergie suivante :

$$\|u(t)\|_2 + \|u'(t)\|_1 + \|u''(t)\|_0 \leqq C \exp(\gamma t)[\|u_0\|_2 + \|u_1\|_1 + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0 ds]$$

pour $t \geqq 0$.

4. Cas où les coefficients dépendent de t.

Nous allons montrer comment on peut étendre les résultats obtenus au cas où les coefficients dépendent de t. Nous nous limitons au cas de Dirichlet. Signalons que dans le cas de Neumann, il faudrait une étude minutieuse, parce que $D(A)$ n'est plus indépendant de t.

Soit

$$(4.1) \qquad L(t)[u(t)] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}u + a_1(x,t,D)\frac{\partial}{\partial t}u + a_2(x,t,D)u = f.$$

On garde les hypothèses faites jusqu'à maintenant. Nous allons supposer de plus que tous les coefficients de $a_i(x,t,D)$ sont des fonctions continuement différentiables en t à valeurs dans $\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n)$, m étant un nombre entier suffisamment élevé. $\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions ayant les dérivées continues et bornées jusqu'à l'ordre m, muni de la norme habituelle. Pour la commodité, nous supposons que $L(t)$ est défini dans $t\in[-\delta_0,T+\delta_0]$ $(\delta_0 > 0)$.

Montrons que l'inégalité (2.6) peut s'étendre au cas actuel. Remarquons d'abord que, si on considère

$$(U,U)_{H(t)} = \Sigma(a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}u,\frac{\partial}{\partial x_j}u) + (u,u) + (v,v)$$

pour la solution $u(t)$ de (4.1) telle que $u(t)\in\mathcal{E}^0_t(H^2(\Omega)) \cap \mathcal{E}^1_t(H^1_0(\Omega))$, $u'(t)\in\mathcal{E}^0_t(H^1_0(\Omega)) \cap \mathcal{E}^1_t(L^2(\Omega))$, on a

$$\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{H(t)} \leqq \gamma\|U(t)\|_{H(t)} + \|f(t)\|_0 .$$

D'où, pour $t_0 \leqq t$,

$$(4.2) \qquad \|U(t)\|_{H(t)} \leqq \exp \gamma(t-t_0)\|U(t_0)\|_{H(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \exp\{\gamma(t-s)\}\|f(s)\|_0\, ds .$$

Ceci remarqué, supposons d'abord que

$$u(t),(u'(t),u''(t),u'''(t))\in H^2(\Omega) \cap D \times H^2(\Omega) \cap D \times D \times L^2(\Omega)$$

et que y est continu, D <u>étant</u> $H^1_0(\Omega)$. Supposons ensuite que $f(t)\in\mathcal{E}^1_t(L^2(\Omega))$. Dérivons (4.1) par rapport à t, alors

$$(4.3) \qquad u'''(t) + a_1 u'' + (a_2+a_1')u' = f' - a_2' u .$$

En appliquant (4.2),

$$(4.4) \quad \|u'(t)\|_1 + \|u''(t)\|_0 \leqq C(T)[\|u'(0)\|_1 + \|u''(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|ds + \int_0^t \|u(s)\|_2 ds],$$
$$t\in[0,T] .$$

D'autre part, compte tenu de (4.1),

$$(4.5) \qquad \|u(t)\|_2 \leqq C(\|a_2 u(t)\|_0 + \|u(t)\|_0)$$
$$\leqq C'(\|u''(t)\|_0 + \|u'(t)\|_1 + f(t)\|_0 + \|u(t)\|_0) .$$

Evidemment,

$$\|u(t)\|_0 \leqq \|u(t)\|_1 \leqq C(T)[\|u(0)\|_1 + \|u'(0)\|_0 + \int_0^t \|f(s)\|_0 ds] .$$

En notant

$$y(t) = \|u(t)\|_2 + \|u'(t)\|_1 + \|u''(t)\|_0 ,$$

on obtient

$$\gamma(t) \leqq C'(T)[\int_0^t \gamma(s)ds + \|u'(0)\|_1 + \|u''(0)\|_0 + \|u(0)\|_1 + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0 ds].$$

Comme, d'après (4.1),

$$\|u''(0)\| \leqq \text{const}\ [\|u(0)\|_2 + \|u'(0)\|_1 + \|f(0)\|_0] ,$$

on a finalement,

$$(4.6) \quad \|u(t)\|_2 + \|u'(t)\|_1 + \|u''(t)\|_0 \leqq C''(T)[\|u(0)\|_2 + \|u'(0)\|_1 + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0\, ds] .$$

Supprimons l'hypothèse sur $u(t)$. On suppose que $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$ sont continues dans $H^2(\Omega) \cap D$, D, et $L^2(\Omega)$ respectivement. Régularisons $u(t)$ par $\varphi_\delta(t)$. Posons $\varphi_\delta(t) \underset{(t)}{*} u(t) = u_\delta(t)$. D'après (4.1),

$$(4.7) \qquad L(t)[u_\delta(t)] = f_\delta + C_\delta u(t) , \qquad t\in[\delta, T-\delta'] ,$$

où

$$C_\delta u(t) = [a_1, \varphi_\delta *]u'(t) + [a_2, \varphi_\delta *]u(t) .$$

Appliquons (4.6) à $u_\delta(t)$.

$$\|u_\delta(t)\|_2 + \|u'_\delta(t)\|_1 + \|u''_\delta(t)\|_0 \leqq C''(T)[u_\delta(\varepsilon)\|_2 + \|u'_\delta(\varepsilon)\|_1 + \|u''_\delta(\varepsilon)\|_0 + \|f_\delta(\varepsilon)\|_0 + \int_\varepsilon^t \|f'_\delta(s)\|_0 ds + \|C_\delta u(\varepsilon)\|_0 + \int_\varepsilon^t \|\frac{d}{ds} C_\delta u(s)\|_0\, ds],$$

où $t\in[\varepsilon, T-\varepsilon]$, ε étant un nombre positif quelconque fixé, $(\delta < \varepsilon)$.

Or, d'après le lemme de Friedrichs, on a

$$\int_\varepsilon^t \|\frac{d}{ds} C_\delta u(s)\|_0\, ds \to 0, \quad \|C_\delta u(\varepsilon)\|_0 \to 0 \quad (\delta \to 0) .$$

Donc, en passant d'abord par la limite $\delta \to 0$, puis $\varepsilon \to 0$, on obtient (4.6).

Montrons maintenant le

THÉORÈME 4.1. <u>Etant données</u> $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ <u>et</u> $f(t) \in \mathcal{E}^1_t(L^2(\Omega))$ (c'est-à-dire : $t \to f(t), f'(t)$ <u>sont continues dans</u> $L^2(\Omega)$), <u>alors il existe une solution unique</u> $u(t)$ <u>de</u> (4.1) <u>telle que</u> $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$ <u>soient continues dans</u> $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ <u>respectivement</u>. <u>On a l'inégalité</u> (4.6).

<u>Démonstration</u>.

On va adapter la méthode de Peano en s'appuyant sur le Théorème 2.1. Soit $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Soit $u_1(t)$ $(t\in[t_0, t_1])$ la solution de

$L(t_0)[u(t)] = f(t)$ avec la donnée initiale $(u_1(0),u_1'(0))= (u_0,u_1)$. Puis, soit $u_2(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, la solution de $L(t_1)[u(t)] = f(t)$ avec

$$(u_2(t_1),u_2'(t_1)) = (u_1(t_1),u_1'(t_1)).$$

Ainsi, on a une fonction $u_\Delta(t)$, $t\in[0,T]$. Considérons une suite $\{\Delta_j\}$ de $[0,T]$ tendant vers 0. On aura une suite $\{u_j(t)\}$, $t\in[0,T]$. En utilisant (4.2), on montre que

$$\|u_j(t)\|_2 + \|u_j'(t)\|_1 + \|u_j''(t)\|_0 \leqq M \qquad \forall\ t\in[0,T],\quad j = 1,2,\dots .$$

Cela signifie que $\{u_j(x,t)\}$ est une suite bornée dans $H^2(\Omega \times (0,T))$. Il existe donc une limite faible $u(x,t)$ dans $H^2(\Omega \times (0,T))$. On montre que

$$L(t)[u(x,t)] = f(x,t) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega \times (0,T) .$$

On voit que $u(t)\in\mathcal{E}_t^0(H_0^1(\Omega))$, $u'(t)\in\mathcal{E}_t^0(L^2(\Omega))$, et $(u(0),u'(0)) = (u_0,u_1)$.

Régularisons $u(t)$ par $\varphi_\delta(t)$, et notons $u_\delta(t) = \varphi_\delta(t) \underset{(t)}{*} u(t)$. Pour la commodité, nous supposerons que la construction ci-dessus a été faite dans l'intervalle $t\in[-\delta_0,T+\delta_0]$, en prolongeant f convenablement dans $t\in[-\delta_0,T+\delta_0]$. On aura

$$L(t)[u_\delta(t)] = f_\delta(t) + C_\delta u(t) ,$$

où $C_\delta u(t)$ est donné dans (4.7). En limitant cette relation à $\Omega \times [0,T]$, appliquons l'inégalité (4.6). On voit que $\{u_\delta(t)\}$ forme une suite de Cauchy. Plus précisément, $\|u_\delta(t) - u_{\delta'}(t)\|_2$, $\|u_\delta'(t) - u_{\delta'}'(t)\|_1$, $\|u_\delta''(t)\|_0 - u_{\delta'}''(t)\|_0$ convergent uniformément (dans $[0,T]$) lorsque $\delta,\delta' \to 0$. Donc la limite $u(t)$ satisfait bien à la propriété énoncée dans le théorème. C.Q.F.D.

Domaine de dépendance. Remarquons l'existence du domaine de dépendance fini. Cela découle immédiatement de l'inégalité d'énergie (4.6), ou plutôt de l'inégalité plus simple

$$\|u(t)\|_1 + \|u'(t)\|_0 \leqq C(T)[\|u(0)\|_1 + \|u'(0)\|_0 + \int_0^t \|f(s)\|_0 ds] .$$

Soit $u(x,t)\in C^2$, définie au voisinage V d'un point (ξ_0,t_0) du bord, $\xi_0\in S$; si

$$u(x,t_0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t_0) = 0 ,$$

$x\in V \cap \{t = t_0\} \cap \bar{\Omega}$, et

$$u(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t)\in V,\ \xi\in S ,$$

alors $u(x,t)$, solution de (4.1) avec $f = 0$ dans $V \cap \{x\in\bar{\Omega}\}$, s'annule indentiquement au voisinage $V'(\subset V)$ de (ξ_0,t_0).

t_0 (> 0) étant fixé, soient $\lambda_1(x,t;\xi)$, $\lambda_2(x,t;\xi)$ les racines de

$$\lambda^2 + h_1(x,t;\xi)\lambda + h_2(x,t;\xi) = 0 .$$

Notons

$$\lambda_{max} = \sup_{\substack{|\xi|=1,(x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,t_o] \\ i=1,2}} |\lambda_i(x,t;\xi)| .$$

Soit $x_o\in\bar{\Omega}$; désignons par C le cône retardé de sommet (x_o,t_o), défini par $\{(x,t); |x-x_o| \leqq \lambda_{max}(t_o-t)\}$, et soit $\Gamma = S\times[0,\infty[$. On montre le

THÉORÈME 4.2. <u>Soit</u> $u(x,t)\in C^2$, <u>définie dans</u> $C\cap\{x\in\bar{\Omega}, t\geqq 0\}$ <u>et</u> y <u>satisfaisant</u> <u>à</u> (4.1) <u>avec</u> $f = 0$. <u>Si</u> $u(x,0)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)$ <u>s'annulent pour</u> $x\in C\cap\{x\in\bar{\Omega}, t=0\}$ <u>et si</u> $u(\xi,t) = 0$ <u>pour</u> $(\xi,t)\in C\cap\Gamma$, <u>alors</u> $u(x,t)$ <u>s'annule identiquement dans</u>

$$C\cap\{x\in\bar{\Omega}, t\geqq 0\} .$$

<u>Régularité des solutions</u>. Si (u_o,u_1) et $f(t)$ sont régulières, on peut affirmer que les solutions (4.1) sont régulières en imposant certaines conditions de compatibilité en $t = 0$. Evidemment nous supposons que les coefficients de L sont réguliers. Le raisonnement qui suit est essentiellement dû à Ikawa, qui nous l'a communiqué très récemment.

Désignons l'espace $H_0^1(\Omega)$ par D. Supposons

$$(u_o,u_1)\in H^3(\Omega)\cap D\times H^2(\Omega)\cap D , \tag{4.8}$$

$$f(t)\in\mathcal{E}_t^0(H^2(\Omega)),\ f'(t)\in\mathcal{E}_t^1(L^2(\Omega)) , \tag{4.9}$$

et la première condition de compatibilité, qu'on déduit de (4.1) :

$$u''(0) = f(0) - a_1(x,0,D)u_1 - a_2(x,0,D)u_o\in D . \tag{4.10}$$

C'est-à-dire que la fonction $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,0)$ calculée par (4.1) doit être nulle au bord, Sous ces conditions, nous allons montrer que $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$, $u'''(t)$ sont des fonctions continues à valeurs dans $H^3(\Omega)\cap D$, $H^2(\Omega)\cap D$, D, $L^2(\Omega)$ respectivement.

Dérivons (4.1) en t ; on obtient

$$L(t)[u'(t)] = f'(t) - L'(t)[u(t)] . \tag{4.11}$$

On va résoudre cette équation par approximations successives.

Posons $u'(t) = v(t)$. (4.11) devient

$$L(t)[v(t)] = f'(t) - L'(t)[u(t)] \tag{4.12}$$

avec

$$u(t) = u_o + \int_0^t v(s)ds ,$$

et

(4.13) $\quad v(0), v'(0)) = (u_1, f(0) - a_1(x,0,D)u_1 - a_2(x,0,D)u_0)$.

$v_1(t)$ est définie par

$$L(t)[v_1(t)] = f'(t) \tag{4.14}$$

avec $(v_1(0), v_1'(0)) =$ (le second membre de (4.13)).

D'après le théorème 4.1, $v_1(t), v_1'(t), v_1''(t)$ sont continues dans $H^2(\Omega) \cap D$, D, $L^2(\Omega)$ respectivement. $v_2(t)$ se définit ensuite par

$$L(t)[v_2(t)] = f'(t) - L'[u_1(t)], \quad u_1(t) = u_0 + \int_0^t v_1(s)ds, \tag{4.15}$$

avec la donnée initiale (4.13).

D'après le théorème 4.1, compte tenu de $L'(t)[u_1(t)] \in \mathcal{E}_t^1(L^2(\Omega))$, $v_2(t)$ a la même propriété que $v_1(t)$. De proche en proche, on définit $\{v_n(t)\}$. Or,

$$L(t)[v_{n+1}(t) - v_n(t)] = - L'(t)[u_n(t) - u_{n-1}(t)],$$

où

$$u_n(t) - u_{n-1}(t) = \int_0^t \{v_n(s) - v_{n-1}(s)\}ds \quad ,$$

montre, compte tenu de (4.6), que la série

$$\sum_n \|v_{n+1}(t) - v_n(t)\|_2 + \|v'_{n+1}(t) - v'_n(t)\|_1 + \|v''_{n+1}(t) - v''_n(t)\|_0$$

est uniformément convergente. Donc la limite $v(t)$ des $\{v_n(t)\}$ satisfait bien à (4.12), (4.13). $v(t)$, $v'(t)$, $v''(t)$ sont continues dans $H^2(\Omega) \cap D$, D, $L^2(\Omega)$ respectivement. (4.12) et (4.13) signifient que

$$\frac{d}{dt}\{L(t)[u(t)] - f(t)\} = 0 \qquad \text{dans} \qquad L^2(\Omega),$$

et $L(t)[u(t)] - f(t) = 0$ pour $t = 0$. Donc $u(t)$ est la solution de (4.1) avec la donnée initiale (u_0, u_1). Or, d'après l'ellipticité de $a_2(x,t,D)$, on voit facilement que $u(t)$ est continue en t à valeurs dans $H^3(\Omega) \cap D$.

Recommençons encore une fois. On considère

$$L(t)[u''(t)] = -2L'(t)[u'(t)] - L''(t)[u(t)] + f''(t) \ . \tag{4.16}$$

Supposons

$$(u_0, u_1) \in H^4(\Omega) \cap D \times H^3(\Omega) \cap D \ , \tag{4.17}$$

$$f(t) \in \mathcal{E}_t^0(H^2(\Omega)), \ f'(t) \in \mathcal{E}_t^0(H^1(\Omega)), f''(t) \in \mathcal{E}_t^1(L^2(\Omega)), \tag{4.18}$$

et, en dehors de (4.10), la deuxième condition de compatibilité qu'on déduit de (4.11) :

$$(4.19) \qquad u'''(0) = -a_1(x,0,D)u''(0) - a_2(x,0,D)u'(0) + f'(0) - L'(t)[u(t)]|_{t=0} \in D .$$

Sous ces conditions, en utilisant (4.16), on peut démontrer que les $u^{(i)}(t)$ sont continus dans $H^{4-i}(\Omega)$ $(i = 0,1,\dots,4)$.

Résumons :

THÉORÈME 4.3. <u>Supposons que</u> $(u_0,u_1) \in H^m(\Omega) \cap D \times H^{m-1}(\Omega) \cap D$, <u>que</u> $f(t), f'(t), \dots, f^{(m-2)}(t), f^{(m-1)}(t)$ <u>sont des fonctions continues à valeurs dans</u> $H^{m-2}(\Omega)$, $H^{m-3}(\Omega), \dots, H^1(\Omega), L^2(\Omega)$, <u>respectivement, et que</u>

$$u''(0), u'''(0), \dots, u^{(m-1)}(0) \in D.$$

<u>Alors</u> $u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)$ <u>sont des fonctions continues à valeurs dans</u> $H^m(\Omega) \cap D$, $H^{m-1}(\Omega) \cap D, \dots, D, L^2(\Omega)$ <u>respectivement</u>.

Chapitre II

CAS D'ORDRE SUPÉRIEUR

1. Introduction.

Nous allons considérer quelques problèmes aux limites pour des équations strictement hyperboliques. Les équations que nous allons considérer sont de la forme

$$(1.1)\qquad Lu = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_i(x)a(x,D)\right)u + \sum_{i=0}^{2m-1} b_i(x,D)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2m-1-i}u = f ,$$

où les $b_i(x,D)$ sont des opérateurs différentiels arbitraires d'ordre $\leqq i$. On suppose

$$(1.2)\qquad 0 < \alpha_1(x) < \alpha_2(x) < \dots < \alpha_m(x) .$$

Plus précisément, il existe une constante positive d telle que

$$\alpha_1(x) \geqq d,\quad \alpha_i(x) - \alpha_{i-1}(x) \geqq d \quad (i = 2,3,\dots,m) .$$

$$(1.3)\qquad a(x,D) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

où les $a_{ij}(x)$ sont à valeurs réelles, et $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$;

$$(1.4)\qquad \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \delta|\xi|^2 \qquad (\delta > 0).$$

<u>Tous les coefficients sont supposés suffisamment différentiables et bornés avec leurs dérivées dans</u> $\mathbb{R}^n$. Etant donnée une hypersurface compacte S assez régulière, Ω est ou bien l'intérieur ou bien l'extérieur de cette surface.

Les conditions au bord sont

1) <u>type de Dirichlet</u> :

$$(1.5)\qquad u(x,t)\big|_S = (au)(x,t)\big|_S = \dots = a(x,D)^{m-1}u(x,t)\big|_S = 0 ,$$

2) <u>type de von Neumann</u> :

$$(1.6)\qquad \left(\frac{d}{dn} + \sigma\right)u(x,t)\Big|_S = \left(\frac{d}{dn} + \sigma\right)(au)(x,t)\Big|_S = \dots = \left(\frac{d}{dn} + \sigma\right)(a^{m-1}u)(x,t)\Big|_S = 0$$

où $\sigma(x)$ est une fonction suffisamment différentiable à valeurs réelles, et

$$\frac{d}{dn}u = \sum a_{ij}(x)\cos(x_i,\nu)\frac{\partial}{\partial x_j}u ,$$

ν étant la normale extérieure.

D'abord, remarquons que si l'on prend $\beta > 0$ assez grand l'opérateur

$$(1.7) \qquad A(x,D) = a(x,D) + \beta I$$

devient un opérateur auto-adjoint <u>strictement positif</u>, en prenant pour domaine $D(A)$ 1) (cas Dirichlet) $D(A) = H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$,

2) (cas von Neumann) $D(A) = \{u \in H^2(\Omega)\ ;\ (\frac{d}{dn} + \sigma)u = 0\}$.

DÉFINITION 1.1. Nous désignons par H l'opérateur auto-adjoint strictement positif $\sqrt{A}$.

PROPOSITION 1.1. <u>Prenons</u> β <u>assez grand ; alors, pour</u> $u \in D(H)$, $\|Hu\|$ <u>est équivalente à</u> $\|u\|_1$, <u>c'est-à-dire à la norme de</u> u <u>dans</u> $H^1(\Omega)$. $D(H) = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ <u>pour le cas de Dirichlet, et</u> $D(H) = H^1(\Omega)$ <u>pour le cas de Neumann</u>. <u>Pour toute</u> $a(x) \in \mathcal{B}^1(\bar{\Omega})$ <u>et toute</u> $u \in D(H)$, $a(x)u(x) \in D(H)$.

<u>Démonstration</u>.

Envisageons le cas de Dirichlet. Supposons d'abord $u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$; alors

$$(1.8) \qquad (Au,u) = \Sigma(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \beta\|u\|^2 .$$

Puisque $(Hu,Hu) = (Au,u)$, on voit que, si $\beta > 0$, $\|Hu\| \sim \|u\|_1$. Soit $u \in D(H)$. Il existe une suite $u_j \in D(A)$ telle que $\|H(u-u_j)\| \to 0$. Puisque $\{u_j\}$ est une suite de Cauchy dans $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, il en résulte que $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, et $\|u_j-u\|_1 \to 0$. On voit donc que $\|Hu\|^2$ est égal au second membre de (1.8). Or $D(A)$ $(\subset D(H))$ est dense dans $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Comme $D(H)$ est un sous-espace fermé de $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, on obtient $D(H) = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Passons au cas de von Neumann. Supposons $u \in D(A)$. On a

$$(1.9) \qquad (Au,u) = \Sigma(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \beta\|u\|^2 + \int_S \sigma u\bar{u}dS .$$

On voit donc que, si β est assez grand, $\|Hu\| \sim \|u\|_1$. Soit $u \in D(H)$. Par le même raisonnement, on voit que $u \in H^1(\Omega)$ et que $\|Hu\|^2$ est égal au second membre de (1.9). Comme on le voit facilement, $D(A)$ est dense dans $H^1(\Omega)$. D'où, $D(H) = H^1(\Omega)$. La dernière partie est évidente. C.Q.F.D.

<u>Nous fixons</u> β <u>une fois pour toutes pour qu'on ait la Proposition</u> 1.1.

COROLLAIRE. <u>L'opérateur</u> H^{-1} <u>est continu de</u> $L^2(\Omega)$ <u>dans</u> $H^1(\Omega)$.

PROPOSITION 1.2. H^{-s} $(s = 1,2,\dots)$ <u>est un opérateur continu de</u> $L^2(\Omega)$ <u>dans</u> $H^s(\Omega)$.

Démonstration.

Comme on sait, pour tout s entier non négatif, A est un opérateur continu de $H^{2+s}(\Omega) \cap D(A)$ sur $H^s(\Omega)$. Comme $H^{2+s}(\Omega) \cap D(A)$ est un sous-espace fermé de $H^{2+s}(\Omega)$, d'après Banach, l'inverse est aussi continu. D'où

$$\|u\|_{2+s} \leqq C\|Au\|_s \qquad \text{pour} \qquad u \in H^{2+s}(\Omega) \cap D(A) .$$

En d'autres termes,

$$\|A^{-1}u\|_{2+s} \leqq C\|u\|_s \qquad \text{pour} \qquad u \in H^s(\Omega) .$$

En utilisant cette inégalité, on voit que

1) si $u \in L^2(\Omega)$, alors $A^{-k}u \in H^{2k}(\Omega)$ et $\|A^{-k}u\|_{2k} \leqq C\|u\|_0$,

2) si $u \in H^1(\Omega)$, alors $A^{-k}u \in H^{2k+1}(\Omega)$ et $\|A^{-k}u\|_{2k+1} \leqq C\|u\|_1$.

Compte tenu du corollaire, on obtient la Proposition. C.Q.F.D.

2. Réduction du problème.

L'équation (1.1) s'écrit sous la forme

$$(2.1) \qquad Lu = \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} u + c_1(x)A\frac{\partial^{2m-2}}{\partial t^{2m-2}} u + \dots + c_m(x)A^m u + \sum_{i=0}^{2m-1} b'_{2m-1-i}(x,D)\frac{\partial^i}{\partial t^i} u = f ,$$

où $b'_i(x,D)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqq i$.

Posons

$$(2.2) \qquad u_0 = u, \quad u_1 = \frac{\partial}{\partial t}u, \dots, \quad u_{2m-1} = \frac{\partial^{2m-1}}{\partial t^{2m-1}} u .$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{2m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1 \\ -c_m A^m & 0 & -c_{m-1}A^{m-1} & 0 & \dots & -c_1 A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{2m-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} & & 0 & \\ & & & \\ -b'_{2m-1} & -b'_{2m-2} & \dots & -b'_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{2m-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f \end{bmatrix}$$

ou plus simplement

$$(2.4) \qquad \frac{d}{dt} U(t) = \mathcal{A}\, U(t) + F(t) .$$

Nous allons considérer cette équation dans l'espace

(2.5) $(u(t),u'(t),\dots,u^{(2m-1)}(t))\in D(H^{2m-1}) \times D(H^{2m-2}) \times\dots\times D(H) \times L^2(\Omega)$,

en prenant le domaine de $\mathcal{A}$,

(2.6) $U\in D(\mathcal{A}) \Leftrightarrow (u_0,u_1,\dots,u_{2m-1})\in D(H^{2m}) \times D(H^{2m-1}) \times\dots\times D(H)$

$D(H^s)$ $(s = 0,1,2,\dots)$ est muni de la norme $\|H^s u\|_{L^2(\Omega)}$. $D(H^s)$ est un espace hilbertien.

Remarquons le fait suivant :

PROPOSITION 2.1. <u>La topologie de</u> $D(H^s)$ <u>est identique à celle de</u> $H^s(\Omega)$. $D(H^s)$ <u>est un sous-espace fermé de</u> $H^s(\Omega)$. $D(H^{s+1})$ <u>est dense dans</u> $D(H^s)$.

<u>Démonstration</u>. D'après la Proposition 1.2, $\|H^{-s}u\|_s \leqq c\|u\|_0$; c'est-à-dire :

$$\|u\|_s \leqq c\|H^s u\|_0 \quad \text{pour toute} \quad u\in D(H^s) .$$

Montrons l'inégalité inverse. Pour $s = 2k+1$, dans le cas Dirichlet, on a

$$\|H^s u\|^2 = \|HA^k u\|^2 = \Sigma(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(A^k u), \frac{\partial}{\partial x_j}(A^k u)) + \beta\|\mathcal{A}^k u\|^2 ,$$

et dans le cas de von Neumann, il faut ajouter le terme $\int_S \sigma|A^k u|^2 dS$.

Donc,

$$\|H^s u\|^2 \leqq c'^2\|u\|_s^2 .$$

D'où,

$$c''\|u\|_s \leqq \|H^s u\|_0 \leqq c'\|u\|_s , \qquad u\in D(H^s) .$$

Les autres propriétés se démontrent facilement. C.Q.F.D.

Introduisons la matrice

$$(2.7) \qquad E(H) = \begin{bmatrix} H^{2m-1} & & & & & \\ & H^{2m-2} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & H & \\ & & & & & H^{\circ} \end{bmatrix}$$

Supposons $U\in D(\mathcal{A})$. Alors

$$(2.8)\qquad E(H)\,U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ -c_m(x) & 0 & -c_{m-1}(x) & \dots & -c_1(x) & 0 \end{bmatrix} HE(H)U + \mathcal{B}E(H)U$$

$$\equiv (P(x)H + \mathcal{B})E(H)U ,$$

où

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} & & \bigcirc & & \\ -b'_{2m-1}\,H^{-(2m-1)} & -b'_{2m-2}\,H^{-(2m-2)} & \dots & -b'_0 \end{bmatrix} .$$

D'après la Proposition 1.2, $\mathcal{B}$ est un opérateur <u>borné</u> dans $(L^2(\Omega))^{2m}$. Remarquons que $U\in D(\mathcal{A})$ équivaut à $E(H)U\in(D(H))^{2m}$.

3. <u>Majoration a priori</u>.

Nous allons évaluer $(\lambda I-\mathcal{A})U$. Pour cela, remarquons d'abord que

$$\text{dét}\,(\lambda I - P(x)) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 + \alpha_j(x)) = 0 .$$

Donc les racines sont $\pm i\sqrt{\alpha_j(x)}$ $(j = 1,2,\dots,m)$. En notant $\lambda_{2j-1} = +\sqrt{\alpha_j(x)}$, $\lambda_{2j} = -\sqrt{\alpha_j(x)}$ $(j = 1,2,\dots,m)$, définissons d'abord la matrice

$$N_1(x) = [n_{ij}^{(1)}(x)] ,$$

où

$$n_{ij}^{(1)}(x) = \lambda_j(x)^{i-1} .$$

Ensuite, en définissant $N(x) = N_1(x)^{-1}$, on voit que $N(x)$ est une matrice uniformément régulière et assez différentiable et bornée avec ses dérivées, et que

$$(3.1)\qquad N(x)P(x) = iD(x)N(x) ,$$

où

$$D(x) = \begin{bmatrix} +\sqrt{\alpha_1(x)} & & & & & \\ & -\sqrt{\alpha_1(x)} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & +\sqrt{\alpha_m(x)} & \\ & & & & & -\sqrt{\alpha_m(x)} \end{bmatrix} .$$

Introduisons maintenant dans l'espace

$$\mathcal{H} = \{(u_0,\dots,u_{2m-1});\ u_0\in D(H^{2m-1}), u_1\in D(H^{2m-2}),\dots,u_{2m-1}\in L^2(\Omega)\}$$

le produit scalaire

$$(U,V)_{\mathcal{H}} = (N(x)E(H)U, N(x)E(H)V) \ , \tag{3.2}$$

où le second membre est le produit scalaire habituel dans $(L^2(\Omega))^{2m}$.

Considérons $(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} + (U,\mathcal{A}U)_{\mathcal{H}}$ pour $U\in D(\mathcal{A})$

C'est égal à

$$(N(x)E(H)\mathcal{A}U, N(x)E(H)U) + (N(x)E(H)U, N(x)E(H)\mathcal{A}U).$$

D'après (2.8), ceci est égal à

$$(N(x)P(x)HE(H)U, N(x)E(H)U + (N(x)E(H)U, N(x)P(x)HE(H)U) + 2\mathrm{Re}(N(x)\mathcal{B}E(H)U, N(x)E(H)U)).$$

Or,

$$N(x)P(x)HE(H)U = iD(x)N(x)HE(H)U \ . \tag{3.3}$$

Utilisons le théorème suivant, dont la démonstration sera donnée dans la section 6.

THÉORÈME 3.1. <u>Soit</u> $a(x)\in\mathcal{B}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ $(0<\alpha\leqq 1)$, <u>c'est-à-dire que</u> $a(x)$ <u>et</u> $\frac{\partial}{\partial x_j}a(x)$ $(j = 1,2,\dots,n)$ <u>sont continues et bornées, et que ces premières dérivées ont une continuité uniforme hölderienne d'indice</u> α. <u>Alors</u>

$$\|(a(x)H - Ha(x))u\| \leqq C\|u\| \quad \underline{\text{pour tout}} \quad u\in D(H) \ ,$$

<u>où la norme est celle de</u> $L^2(\Omega)$.

On a donc

$$N(x)H = HN(x) + \mathcal{B}_1 \tag{3.4}$$

où $\mathcal{B}_1$ est un opérateur borné dans $(L^2(\Omega))^{2m}$.

On voit donc que

$$2\mathrm{Re}(N(x)P(x)HE(H)U,\ N(x)E(H)U) = i(\{D(x)H - HD(x)\}N(x)E(H)U, N(x)E(H)U) + \dots \ .$$

En utilisant encore le Théorème 3.1, on voit que $D(x)H - HD(x)$ est un opérateur borné dans $(L^2(\Omega))^{2m}$. Donc,

$$|(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} + (U,\mathcal{A}U)_{\mathcal{H}}| \leqq c\|U\|^2_{\mathcal{H}} \quad .$$

Alors, pour $U\in D(\mathcal{A})$, λ réel positif,

$$\|(\lambda I-\mathcal{A})U\|^2_{\mathcal{H}} \geqq \lambda^2\|U\|^2_{\mathcal{H}} - \lambda c\|U\|^2_{\mathcal{H}} \geqq (\lambda-\gamma)^2\|U\|^2_{\mathcal{H}} \ , \quad \text{si } \lambda>\gamma \text{ (assez grand).}$$

THÉORÈME 3.2.

$$\|(\lambda I-\mathcal{A})U\|_{\mathcal{H}} \geqq (\lambda-\gamma)\|U\|_{\mathcal{H}}, \quad \underline{\text{pour tout}} \quad U\in D(\mathcal{A}), \quad \underline{\text{si}} \quad \lambda\geqq\gamma \ .$$

4. Résolvante.

Dans cette section nous allons montrer que $(\lambda I - \mathcal{A})$ est une application bijective de $D(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}$, si λ (réel) est assez grand.

L'équation

$$(\lambda I - \mathcal{A})U = F(\in \mathcal{H}) \tag{4.1}$$

s'écrit, compte tenu de (2.1), (2.2) et (2.3),

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda u_0 - u_1 = f_0 \\ \lambda u_1 - u_2 = f_1 \\ \dots \\ \lambda u_{2m-2} - u_{2m-1} = f_{2m-2} \\ \\ c_m A^m u_0 + c_{m-1}A^{m-1}u_2 + \dots + c_1 A u_{2m-2} + \sum_{i=0}^{2m-1} b'_{2m-1-i} u_i + \lambda u_{2m} = f_{2m-1} . \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Des relations $u_{i+1} = \lambda u_i - f_i$ $(i = 0,\dots,2m-2)$, on tire

$$u_i = \lambda^i u_0 - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^{i-1-j} f_j \qquad (i = 1,\dots,2m-1) . \tag{4.3}$$

En substituant ces relations dans la dernière de (4.2), on obtient

$$(c_m A^m + \lambda^2 c_{m-1} A^{m-1} + \dots + \lambda^{2m-2} c_1 A + \lambda^{2m})u_0 + \sum_{i=0}^{2m-1} b'_{2m-1-i} \lambda^i = f_\lambda , \tag{4.4}$$

où

$$f_\lambda = \sum_{i=0}^{m} c_i A^i \Big(\sum_{j=0}^{2(m-i)-1} \lambda^{2(m-i)-1-j} f_j \Big) + \sum b'_{2m-1-i} \Big(\sum_{j=0}^{i-1} \lambda^{i-1-j} f_j \Big) , \tag{4.5}$$

$(c_0 = 1)$. On voit que $f_\lambda \in L^2(\Omega)$.

Si on désigne le premier membre de (4.4) par $a_\lambda(x,D)u$, nous sommes amenés à considérer l'équation elliptique dépendant du paramètre λ positif,

$$a_\lambda(x,D)u_0(x) = f(x) , \tag{4.6}$$

où $f(x) \in L^2(\Omega)$ est donné, et où $u_0(x)$ doit appartenir à $D(A^m)$. En d'autres termes, $u_0(x)$ doit satisfaire ou bien à (1.5) ou bien à (1.6). Il faut remarquer que $a_\lambda(x,D)$ est exactement l'opérateur qu'on obtient en substituant λ^j à $(\frac{\partial}{\partial t})^j$ dans l'opérateur (1.1). En ce sens,

$$a_\lambda(x,D) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 + \alpha_i(x)a(x,D)) + \sum_{i=0}^{2m-1} b_{2m-1-i}(x,D)\lambda^i . \tag{4.7}$$

Comme on le voit facilement, (4.6) est résoluble par la méthode variationnelle dans le cas $m = 2$, si la condition au bord est du type Dirichlet (1.5). Mais sauf ce cas simple, je ne pouvais pas résoudre (4.6) par cette méthode. Nous allons donc recourir à la nouvelle méthode. Plus précisément, nous adaptons la méthode de Schechter [13]. Enonçons le résultat sous une forme un peu générale, en changeant légèrement les notations.

Soit

$$A(x,D,\lambda) = \lambda^{2m} + a_1(x,D)\lambda^{2m-1} + \dots + a_{2m}(x,D) , \tag{4.8}$$

où $a_i(x,D)$ est un opérateur différentiel d'ordre i ; λ est un paramètre réel et positif ; $D = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x}$. On définit la partie principale de $A(x,D,\lambda)$ par

$$A_o(x,D,\lambda) = \lambda^{2m} + h_1(x,D)\lambda^{2m-1} + \dots + h_{2m}(x,D) ,$$

où $h_i(x,D)$ est la partie homogène d'ordre i de $a_i(x,D)$.

Les conditions au bord sont données par

$$B_j(x,D,\lambda)u|_S = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,m) ,$$

où B_j est d'ordre m_j $(< 2m)$ et $m_i \neq m_j$ $(i \neq j)$; pour tout $x \in S$, la direction normale n'est caractéristique pour aucun des B_j. Plus précisément, B_j doit être de la forme

$$B_j = b_{j,o}(x)D_n^{m_j} + \sum_{\substack{|\alpha|+k\leqq m_j \\ k<m_j}} b_{j,\alpha k} D^\alpha \lambda^k$$

où $b_{j,o}(x) \neq 0$, $x \in S$; $\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j,\alpha o}(x) N_x^\alpha = 0$, où N_x est la normale au point $x \in S$. Si $\{B_j\}$ satisfait à ces conditions, on dit qu'il est un <u>système normal</u>. On définit la partie principale de B_j par

$$B_j^o = b_{j,o} D_n^{m_j} + \sum_{|\alpha|+k=m_j} b_{j,\alpha k}(x) D^\alpha \lambda^k .$$

On suppose que tous les coefficients sont suffisamment différentiables dans $\bar{\Omega}$ et bornés avec leurs dérivées. Soient les conditions :

1) Pour tout $(x,\xi,\lambda) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$ tel que $(\xi,\lambda) \neq 0$, il existe δ (> 0) tel que

$$|A_o(x,\xi,\lambda)| \geqq \delta(|\xi|+\lambda)^{2m} .$$

2) Soit N_x la normale au point $x \in S$. Considérons l'équation en z

(4.9) $$A_\circ(x,\eta+zNx,\lambda) = 0 ,$$

où η est un vecteur réel $\in\mathbb{R}^{n-1}$, parallèle à un vecteur tangent au point x. Nous supposons que, pour tout $(\eta,\lambda)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\bar{\mathbb{R}}^1_+$, $(\eta,\lambda)\neq 0$, (4.9) admet exactement m racines $z_1(x,\eta,\lambda),\dots,z_m(x,\eta,\lambda)$, dont les parties imaginaires sont positives.

3) les polynomes (en z) $\{B^\circ_j(x,\eta+zNx,\lambda)\}_{j=1,2,\dots,m}$ sont linéairement indépendants modulo

$$\prod_{i=1}^{m}(z-z_i(x,\eta,\lambda)) \quad \text{pour tout } (x,\eta,\lambda)\in S\times\mathbb{R}^{n-1}\times\bar{\mathbb{R}}^1_+,(\eta,\lambda)\neq 0$$

THÉORÈME 4.1. <u>Supposons les conditions</u> 1), 2) <u>et</u> 3) <u>remplies; il existe une constante positive</u> $\lambda_\circ$ <u>telle que, pour tout</u> $\lambda \geqq \lambda_\circ$, <u>le problème au bord</u>

$$\begin{cases} A(x,D,\lambda)u(x) = f(x) \\ B_j(x,D,\lambda)u(x)|_S = 0 \end{cases}$$

<u>admette une solution unique</u> $u(x)\in H^{2m}(\Omega)$ <u>pour toute</u> $f(x)\in L^2(\Omega)$. <u>De plus, si</u> $f(x)\in H^s(\Omega)$, $u(x)\in H^{2m+s}(\Omega)$ $(s = 0,1,2,\dots)$.

La démonstration sera donnée en bref dans la section 7. Montrons que les conditions 1), 2), 3) sont remplies dans notre cas. La condition 1) est satisfaite. Examinons 2). Voyons (4.7). Comme $a(x,\xi) = \Sigma\, a_{ij}\xi_i\xi_j$, notons

(4.10) $$\varphi(z) = a(x,\eta+zNx) = a_\circ z^2 + 2a_1 z + a_2 ,$$

où $a_\circ > 0$, $a_\circ a_2 - a_1^2 > 0$, pour $\eta\neq 0$, et pour $\eta = 0$, $\varphi(z) = a_\circ z^2$. En effet, $a_\circ$ est indépendant de η, et a_1, a_2 sont des fonctions homogènes de degrés 1 et 2 respectivement. (4.9) devient alors

$$\prod_{i=1}^{m}(\alpha_i(x)\varphi(z) + \lambda^2) = 0 .$$

Les racines sont $z_i^{\pm} = b_1(\eta) \pm i\sqrt{b_2(\eta)+d_i\lambda^2}$ $(i = 1,2,\dots,m)$, où $b_1(\eta)$, $b_2(\eta)$ sont homogènes de degrés 1 et 2 respectivement ; b_1 est réel, $b_2 > 0$ $(\eta\neq 0)$ et $d_i > 0$ $(d_i\neq d_j)$. La condition 2) est donc vérifiée. En notant $z_i = z_i^+$ $(i = 1,2,\dots,m)$, examinons 3). Si la condition au bord est du type Dirichlet (1.5), $\{B^\circ_j\}$ devient

(4.11) $$1,\ \varphi(z),\ \varphi(z)^2,\dots,\varphi(z)^{m-1} ,$$

et si la condition est du type von Neumann,

(4.12) $$z,\ z\varphi(z),\ z\varphi(z)^2,\dots,z\varphi(z)^{m-1} .$$

Ceci préparé, considérons d'abord le cas (4.11). Si $\lambda\neq 0$, c'est-à-dire si $\lambda > 0$, z_i étant distincte, alors, compte tenu de $\varphi(z_i) = -\alpha_i^{-1}\lambda^2$, le déterminant de Lopatinski devient

$$\text{dét}[\varphi(z_j)^{i-1}]. \tag{4.13}$$

Il est clair que ce déterminant n'est pas nul. Si $\lambda = 0$, toutes les racines coïncident avec la racine $z_\circ$ de $\varphi(z_\circ) = 0$, où $\text{Im } z_\circ > 0$. Dans ce cas, (4.13) doit être remplacé par

$$\text{dét}[(\varphi^{i-1})^{(j-1)}(z_\circ)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi(z_\circ) & \varphi'(z_\circ) & \cdots & \varphi^{(m-1)}(z_\circ) \\ \varphi^2(z_\circ) & (\varphi^2)'(z_\circ) & \cdots & (\varphi^2)^{(m-1)}(z_\circ) \\ \cdots\cdots & & & \\ \varphi^{m-1}(z_\circ) & & \cdots & (\varphi^{m-1})^{(m-1)}(z_\circ) \end{vmatrix}. \tag{4.14}$$

Remarquons que $\varphi'(z_\circ) \neq 0$. On aura

$$(\varphi^p)^{(j)}(z_\circ) = \begin{cases} 0, & (0 \leqq j \leqq p-1) \\ p!\{\varphi'(z_\circ)\}^p & (j = p)\,. \end{cases}$$

Donc (4.14) n'est pas nul.

Pour le système (4.12), la situation est essentiellement la même. Remarquons que, si $\lambda = 0$, $z_\circ \neq 0$ et

$$(z\varphi^p)^{(j)}(z_\circ) = \begin{cases} 0, & (0 \leqq j \leqq p-1) \\ z_\circ p!\ \varphi'(z_\circ)^p & (j = p)\,. \end{cases}$$

On obtient donc le

THÉORÈME 4.2. <u>Il existe une constante positive</u> $\gamma_\circ$ <u>telle que, pour tout</u> $\lambda \geqq \gamma_\circ$ $(\geqq \gamma)$, $(\lambda I - \mathcal{A})$ <u>est une application bijective de</u> $D(\mathcal{A})$ <u>sur</u> $\mathcal{H}$, <u>et on a</u>

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leqq (\lambda - \gamma)^{-1}\,.$$

5. <u>Théorème d'existence</u>.

En vertu du théorème 4.2, on peut appliquer à (2.4) le théorème 2.2 de la partie au début. $F(t) \in D(\mathcal{A})$ signifie que $f(t) \in D(H)$. Nous avons donc : Etant donnés $U_\circ \in D(\mathcal{A})$, c'est-à-dire

$$(u_\circ, u_1, \ldots, u_{2m-1}) \in D(H^{2m}) \times D(H^{2m-1}) \times \ldots \times D(H),$$

et $f(t) \in D(H)$, continu pour la topologie $D(H)$, c'est-à-dire continu pour celle de $H^1(\Omega)$, il existe une solution unique de (2.4) telle que $U(t) \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}^1_t(\mathcal{H})$.

Revenons à l'équation (2.1). Supposons de plus que $f(t) \in \mathcal{E}^1_t(L^2(\Omega))$, c'est-à-dire que $f(t)$ soit une fois continuement différentiable à valeurs dans $L^2(\Omega)$. On a, en vertu de (2.8) de la partie au début,

$$(5.1) \qquad \sum_{i=1}^{2m} \|u^{(i)}(t)\|_{2m-i} \leq C \exp(\gamma t)[\sum_{i=0}^{2m-1} \|u_i\|_{2m-i} + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0 ds] .$$

D'autre part, d'après (2.1),

$$a_{2m}(x,D)u(t) = f(t) - [u^{(2m)}(t) + c_1 A u^{(2m-2)}(t) + \ldots + c_{m-1}A^{m-1}u''(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{2m-1} b'_{2m-1-i}\, u^{(i)}(t)] ,$$

où

$$a_{2m} = c_m(x)A^m + b'_{2m-1}(x,D) .$$

Or, d'après (7.1), on a

$$\|u(t)\|_{2m} \leq C[\|a_{2m}(x,D)u(t)\|_0 + \|u(t)\|_0] \qquad \text{pour} \qquad u(t)\in D(A^m) .$$

Compte tenu de (2.1) et (5.1), on obtient

$$(5.2) \qquad \sum_{i=0}^{2m} \|u^{(i)}(t)\|_{2m-i} \leq C' \exp(\gamma t)[\sum_{i=0}^{2m-1} \|u_i\|_{2m-i} + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0\, ds].$$

une fois qu'on a obtenu (5.2), on peut supprimer les conditions sur $f(t)$, en utilisant le raisonnement exposé dans la section 2 du chapitre I. Donc,

THÉORÈME 5.1. Etant donnés la donnée initiale

$$(u_0, u_1, \ldots, u_{2m-1})\in D(H^{2m}) \times D(H^{2m-1}) \times\ldots\times D(H)$$

et le second membre $f(t)$ tel que $f(t)\in\mathcal{E}^1_t(L^2(\Omega))$, il existe une solution unique $u(t)$ de (1.1) avec la donnée initiale $(u_0, \ldots, u_{2m-1})$ telle que

$$u(t), u'(t), \ldots, u^{(2m)}(t)$$

soient continues dans $D(H^{2m}), D(H^{2m-1}), \ldots, D(H)$, $L^2(\Omega)$ respectivement. On a l'inégalité d'énergie (5.2).

Remarque 1. $u\in D(H^s)$ signifie, dans le cas du type Dirichlet (1.5), que $u\in H^s(\Omega)$, et, pour $s = 2k-1$, $2k$, $(k = 1,2,\ldots)$, que

$$u|_S = au|_S = \ldots = a^{k-1}u|_S = 0 ,$$

et dans le cas du type von Neumann (1.6), que $u\in H^s(\Omega)$, et, pour $s = 2k$, $2k+1$ $(k = 1,2,\ldots)$ que

$$(\frac{d}{dn}+\sigma)u|_S = \dots = (\frac{d}{dn}+\sigma)(a^{k-1}u)|_S = 0 .$$

Remarque 2. On peut déduire du théorème 5.1 la régularité des solutions. Le raisonnement est essentiellement le même que celui qui se trouve dans la section 4 du chapitre I. Il devient considérablement plus simple, car ici les coefficients ne dépendent pas de t.

6. Démonstration du Théorème 3.1.

Nous allons préparer quelques lemmes.

LEMME 6.1. Soit $\varphi(y,z)$ $(y\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^n-\{0\})$, continue en (y,z), homogène de degré -1 en z, et indéfiniment différentiable en z dans $\mathbb{R}^n-\{0\}$. Nous supposons de plus que $\varphi(y,z)=\varphi(y,-z)$ et $\varphi(y,z)\geqq\delta\ (>0)$ pour tout $y\in\mathbb{R}^n, |z|=1$, et que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n, |z|=1} |D_z^\alpha\varphi(y,z)| < +\infty \quad \text{pour tout } \alpha .$$

Alors pour toute $u(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\sigma\to 1-0}\int_{|x-y|\leqq 1}(x_i-y_i)\varphi(y,x-y)^{-n-\sigma}u(y)dy$$
$$= \text{v.p.}\int_{|x-y|\leqq 1}(x_i-y_i)\varphi(y,x-y)^{-n-1}u(y)dy ,$$

la convergence étant au sens de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Développons $z_i\varphi(y,z)^{-n-\sigma}$, dont le moyen sphérique est nul, par les fonctions sphériques orthonormées,

$$z_i\varphi(y,x)^{-n-\sigma} = \Sigma\, C_{\ell m}(y,\sigma)Y_{\ell m}(z')|z|^{-n-\sigma+1} \qquad (z'=z/|z|) .$$

Envisageons la transformée de Fourier

$$Y_{\ell m,\sigma}(\xi) = \mathcal{F}[Y_{\ell m}(z')|z|^{-n-\sigma+1}|_{|z|\leqq 1}] = \int_{|z|\leqq 1} e^{-2\pi i z\xi}\,Y_{\ell m}(z')|z|^{-n-\sigma+1}dz .$$

En posant $|z|=\rho$, $|\xi|=r$, $\widehat{(z,\xi)}=\vartheta$, celle-ci devient

$$\int_\Omega Y_{\ell m}(\omega)d\omega\int_0^1\frac{e^{-2\pi i\rho r\cos\vartheta}}{\rho^\sigma}d\rho .$$

Puis, posant $s=r\rho\cos\theta$, l'intégrale s'écrit

$$r^{\sigma-1}\int_\Omega(\cos\theta)^{\sigma-1}\,Y_{\ell m}(\omega)d\omega\int_0^{r\cos\vartheta}\frac{e^{-2\pi i s}}{s^\sigma}ds .$$

Pour $r\cos\vartheta \leqq 1$, compte tenu de $\int Y_{\ell m}(\omega)d\omega = 0$, ceci s'écrit

$$r^{\sigma-1}\int_\Omega (\cos\theta)^{\sigma-1}\, Y_{\ell m}(\omega)d\omega \int_0^{r\cos\vartheta} \frac{e^{-2\pi is}-1}{s^\sigma}\, ds\ .$$

Pour $r\cos\theta > 1$, on écrit l'intégrale comme suit

$$\int_0^1 \frac{e^{-2\pi is}}{s^\sigma}\, ds + \int_1^{r\cos\theta} \frac{e^{-2\pi is}}{s^\sigma}\, ds = \int_0^1 \frac{e^{-2\pi is}-1}{s^\sigma}\, ds + \frac{1}{1-\sigma} + \int_1^{r\cos\theta} \frac{e^{-2\pi is}}{s^\sigma}\, ds\ .$$

Or,

$$\frac{r^{\sigma-1}}{1-\sigma}\int_\Omega (\cos\theta)^{\sigma-1}\, Y_{\ell m}(\omega)d\omega = \frac{r^{\sigma-1}}{1-\sigma}\int_\Omega \{(\cos\theta)^{\sigma-1} - 1\} Y_{\ell m}(\omega)d\omega\ ,$$

et

$$(\cos\theta)^{\sigma-1} - 1 = (\sigma-1)\log(\cos\theta).(\cos\theta)^{\sigma'-1} \qquad \sigma \leqq \sigma' \leqq 1,$$

d'où,

$$= -r^{\sigma-1}\int_\Omega \log(\cos\theta).(\cos\vartheta)^{\sigma'-1}\, Y_{\ell m}(\omega)d\omega\ .$$

Remarquons que $r\cos\theta > 1$; <u>a fortiori</u> $r > 1$. Ces deux expressions montrent qu'il existe une constante M telle que

(6.1) $$|\gamma_{\ell m,\sigma}(\xi)| \leqq M\ ,$$

M étant indépendante de $\ell, m, \sigma (> \sigma_0 > \frac{1}{2})$ et de ξ.

De plus,

$$\lim_{\sigma\to 1-0}\gamma_{\ell m,\sigma}(\xi) = \begin{cases} \int_\Omega Y_{\ell m}(\omega)d\omega \int_0^{r\cos\theta} \frac{e^{-2\pi is}-1}{s}\, ds & (r\cos\theta \leqq 1)\ , \\ \int_\Omega Y_{\ell m}(\omega)d\omega \int_0^1 \frac{e^{-2\pi is}-1}{s}\, ds + \int_\Omega Y_{\ell m}(\omega)d\omega \int_1^{r\cos\theta} \frac{e^{-2\pi is}}{s}\, ds & \\ -\int_\Omega \log(\cos\theta) - Y_{\ell m}(\omega)d\omega & (r\cos\theta > 1)\ . \end{cases}$$

Or, il est facile de voir que

(6.2) $$\lim_{\sigma\to 1-0}\gamma_{\ell m,\sigma}(\xi) = \mathcal{F}[\text{v.p.}(\frac{Y_{\ell m}(z')}{|z|^n})_{|z|<1}]\ .$$

En effet, d'après ce qui précède,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leqq|z|\leqq 1} e^{-2\pi iz\xi}\,\frac{Y_{\ell m}(z')}{|z|^n}\, dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega Y_{\ell m}(\omega)\int_{\varepsilon r\cos\theta}^{r\cos\theta} \frac{e^{-2\pi is}}{s}\, ds\ ,$$

et pour $r \cos\theta > 1$, on sépare l'intégrale en deux parties $[\varepsilon r \cos\theta, 1]$ et $[1, r\cos\theta]$,

$$\int_{\varepsilon r \cos\theta}^{1} \frac{e^{-2\pi i s}}{s}\,ds = \int_{\varepsilon r\cos\theta}^{1} \frac{e^{-2\pi i s}-1}{s}\,ds - \log(\cos\theta) - \log(\varepsilon r)\ .$$

D'où,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega Y_{\ell m}(\omega)d\omega \int_{\varepsilon r\cos\theta}^{1} \frac{e^{-2\pi i s}}{s}\,ds = \int_\Omega Y_{\ell m}(\omega)\Big[\int_0^1 \frac{e^{-2\pi i s}-1}{s}\,ds - \log(\cos\theta)\Big]d\omega\ .$$

On a donc (6.2).

De (6.1), (6.2), et compte tenu de l'ordre de décroissance de $\{\sup_y |C_{\ell m}(y,\sigma)|\}$, on voit facilement le lemme (voir Calderón-Zygmund [5]). C.Q.F.D.

LEMME 6.2. <u>Soit</u> $\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n, x_n > 0\}$. <u>Notons</u> $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$. <u>L'application</u> $f \to g$ <u>définie par</u>

$$g(x',x_n) = \int_0^\infty dy_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (|x'-y'| + x_n + y_n)^{-n} f(y',y_n)dy'$$

<u>est bornée dans</u> $L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Démonstration</u>. Comme le noyau $K = (|x'-y'| + x_n + y_n)^{-n}$ est symétrique et positif, il suffit de considérer (Kf,f) en supposant $f \geqq 0$.

$$(Kf,f) = \int_0^\infty dx_n \int_0^\infty I(x_n,y_n)dy_n\ ,$$

où

$$I(x_n,y_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x',x_n)(|x'-y'| + x_n + y_n)^{-n} f(y',y_n)dx'dy'\ .$$

Or

$$\int(|x'-y'| + x_n + y_n)^{-n} f(y',y_n)dy'$$
$$\leqq \{\int (|x'-y'|+x_n+y_n)^{-n}dy'\}^{\frac12} \{\int(|x'-y'|+x_n+y_n)^{-n}f(y',y_n)^2dy'\}^{\frac12}\ .$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(|x'-y'|+x_n+y_n)^{-n}dy' = c_n\int_0^\infty \frac{\rho^{n-2}}{(x_n+y_n+\rho)^n}\,d\rho = \frac{c'_n}{x_n+y_n}$$

(c'_n étant une constante ne dépendant que de n).

D'où

$$I(x_n,y_n) \leqq \sqrt{c'_n}\,(x_n+y_n)^{-\frac12}\int f(x',x_n)\{\int(|x'-y'|+x_n+y_n)^{-n}f(y',y_n)^2dy'\}^{\frac12}dx'\ .$$

D'après Schwarz,

$$I(x_n,y_n) \leqq \sqrt{c'_n}(x_n+y_n)^{-\frac{1}{2}}(\int f(x',x_n)^2 dx')^{\frac{1}{2}}(\iint (|x'-y'|+x_n+y_n)^{-n}f(y',y_n)^2 dx'dy')^{\frac{1}{2}}$$

$$= c'_n(x_n+y_n)^{-1} (\int f(x',x_n)^2 dx')^{\frac{1}{2}} (\int f(y',y_n)^2 dy')^{\frac{1}{2}} .$$

Utilisons l'inégalité d'Hilbert.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x+y}\, dxdy \leqq \pi \int_0^\infty \varphi(x)^2 dx .$$

On a donc

$$(Kf,f) \leqq c'_n \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{x_n+y_n} (\int f(x',x_n)^2 dx')^{\frac{1}{2}}(\int f(y',y_n)^2 dy')^{\frac{1}{2}} dx_n dy_n$$

$$\leqq c'_n \pi \int_0^\infty \int_0^\infty f(x',x_n)^2 dx' dx_n .$$

C.Q.F.D.

Le lemme suivant est facile à vérifier.

LEMME 6.3. <u>Soit</u> $G(x,y,\sigma)$ <u>une fonction mesurable en</u> $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, <u>et supposons que, sauf sur un ensemble de mesure nulle</u> $e\subset\Omega\times\Omega$, <u>elle est une fonction continue en</u> $\sigma\in[0,1]$. <u>Supposons qu'il existe une fonction positive mesurable</u> $\Phi(x,y)$ <u>telle que</u>

1) $|G(x,y,\sigma)| \leqq \Phi(x,y)$,

2) $\Phi(x,y)$ <u>définit une application bornée dans</u> $L^2(\Omega)$.

<u>Posons</u> $G_\sigma u = \int G(x,y,\sigma)u(y)dy$. <u>Alors pour toute</u> $u(x)\in L^2(\Omega)$, $G_\sigma u \to G_{\sigma_0} u$ <u>dans</u> $L^2(\Omega)$, <u>lorsque</u> $\sigma\to\sigma_0$.

<u>Démonstration du théorème</u> 3.1.

Rappelons que

$$A = -\Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}) + \beta \quad . \tag{6.3}$$

On sait que

$$A^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-tA}\, t^{\sigma-1} dt \qquad (\sigma > 0) .$$

Supposons $u\in D(A)$ et $0<\sigma<1$, on a

$$A^{\sigma}u = A^{\sigma-1}Au = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^{\infty} e^{-tA}\, t^{-\sigma}\, Au\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^{\infty} -(e^{-tA} - I)'_t u . t^{-\sigma}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\sigma)} \int_0^{\infty} t^{-\sigma-1}(e^{-tA} - I)u\, dt\ .$$

Comme $H = \sqrt{A}$, on obtient donc, pour $u \in D(A)$.

$$(6.4) \qquad H^{\sigma}u = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\sigma}{2})} \int_0^{\infty} t^{-\frac{\sigma}{2}-1}(e^{-tA} - I)u\, dt \qquad (0 < \sigma < 2).$$

Maintenant supposons $u \in D(H) = D(\sqrt{A})$. Comme $\|e^{-tA} - I)A^{-\frac{1}{2}}\| \leqq \text{const.} \sqrt{t}$ pour $0 \leqq t \leqq 1$, on voit que, si $0 < \sigma < 1$, par passage à la limite, (6.4) est aussi valable. Si $u(x) \in D(H)$, alors $a(x)u(x) \in D(H)$, d'après la Proposition 1.1. On a finalement,

$$(6.5) \qquad (a(x)H^{\sigma} - H^{\sigma}a(x))u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\sigma}{2})} \int_0^{\infty} t^{-\frac{\sigma}{2}-1}(a(x)e^{-tA} - e^{-tA}a(x))u\, dt\ ,$$

où $0 < \sigma < 1$, $u \in D(H)$.

D'où,

$$(6.6) \qquad (a(x)H - Ha(x))u = \lim_{\sigma \to 1-0} \frac{1}{\Gamma(-\frac{\sigma}{2})} \int_0^{\infty} t^{-\frac{\sigma}{2}-1}(a(x)e^{-tA} - e^{-tA}a(x))u\, dt\ ,$$

où la limite est à prendre au sens de $L^2(\Omega)$. Nous allons montrer que, pour tout σ fixé $(0 < \sigma < 1)$, <u>le second membre défini par l'intégrale est une application bornée dans</u> $L^2(\Omega)$, <u>et, lorsque</u> σ <u>tend vers</u> 1, <u>la limite (au sens de</u> $L^2(\Omega)$) <u>existe pour toute</u> $u(x) \in L^2(\Omega)$.

Cela suffira pour démontrer le théorème.

On sait que e^{-tA} s'exprime par le noyau de Green, qui a les propriétés suivantes :

$$e^{tA}u(x) = \int_{\Omega} G(t,x,y)u(y)dy \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^1_+ \times \Omega\ ,$$

$$(6.7) \qquad G(t,x,y) = G_0(t,x-y,y) + G_1(t,x,y) + G_c(t,x,y)\ ,$$

où $(G_0 + G_1)$ est le noyau de Green correspondant au problème de Cauchy, et $G_c(t,x,y)$ est le noyau compensateur. Explicitons-le :

$$G_0(t,x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-a(y,\xi)t\} e^{ix\xi} d\xi\ ,$$

où

$$a(y,\xi) = \Sigma\, a_{ij}(y)\xi_i\xi_j\ .$$

Par un calcul facile, on voit que

(6.8) $$G_\circ(t,x-y,y) = \{\Delta(y)\}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \exp\left(-\frac{\psi(y,x-y)}{4t}\right),$$

où

(6.9) $$\begin{cases} \psi(y,x-y) = \Sigma\, a^{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j), \\ [a^{ij}(y)] = [a_{ij}(y)]^{-1}, \quad \Delta(y) = \text{dét}\,[a_{ij}(y)]\,. \end{cases}$$

D'autre part, on a la majoration suivante [6],

(6.10) $$|G_1(t,x,y)|\ \text{const.}\ t^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-c\,\frac{|x-y|^2}{t}\right\}, \qquad \begin{array}{l}(c > 0)\\ (0 < t \leqq 1).\end{array}$$

Finalement, on sait que (voir [11], ou plutôt le travail d'Arima [3]), on a la majoration suivante, dont la preuve est assez délicate :

(6.11) $$|G_c(t,x,y)| \leqq \text{const.}\ t^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-c\,\frac{\{|x-y|+\ell_x+\ell_y\}^2}{t}\right] \quad (0 < t \leqq 1)$$

où $c > 0$, constante, et $\ell_x = \text{dis}\,(x,S)$. Plus précisément, cette inégalité est une majoration quand x et y sont au voisinage d'un point de S. Par conséquent, si Ω est le domaine extérieur, on entend cette majoration au sens que

$$\ell_x = \min\,(\ell_x,\delta),\ \ell_y = \min\,(\ell_y,\delta),$$

δ étant une constante positive fixée. Remarquons finalement que tous les noyaux sont continus pour $t \geqq 0$, si $x \neq y$.

Revenons à notre but. Considérons

$$\int_1^\infty t^{-\frac{\sigma}{2}-1}(e^{-tA} - I)u\,dt\,.$$

Elle est restée application bornée pour $0 < \sigma \leqq 1$, et, pour toute $u(x) \in L^2(\Omega)$ fixée, elle est une fonction continue en σ à valeurs $L^2(\Omega)$. Le noyau

$$\int_1^\infty G_\circ(t,x-y,y)\,t^{-\frac{\sigma}{2}-1}\,dt$$

a la même propriété que le précédent. Pour atteindre notre but, il suffit donc de considérer le noyau

$$(6.12)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \{a(x)G_0(t,x-y,y) - G_0(t,x-y,y)a(y)\}t^{-\frac{\sigma}{2}-1}dt \\[2ex] + \int_0^1 \{a(x)G_1(t,x,y) - G_1(t,x,y)a(y)\}t^{-\frac{\sigma}{2}-1}dt \\[2ex] + \int_0^1 \{a(x)G_c(t,x,y) - G_c(t,x,y)a(y)\}t^{-\frac{\sigma}{2}-1}dt \\[2ex] \equiv T_\sigma(x,y) + K_\sigma^1(x,y) + K_\sigma^c(x,y) . \end{cases}$$

Envisageons d'abord $T_\sigma(x,y)$.

$$\int_0^\infty G_0(t,x-y,y)t^{-\frac{\sigma}{2}-1}dt = c(\sigma)\psi(y,x-y)^{-\frac{n}{2}-\frac{\sigma}{2}}\{\Delta(y)\}^{-\frac{1}{2}},$$

où $c(\sigma)$ est continue pour $\sigma > 0$.

Donc

$$(T_\sigma u)(x) = c(\sigma)\int \{a(x) - a(y)\}\psi(y,x-y)^{-\frac{n}{2}-\frac{\sigma}{2}} v(y)dy ,$$

où

$$v(y) = \{\Delta(y)\}^{-\frac{1}{2}} u(y).$$

En développant ,

$$(6.13)\qquad a(x) - a(y) = -\Sigma\,(y_i-x_i)\frac{\partial a}{\partial x_i}(x) + \sum_{i,j} a_{ij}(x,y),$$

où

$$|a_{ij}(x,y)| \leqq c|x-y|^{1+\sigma} , \quad (|x-y| \leqq 1) .$$

On a alors,

$$\begin{aligned}(T_\sigma u)(x) &= c(\sigma)\int_{|x-y|\leqq 1} \Sigma \frac{\partial a}{\partial x_i}(x)(x_i-y_i)\psi(y,x-y)^{-\frac{n}{2}-\frac{\sigma}{2}} v(y)dy \\ &+ c(\sigma)\int_{|x-y|\leqq 1} \Sigma\, a_{ij}(x,y)\psi(y,x-y)^{-\frac{n}{2}-\frac{\sigma}{2}} v(y)dy \\ &+ c(\sigma)\int_{|x-y|>1} \{a(x)-a(y)\}\psi(y,x-y)^{-\frac{n}{2}-\frac{\sigma}{2}} v(y)dy .\end{aligned}$$

T_σ $(0 < \sigma < 1)$ est bien un opérateur borné dans $L^2(\Omega)$, et en appliquant les lemmes 6.1 et 6.3, on voit facilement que

$$\lim_{\sigma \to 1-0} T_\sigma u = T_1 u \quad \text{pour toute} \quad u(x) \in L^2(\Omega) ,$$

la limite est au sens de $L^2(\Omega)$, et T_1 est un opérateur borné.

Envisageons $K_\sigma^1(x,y)$. Remarquons d'abord que

$$\int_0^1 G_1(t,x,y) t^{-\frac{\sigma}{2}-1} dt$$

est continue en $\sigma \in]0,1]$, pour tout x,y tels que $x \neq y$. D'autre part, d'après (6.10),

$$\int_0^1 |G_1(t,x,y)| t^{-\frac{\sigma}{2}-1} dt \leqq \text{const.}\ |x-y|^{-(n-1+\sigma)} \qquad (|x-y| \leqq 1) .$$

D'où la majoration pour $\sigma \in]0,1]$,

$$|K_\sigma^1(x,y)| \leqq \begin{cases} c|x-y|^{-n+1} & (|x-y| \leqq 1) \\ c|x-y|^{-n-1} & (|x-y| > 1) . \end{cases}$$

D'après le lemme 6.3, on a donc

$$\lim_{\sigma \to 1-0} \int K_\sigma^1(x,y) u(y) dy = \int K_1^1(x,y) u(y) dy, \qquad \forall\ u(x) \in L^2(\Omega) ,$$

la convergence étant au sens de $L^2(\Omega)$.

Envisageons finalement,

$$K_\sigma^c(x,y) = \int_0^1 \{a(x) G_c(t,x,y) - G_c(t,x,y) a(y)\} t^{-\frac{\sigma}{2}-1} dt.$$

D'après (6.11), $K_\sigma^c(x,y)$ est continu en $\sigma \in]0,1]$, et

$$(6.14) \qquad \int_0^1 |G_c(t,x,y)| t^{-\frac{\sigma}{2}-1} dt \leqq \text{const.}\ (|x-y| + \ell_x + \ell_y)^{-n-1} \quad \text{pour} \quad \sigma \in]0,1] .$$

Soit Ω_δ l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que $\text{dis}(x,S) \geqq \delta$. Soit $\psi_\delta(x)$ la fonction caractéristique de Ω_δ ; considérons le noyau $K_\sigma^c(x,y)\psi_\delta(y)$. On a

$$|K_\sigma^c(x,y)\psi_\delta(y)| \leqq \text{const.}\ (|x-y| + \ell_x + \delta)^{-n-1}$$

De même,

$$|\psi_\delta(x) K_\sigma^c(x,y)(1 - \psi_\delta(y))| \leqq \text{const.}\ (|x-y| + \delta + \ell_y)^{-n-1} .$$

Finalement, considérons $(1-\psi_\delta(x)) K_\sigma^c(x,y)(1-\psi_\delta(y))$. En utilisant

$$a(x) - a(y) = \Sigma\ (x_i - y_i)a_i(x,y)\ ,$$

on voit que

$$|(1-\psi_\delta(x))K_\sigma^c(x,y)(1-\psi_\delta(y))| \leqq \text{const.}\ (|x-y| + \ell_x + \ell_y)^{-n}\ .$$

En appliquant aux trois noyaux les lemmes 6.2 et 6.3, on voit que

$$\lim_{\sigma\to 1-0} \int K_\sigma^c(x,y)u(y)dy = \int K_1^c(x,y)u(y)dy \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$

pour toute $u(x)\in L^2(\Omega)$.

C.Q.F.D.

7. Démonstration du théorème 4.1.

Nous allons adapter le travail de Schechter [13]. Nous nous limitons à indiquer certains points essentiels.

Utilisons la norme $\|u\|_{s,\lambda}$ $(s = 0,1,2,\dots\ ;\ \lambda > 0)$ dans $H^s(\Omega)$ définie par

$$\|u\|_{s,\lambda}^2 = \sum_{|\alpha|+j=s} \lambda^{2j} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx$$

$$= |u|_s^2 + \lambda^2|u|_{s-1} + \dots + \lambda^{2s}|u|_0^2\ .$$

De même on introduit la norme $< u >_{s-\frac{1}{2},\lambda}$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(S)$. Si S est l'hyperplan $x_n = 0$, en notant $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$, on définit

$$< u(x') >_{s-\frac{1}{2},\lambda}^2 = \int |\hat{u}(\xi')|^2(|\xi'|^2+\lambda^2)^{s-\frac{1}{2}}d\xi'\ .$$

En utilisant une partition de l'unité, on définit $< u >_{s-\frac{1}{2},\lambda}$. Evidemment cette norme dépend de la partition, mais on choisit une partition une fois pour toutes.

LEMME 7.1. Pour tout s entier non négatif, il existe deux constantes $C(s)$ et $\lambda_0(s)$ telles que pour $\lambda \geqq \lambda_0$, on ait

$$(7.1)\quad \|u\|_{2m+s,\lambda} \leqq C(s)[\|A(x,D,\lambda)u\|_{s,\lambda} + \sum_{j=1}^m < B_j(x,D,\lambda)u >_{2m-m_j-\frac{1}{2},\lambda}]\ ,$$

pour tout $u(x)\in H^{2m+s}(\Omega)$.

Démonstration. Supposons que A_0, B_j^0 sont des opérateurs à coefficients constants, et que $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x\in\mathbb{R}^n; x_n > 0\}$.

Les relations

$$A_0(D_n,D',\lambda)u(x_n,x',\lambda) = f(x_n,x',\lambda)\ , \qquad x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$$

$$B_j^0(D_n,D',\lambda)u(x_n,x',\lambda)|_{x_n=0} = g_j(x',\lambda)$$

deviennent, par la transformation en x',

$$\begin{cases} A_\circ(D_n,\xi',\lambda)\hat{u}(x_n,\xi',\lambda) = \hat{f}(x_n,\xi',\lambda) \\ B_j^\circ(D_n,\xi',\lambda)\hat{u}(+0,\xi',\lambda) = \hat{g}_j(\xi',\lambda). \end{cases}$$

D'après un raisonnement habituel, et compte tenu de l'homogénéité des $A_\circ$ et B_j°, on aura pour $\lambda \geqq 0$,

$$\sum_{k=0}^{2m+s} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (|\xi'|^2 + \lambda^2)^{2m-k+s} |D_n^k \hat{u}(x_n,\xi',\lambda)|^2 dx_n d\xi'$$

$$\leqq C[\sum_{j+k=s} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (|\xi'|^2 + \lambda^2)^j |D_n^k \hat{f}(x_n,\xi',\lambda)|^2 dx_n d\xi'$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (|\xi'|^2 + \lambda^2)^{2m-m_j-\frac{1}{2}+s} |\hat{g}_j(\xi',\lambda)|^2 d\xi'] .$$

Dans le cas général, à partir de cette majoration, on suit le raisonnement habituel. C.Q.F.D.

LEMME 7.2. Il existe un autre système normal (au sens que nous avons donné dans la section 4) $\{B_j'(x,D,\lambda)\}_{j=1,2,\dots,m}$ tel que

$$(7.2) \qquad (Au,v) - (u,A^*v) = \sum_{j=1}^m \int_S B_j(x,D,\lambda)u.\overline{C_j(x,D,\lambda)v}\, dS$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_S C_j'(x,D,\lambda)u.\overline{B_j'(x,D,\lambda)v}\, dS ,$$

pour tout $(u,v)\in H^{2m}(\Omega) \times H^{2m}(\Omega)$. Le système $\{B_j'\}$ aussi recouvre A^*, c'est-à-dire que le système $\{A^*,B_j'\}$ satisfait aux mêmes conditions 1), 2), 3) que nous avons supposées pour $\{A,B_j\}$.

Démonstration. Comme auparavant, supposons $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

$$(Au,v) - (u,A^*v) = i \sum_{k=0}^{2m-1} \int D_n^k u.\overline{N_{2m-1-k}(x,D,\lambda)v}\, d\sigma ,$$

où $N_{2m-1-k}(x,D,\lambda)$ est un opérateur d'ordre $2m-1-k$ en (D,λ), ayant la forme de B_j que nous avons considérée. Remarquons que la partie principale $N_{2m-1-k}^\circ(x,D,\lambda)$ se calcule au moyen de $A_\circ$. Alors en suivant [13], on arrive à l'expression (7.2), où C_j et C_j' sont des opérateurs ayant la même forme que I

Montrons que $\{B'_j\}$ recouvre A^*. Ceci se réduit essentiellement au fait suivant : soit $A(D_t)$ $(D_t = i^{-1}\frac{d}{dt}$, $t \in \bar{R}^1_+)$ un opérateur elliptique d'ordre $2m$, c'est-à-dire que $A(\tau) \neq 0$ pour tout τ réel, et que $A(\tau) = 0$ admet m racines $\tau_1, \ldots, \tau_m$ telles que $\operatorname{Im}[\tau_j] > 0$; soit $\{B_j(D_t)\}_{j=1,\ldots,m}$ un système normal, c'est-à-dire; ordre $(B_j) = m_j < 2m$ $(m_i \neq m_j)$. Dans ces conditions, tout système adjoint $\{B'_j(D_t)\}_{j=1,\ldots,m}$ recouvre $A^*(D_t)$. C.Q.F.D.

<u>Démonstration du théorème</u> 4.1.

Compte tenu des lemmes 7.1 et 7.2, on voit que l'inégalité (7.1) est aussi valable pour le système $\{A^*, B'_j\}$.

$$(7.3) \qquad \|u\|_{2m,\lambda} \leqq C[\|A^*(x,D,\lambda)u\|_0 + \sum_{j=1}^{m} < B'_j(x,D,\lambda)u >_{2m-m_j-\frac{1}{2},\lambda}] , \quad \text{pour } \lambda \geqq \lambda'_o .$$

Considérons l'équation en $u \in H^{2m}(\Omega)$, pour $\lambda \geqq \lambda'_o$,

$$(7.4) \qquad (A^*u, A^*\varphi)_o + \sum_{j=1}^{m} < B'_j u, B'_j\varphi >_{2m-m_j-\frac{1}{2},\lambda} = (f,\varphi) \quad \forall\ \varphi \in H^{2m}(\Omega) .$$

D'après Riesz, pour toute $f(x) \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H^{2m}(\Omega)$. On montre dans ce cas que $u \in H^{4m}(\Omega)$. Posons $A^*u = w \in H^{2m}(\Omega)$. On voit d'abord que $Aw = f$, en prenant $\varphi \in D(\Omega)$. Ensuite prenons $\varphi \in D(A^*)$, c'est-à-dire :

$$\varphi \in H^{2m}(\Omega), \quad B'_j\varphi|_S = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,m).$$

En utilisant (7.2), on obtient

$$\sum_{j=1}^{m} \int_S B_j w . \overline{C_j\varphi}\, dS = 0 ,$$

ce qui entraîne que $B_j w|_S = 0$. w est donc la solution cherchée. La régularité de w en découle par un raisonnement habituel. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON, Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, Colloques sur les équations aux dérivées partielles, C.N.R.S. (1962) 13-18.

[2] M.S. AGRONOVIČ, Positive problems of mixed type for certain hyperbolic systems. Dokl. Akad. Nauk U.S.S.R., 167 (1966), 539-542.

[3] R. ARIMA, On general boundary value problem for parabolic equations, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1964), 207-244.

[4] F. BROWDER, On the spectral theory of elliptic partial differential operators, I, Math. Ann. 142 (1961), 22-130.

[5] A.P. CALDERÓN-A. ZYGMUND, Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math. 79 (1957), 901-921.

[6] S.D. EIDELMAN, On fundamental solutions of parabolic systems, Mat. Sbornik, 38 (1956), 51-92.

[7] K.O. FRIEDRICHS, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 11 (1958), 333-418.

[8] M. KRZYZANSKI-J. SCHAUDER, Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben, Studia Math. 6 (1936), 162-189.

[9] O.A. LADYŽENSKAYA, Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques (en russe), (1953), Moscow.

[10] J.L. LIONS, Une remarque sur les applications du théorème de Hille-Yosida, J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 62-70.

[11] S. MINAKSHISUNDARAM, A generalisation of Epstein Zeta functions. Can. J. Math. 1 (1947), 320-326.

[12] R.S. PHILLIPS, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 193-254.

[13] M. SCHECHTER, General boundary value problems for elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 19 (1959) 457-486.

[14] K. YOSIDA, An operator theorical integration of the wave equations, J. Math. Soc. Japan, 8 (1956), 79-92.