

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

J. L. LIONS

Résolution itérative d'inéquations variationnelles par décomposition et éclatement

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1966-1967), p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1966-1967__1_1_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION ITÉRATIVE D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES
PAR DÉCOMPOSITION ET ÉCLATEMENT

par J.L. LIONS

La méthode itérative donnée ici est due à R. TEMAM et l'A. [12].

Le plan est le suivant :

1. Énoncé de la méthode itérative.

1.1. Rappel.

1.2. Le problème.

1.3. Un exemple simple.

1.4. La méthode itérative.

2. Remarques heuristiques. Liens avec d'autres méthodes.

2.1. Une remarque sur le cas des équations.

2.2. Equations d'évolution et "splitting up".

2.3. Le procédé itératif.

2.4. Raccord avec d'autres méthodes.

3. Démonstration du théorème de convergence de la méthode itérative.

4. Exemples.

On considère seulement ici le cas de formes bilinéaires continues sur un Hilbert. La méthode s'étend [13], au moins pour l'essentiel, à certains des problèmes d'inéquations variationnelles que l'on rencontre en théorie du contrôle optimal [9] ou dans les équations d'évolution [1] [8] [10].

1. Énoncé de la méthode itérative.

1.1. Rappel. Soit V un espace de Hilbert sur \mathbb{R} , et $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue sur V , coercive au sens

$$(1.1) \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad v \in V, \quad \|v\| = \text{norme de } v \text{ dans } V.$$

Soit K un ensemble convexe fermé de V et soit L une forme linéaire continue sur V . Alors [19] (autre démonstration dans [11]),

THÉORÈME 1.1. L'hypothèse (1.1) ayant lieu, il existe $u \in K$ unique tel que

$$(1.2) \quad a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K.$$

Remarque 1.1.

En fait l'hypothèse (1.1) est inutilement restrictive pour la validité du théorème 1.1, qui est encore vrai en supposant $a(v,v) \geq 0$ et

$$(1.3) \quad \frac{a(v,v)}{\|v\|} \rightarrow +\infty \quad \text{si } v \in K, \quad \|v\| \rightarrow \infty$$

Cf. [1] [6].

Remarque 1.2.

Il a été montré dans [6], puis dans [2] [1], que l'énoncé (1.2) peut s'étendre à des formes $a(u,v)$ non linéaires en u , mais "monotones". Il est probable (mais non explicité, semble-t-il) que la méthode itérative proposée ci-après,

s'étend (sous des hypothèses convenables...) à certains cas "monotones non linéaires".

Remarque 1.3.

Si $a(u,v) = a(v,u) \forall u,v \in V$, le théorème 1.1 est immédiat ; la solution u est l'unique élément de K qui minimise $a(v,v) - 2L(v)$.

Remarque 1.4.

Les résultats ci-après s'étendent au cas où l'on remplace $L(v-u) = L(v) - L(u)$ par $F(v) - F(u)$, $F \in \Gamma(V)$ au sens de Moreau⁽¹⁾.

1.2. Le problème.

On va supposer que

$$(1.4) \quad V = \bigcap_{i=1}^q V_i, \quad K = \bigcap_{i=1}^q K_i$$

$$(1.5) \quad a(u,v) = \sum_{i=1}^q a_i(u,v)$$

et faire "éclater" le problème (1.2) en une série de problèmes chacun relatifs à $\{a_i, V_i, K_i\}$.

Précisons d'abord les hypothèses.

On se donne un espace de Hilbert H sur \mathbb{R} avec

$$(1.6) \quad V \subset H, \quad V \text{ dense dans } H, \quad V \rightarrow H \text{ continue}$$

Soit $\| \cdot \|$ la norme sur H , et (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans H .

Soit

$$(1.7) \quad \begin{cases} V_i = \text{espace de Hilbert sur } \mathbb{R}, \quad V_i \subset H, \quad V_i \text{ dense dans } H, \\ V_i \rightarrow H \text{ continue, } \| \cdot \|_i = \text{norme dans } V_i, \quad 1 \leq i \leq q. \end{cases}$$

On suppose

$$(1.8) \quad V = \bigcap_{i=1}^q V_i, \quad \|v\| \sim \left(\sum_{i=1}^q \|v\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ensuite soit

$$(1.9) \quad \begin{cases} K_i = \text{convexe fermé de } V_i, \quad 1 \leq i \leq q \\ K = \bigcap_{i=1}^q K_i. \end{cases}$$

Enfin

$$(1.10) \quad \begin{cases} \text{dans (1.5), chaque } a_i \text{ est une forme bilinéaire continue sur } V_i, \text{ avec} \\ a_i(v,v) \geq \alpha_i \|v\|_i^2, \quad \alpha_i > 0, \quad \forall v \in V_i \end{cases}$$

⁽¹⁾ Séminaire Leray, 1966-67.

Remarque 1.5.

Il suffirait de la coercivité de a_i sur $K_i - K_{i..}$.

Avant de donner la méthode itérative, donnons un exemple simple.

1.3. Un exemple simple.

Soit : $\Omega =$ ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ assez régulière ;

$$V = H^1(\Omega) = \{v | v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\} \quad (2),$$

$$H = L^2(\Omega), (f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + (u, v),$$

$$K = \{v | v \in H^1(\Omega), v \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma \quad (3)\}.$$

On prendra alors (4)

$$V_i = \{v | v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\};$$

muni de la norme

$$\|v\|_i = \left(\int_{\Omega} [v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est un espace de Hilbert et l'on a (1.7) (1.8).

Puis

$$(1.11) \quad K_i = \text{adhérence de } K \text{ dans } V_i \quad (5).$$

Formellement

$$K_i = \{v | v \in V_i, v \geq 0 \text{ sur la portion de } \Gamma \text{ où } v \text{ peut être défini}\}.$$

Par exemple si

$$\Omega =]-1, 1[\quad (n)$$

on a :

$$K_i = \{v | v \in V_i, v(x_1, \dots, x_{i-1}, \pm 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0\}.$$

Ensuite

$$a_i(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{n}(u, v)$$

et l'on a (1.5) (1.10).

Voir d'autres exemples au n°3.

(2) Espace de Sobolev classique.

(3) Cela a un sens et définit un convexe fermé de $H^1(\Omega)$ (en fait un cône).

(4) Naturellement une infinité d'autres "éclatements" sont possibles.

(5) Cela n'est pas toujours vérifié. Cf. Exemple 4.2.

1.4. La méthode itérative.

Soient ε, k deux paramètres > 0 . Soit $u^0 \in K_q$.

Supposons $u^{n+\frac{i-1}{q}} \in K_{i-1}$ ($1 \leq i \leq q$) connu. On détermine $u^{n+i/q}$ comme la solution dans K_i de

$$(1.12) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{k} (u^{n+i/q} - u^{n+\frac{i-1}{q}}, v - u^{n+i/q}) + a_i(u^{n+i/q}, v - u^{n+i/q}) \geq L_i(v - u^{n+i/q}) \\ \forall v \in K_i \end{cases}$$

où

$$(1.13) \quad \begin{cases} L_i = \text{forme linéaire continue sur } V_i, \\ L = \sum_{i=1}^q L_i \quad (6) \end{cases}$$

Remarque 1.6. La solution $u^{n+i/q}$ de (1.12) existe et est unique d'après le théorème 1.1.

On peut maintenant énoncer le

THÉOREME 1.2. On suppose que (1.1) (1.4) ... (1.10) (1.13) ont lieu. On suppose que $\varepsilon, k \rightarrow 0$ avec

$$(1.14) \quad \frac{k}{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

On suppose que N est un entier $\rightarrow +\infty$ avec

$$(1.15) \quad Nk = T, \quad T \text{ fixé } > 0.$$

Alors

$$(1.16) \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+i/q} \rightarrow u \text{ dans } V_i \text{ faible,}$$

où u est la solution de (1.2).

La démonstration est donnée au n° 3.

Remarque 1.7.

On donne dans [12] un résultat plus général correspondant à une discrétisation de la situation (en vue de l'Analyse Numérique de ces problèmes). Mais l'idée de la démonstration est la même que celle donnée au n° 3.

Remarque 1.8.

Cf. [7] pour d'autres méthodes itératives.

2. Remarques heuristiques. Liens avec d'autres méthodes.

2.1. Une remarque sur le cas des équations.

Soit V' le dual de V , $V \subset H \subset V'$, et $A \in \mathcal{L}(V, V')$ l'opérateur défini par $a(u, v) : a(u, v) = (Au, v)$, $u \in V$, $v \in V$, $Au \in V'$ (et (Au, v) désignant le produit scalaire entre V' et V).

(6) Une telle décomposition existe toujours.

Pour L donné dans V' , soit u la solution unique de

$$(2.1) \quad Au = L \quad (7)$$

Associions à (2.1) le problème d'évolution

$$(2.2) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{dw_\varepsilon}{dt}(t) + Aw_\varepsilon(t) = L & (\varepsilon > 0) \\ w_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_0 \text{ quelconque dans } V \text{ (ou } H). \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique, $w_\varepsilon \in L^2(0, T; V)$ et on vérifie facilement que

$$(2.3) \quad \frac{1}{T} \int_0^T w_\varepsilon(t) dt \rightarrow u \quad \text{dans } V \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

2.2. Equations d'évolution et "splitting-up".

Le résultat (2.3) montre que, pour "approcher" u , "il suffit d'approcher" la solution d'une équation d'évolution de la forme

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = L \\ u(0) = u_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

Une méthode fondamentale en analyse numérique est la suivante : supposons que

$V = \bigcap_{i=1}^q V_i$ et que l'on ait (1.5) (et (1.10)), d'où avec des notations évidentes

$$(2.5) \quad A = \sum_{i=1}^q A_i.$$

Supposons également que (1.13) ait lieu.

Admettons $u(t)$ "calculé approximativement" à l'instant

$$t_n = nk$$

et soit u^n cette "approximation". On va calculer l'approximation u^{n+1} au temps $(n+1)k$ en décomposant (splitting up) (2.4) en q équations, de la façon suivante : on considère :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u^{n+i/q}(t) + A_i u^{n+i/q}(t) = L_i & \text{dans } [t_n, t_{n+1}] \\ u^{n+i/q}(t_n) = u^{n + \frac{i-1}{q}}(t_{n+1}) \end{cases}$$

et l'on prend

$$(2.7) \quad u^{n+1} = u^{n+1}(t_{n+1}).$$

Cette méthode a été étudiée dans [14] [23] [20] [21]. Antérieurement des méthodes de ce genre, mais techniquement un peu différentes, avaient été introduites dans [3] [16] (méthodes de Directions Alternées).

2.3. Le procédé itératif (1.12) consiste à utiliser simultanément les idées des points 2.1, 2.2, à discrétiser en t l'équation correspondant à (2.6) et enfin à remplacer les équations par des inéquations variationnelles.

(7) Cela correspond à $K = V$ dans le théorème 1.1.

On arrive ainsi à la formulation (1.12).

2.4. Raccord avec d'autres méthodes.

La méthode du "splitting up" évoquée en 2.2 est évidemment liée au théorème de Trotter [22] (cf. des variantes et applications récentes dans [4]) : si A et B sont générateurs infinitésimaux de semi groupes alors, sous des hypothèses convenables [22] [4] on a :

$$\exp t(A+B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp \frac{t}{n} A \exp \frac{t}{n} B \right)^n$$

3. Démonstration du théorème de convergence de la méthode itérative.

3.1. Estimations a priori.

On peut écrire (1.12) sous la forme équivalente

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{k} (u^{n+i/q} - u^{n+\frac{i-1}{q}}, u^{n+i/q} - v) + a_i(u^{n+i/q}, u^{n+i/q}) & \cong \\ & \cong a_i(u^{n+i/q}, v) - L_i(v - u^{n+i/q}), \quad \forall v \in K_i. \end{cases}$$

Fixons v dans $K = \cap K_i$ dans (3.1). Posons

$$(3.2) \quad \varphi^{n+i/q} = u^{n+i/q} - v.$$

On déduit de (3.1)

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2k} [|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 + |\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2] + \alpha_i \|u^{n+i/q}\|_i^2 & \cong \\ & \cong c (\|u^{n+i/q}\|_i + \|v - u^{n+i/q}\|_i) \end{cases}$$

où ici et dans la suite les c désignent des constantes diverses. On en déduit aussitôt

$$(3.4) \quad \varepsilon [|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 + |\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2] + k \|u^{n+i/q}\|_i^2 \cong ck.$$

De (3.4) résulte d'abord que

$$\varepsilon (|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2) \cong ck.$$

Par sommation on en déduit

$$(3.5) \quad \varepsilon (|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^0|^2) \cong cqkn$$

On suppose $0 \cong n \cong N-1$. D'après (1.15) on a donc $kn \cong T$ et (3.5) entraîne

$$(3.6) \quad \varepsilon |\varphi^{n+i/q}|^2 \cong c, \quad \text{d'où évidemment } \varepsilon |u^{n+i/q}|^2 \cong c.$$

Sommant en i de 1 à q puis en n de 1 à N-1 on déduit ensuite de

(3.4) que

$$(3.7) \quad \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q |\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 \cong c \quad (8)$$

(8) Evidemment $\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}} = u^{n+i/q} - u^{n+\frac{i-1}{q}}$.

$$(3.8) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \|u^{n+i/q}\|_i^2 \leq c.$$

3.2. Utilisation de (3.6) (3.7) (3.8).

On passe du "discret" au "continu" en introduisant

$$(3.9) \quad u_{i,\varepsilon}(t) = u^{n+i/q} \text{ dans } [nk, (n+1)k[, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (9)$$

Alors (3.6) et (3.8) équivalent à

$$(3.10) \quad \sqrt{3} |u_{i,\varepsilon}(t)| \leq c \text{ p.p., } \forall i, \quad t \in [0, T]$$

$$(3.11) \quad u_{i,\varepsilon} \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V_i).$$

Par ailleurs (3.7) s'écrit encore

$$(3.12) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q k |u^{n+i/q} - u^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 \leq c \frac{k}{\varepsilon}$$

Mais (3.12) s'écrit encore

$$(3.13) \quad \sum_{i=1}^q \int_0^T |u_{i,\varepsilon}(t) - u_{i-1,\varepsilon}(t)|^2 dt \leq c \frac{k}{\varepsilon}$$

D'après (3.11) on peut extraire de ε une suite (encore notée ε !) telle que

$$(3.14) \quad u_{i,\varepsilon} \rightarrow w_i \text{ dans } L^2(0, T; V_i) \text{ faible.}$$

Mais grâce à (3.13) et à l'hypothèse (1.14), on a :

$$(3.15) \quad w_1 = w_2 = \dots = w_q$$

et posons donc $w_i = w \quad \forall i$.

On a donc démontré :

$$(3.16) \quad u_{i,\varepsilon} \rightarrow w \text{ dans } L^2(0, T; V_i) \text{ faible, } w \text{ indépendant de } i$$

(et donc $w \in L^2(0, T; V)$).

3.3. La fonction w est p.p. à valeurs dans K .

Soit $K_i = \{v | v \in L^2(0, T; V_i), v(t) \in K_i \text{ p.p.}\}$; K_i est un convexe fermé de $L^2(0, T; V_i)$, donc faiblement fermé ; comme $u^{n+i/q} \in K_i$ on a : $u_{i,\varepsilon} \in K_i$ et donc $w \in K_i$ donc

$$w \in \bigcap_{i=1}^q K_i$$

d'où 3.3.

3.4. On va dans ce point 3.4 montrer que

$$(3.17) \quad w(t) = u \text{ p.p., } u \text{ étant la solution de (1.2) } (10) .$$

Pour cela, soit $\psi \in \mathcal{D}]0, T[$, $\psi \geq 0$; posons :

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi^n = \frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} \psi(s) ds \\ \psi_k(t) = \psi^n \text{ dans } [nk, (n+1)k[. \end{array} \right.$$

(9) Noter que $u^{n+i/q}$ dépend évidemment de ε et k . Considérant ε comme le "paramètre fondamental", on a donc $u_{i,\varepsilon}(t)$ qui dépend de ε .

(10) Cela montrera que l'extraction d'une sous suite est inutile.

On multiplie (3.1), où l'on prend $v \in K$, par ψ^n et par k ; on en déduit

$$\frac{\varepsilon}{2} \psi^n (|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2) + \frac{\varepsilon}{2} \psi^n |\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 +$$

$$+ k a_i(u^{n+i/q}, u^{n+i/q}) \psi^n \cong k a_i(u^{n+i/q}, v) \psi^n - k \psi^n L_i(v - u^{n+i/q}).$$

Laissant tomber le terme souligné, et sommant en i puis en n , on en déduit

$$(3.19) \quad \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \psi^n (|\varphi^{n+1}|^2 - |\varphi^n|^2) + \sum_{i=1}^q \sum_{n=0}^{N-1} k a_i(u^{n+i/q}, u^{n+i/q}) \psi^n \cong$$

$$\cong \sum_{i=1}^q \sum_{n=0}^{N-1} k a_i(u^{n+i/q}, v) \psi^n - \sum_{i=1}^q \sum_{n=0}^{N-1} k \psi^n L_i(v - u^{n+i/q}).$$

Le terme souligné dans (3.19) tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet il vaut

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum_1^{N-1} (\psi^{n-1} - \psi^n) |\varphi^n|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \psi^{N-1} |\varphi^N|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \psi^0 |\varphi^0|^2;$$

les deux derniers termes tendant vers 0 (avec (3.6) et $\psi^{N-1} \rightarrow 0$ car $\psi \in \mathcal{D}([0, T[))$) et la somme est majorée par

$$c \varepsilon \sum_{n=1}^{N-1} k |\varphi^n|^2 \cong c \varepsilon \int_0^T |u_{q,\varepsilon}(t) - v|^2 dt \rightarrow 0 \text{ comme } \varepsilon.$$

On peut alors écrire (3.19) sous la forme :

$$(3.20) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^q \int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}(t), u_{i,\varepsilon}(t)) \psi_k(t) dt + O(\varepsilon) \cong \\ \cong \sum_{i=1}^q \int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}(t), v) \psi_k(t) dt - \sum_{i=1}^q \int_0^T L_i(v - u_{i,\varepsilon}(t)) \psi_k(t) dt. \end{cases}$$

Mais $\int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}(t), u_{i,\varepsilon}(t)) \psi_k(t) dt = \int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}, u_{i,\varepsilon})(\psi_k - \psi) dt + \int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}, u_{i,\varepsilon}) \psi dt$

donne avec (3.16)

$$\lim. \inf. \int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}, u_{i,\varepsilon}) \psi_k dt \cong \int_0^T a_i(w, w) \psi dt$$

et grâce à (3.16) on déduit finalement de (3.20)

$$\sum_{i=1}^q \int_0^T a_i(w(t), w(t)) \psi(t) dt \cong \sum_{i=1}^q \int_0^T a_i(w(t), v) \psi(t) dt - \sum_{i=1}^q \int_0^T L_i(v - w(t)) \psi(t) dt$$

ou encore

$$(3.21) \quad \int_0^T [a(w(t), v - w(t)) - L(v - w(t))] \psi(t) dt \cong 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}([0, T[), \psi \cong 0 \text{ et } \forall v \in K.$$

Donc, p.p.,

$$a(w(t), v - w(t)) \cong L(v - w(t)) \quad \forall v \in K$$

donc (puisque $w(t) \in K$ p.p.)

$$w(t) = u \text{ p.p. C'est (3.17).}$$

3.5. Fin de la preuve.

De (3.16) et (3.17) on déduit que

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_{i,\varepsilon}(t) dt \rightarrow u \text{ dans } V_i \text{ faible, } \forall i,$$

et cela n'est autre que (1.16).

4. Exemples.

4.1. Exemple 1.

Reprenons d'abord l'exemple du point 1.3.

Le problème (1.2) correspondant équivaut à celui-ci : trouver $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant à

$$(4.1) \left\{ \begin{array}{l} - \Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \text{ (on prend } L(v) = \int_{\Omega} f v dx, f \in L^2(\Omega)) \\ u \geq 0 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0 \text{ sur } \Gamma \text{ (} \frac{\partial}{\partial \nu} = \text{dérivée normale à } \Gamma \text{ dirigée vers l'extérieur de } \Omega) \\ u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ (}^{11}) \end{array} \right.$$

Remarque 4.1.

Dans (4.1) $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de sorte que $u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}$ a un sens.

Avec le choix de a_i et de K_i donnés en 1.3, le problème correspondant à (1.12) est (on prend

$$f = \sum_{i=1}^n f_i$$

et pour qu'il n'y ait pas de confusion avec la dimension on appelle "p" l'indice d'itération) :

$$(4.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{k} (u^{p+i/n} - u^{p + \frac{i-1}{n}}) - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^{p+i/n} + u^{p+i/n} = f_i \\ u^{p+i/n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma_i = \{x | x \in \Gamma, \cos(\nu, x_i) \neq 0\} \\ \frac{\partial u^{p+i/n}}{\partial x_i} \cdot \cos(\nu, x_i) \geq 0 \text{ sur } \Gamma \\ u^{p+i/n} \cdot \frac{\partial u^{p+i/n}}{\partial x_i} = 0 \text{ sur } \Gamma ; \end{array} \right.$$

On voit que le problème (4.2) est un problème en dimension 1, en la variable x_i , les x_j , $j \neq i$, jouant le rôle de paramètres.

4.2. Exemple 2.

Reprenons $a(u,v)$ comme en 1.3 :

$$(4.3) \quad a(u,v) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + (u,v)$$

(¹¹) Des exemples de ce type interviennent dans les applications. Cf. [5], [15], [17], [18].

$$(4.4) \quad K = \{v \mid v \geq 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

et décomposons Γ en q parties $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$:

$$(4.5) \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_q$$

chaque Γ_i étant "régulier".

Prenons alors

$$(4.6) \quad V_i = V = H^1(\Omega), \forall i;$$

$$(4.7) \quad K_i = \{v \mid v \in V, v \geq 0 \text{ sur } \Gamma_i\} \quad (12)$$

et choisissons

$$(4.8) \quad a_i(u, v) = \frac{1}{q} a(u, v) \quad \forall i,$$

$$(4.9) \quad f_i = \frac{1}{q} f, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad f \in L^2(\Omega).$$

Alors :

le problème initial est encore (4.1) ;

le problème itératif est :

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{k} (u^{p+i/q} - u^{p+\frac{i-1}{q}}) - \frac{1}{q} \Delta u^{p+i/q} + \frac{1}{q} u^{p+i/q} = \frac{1}{q} f \\ \left. \begin{array}{l} u^{p+i/q} \geq 0 \text{ sur } \Gamma_i \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u^{p+i/q} \geq 0 \text{ sur } \Gamma_i \\ u^{p+i/q} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} u^{p+i/q} = 0 \text{ sur } \Gamma_i \end{array} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u^{p+i/q} = 0 \text{ sur } \Gamma - \Gamma_i . \end{array} \right.$$

Remarque 4.2.

On voit que "l'éclatement" de K en les K_i permet de "diminuer le nombre"⁽¹³⁾ des inégalités à la frontière.

4.3. Exemple 3.

Reprenons $a(u, v)$, V comme en (4.3) et soit maintenant

$$(4.11) \quad K = \{v \mid 0 \leq v \leq g \text{ sur } \Gamma, \quad g \text{ donnée dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad g \geq 0\}.$$

Le problème initial (1.2) (avec $L(v) = \int_{\Omega} f v dx$, $f \in L^2(\Omega)$) est :

$$(4.12) \quad -\Delta u + u = f$$

et sur Γ :

⁽¹²⁾ Dans ce cas on n'a pas (1.11).

⁽¹³⁾ Ce qui a un sens après discrétisation.

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \cong 0 \\ \underline{ou} \\ u(x) = g(x), \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \cong 0 \\ \underline{ou} \\ 0 < u(x) < g(x), \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0. \end{array} \right.$$

Il est naturel de considérer K comme

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = K_1 \cap K_2 \\ K_1 = \{v \mid v \cong 0 \text{ sur } \Gamma\}, \quad K_2 = \{v \mid v \cong g \text{ sur } \Gamma\}. \end{array} \right.$$

On prend

$$a_i(u, v) = \frac{1}{2} a(u, v), \quad f_i = \frac{1}{2} f \quad (q = 2)$$

et le problème itératif devient le suivant :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{k} (u^{p+\frac{1}{2}} - u^p) + \frac{1}{2} (-\Delta u^{p+\frac{1}{2}} + u^{p+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} f \\ u^{p+\frac{1}{2}} \cong 0 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^{p+\frac{1}{2}}}{\partial \nu} \cong 0 \text{ sur } \Gamma \\ u^{p+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial u^{p+\frac{1}{2}}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma ; \end{array} \right.$$

et

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{k} (u^{p+1} - u^{p+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (-\Delta u^{p+1} + u^{p+1}) = \frac{1}{2} f \\ u^{p+1} \cong g \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^{p+1}}{\partial \nu} \cong 0 \text{ sur } \Gamma \\ (u^{p+1} - g) \frac{\partial u^{p+1}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BREZIS. Thèse 3ème cycle, Paris, 1966.
- [2] F. BROWDER. Non linear monotone operators... Bull. Amer. Math. Soc., 71, p.780-785.
- [3] J. DOUGLAS Jr. On the numerical integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$ by implicit methods. J. Siam (1955), p. 42-65.
- [4] W.G. FARIS. The product formula for semi groups defined by Friedrichs extensions. A paraître.
- [5] G. FICHERA. Problemi elastotatici con vincoli unilaterali. Memorie dell'Accad. Naz. dei Lincei, S. VIII, vol. VII (1964), p. 91-140.
- [6] P. HARTMAN-G. STAMPACCHIA. On some non linear elliptic differential-functional equations. Acta Math. 115 (1966), p. 271-310.
- [7] Y. HAUGAZEAU. C.R. Acad. Sc. Paris, Novembre 1966.
- [8] J.L. LIONS. Remarks on evolution inequalities. Journal of the Maths. Soc. of Japan, 18 (1966), p. 331-342.
- [9] J.L. LIONS. Sur le contrôle optimal... C.R. Acad. Sc. Paris, 2, 9, 16 Novembre 1966.
- [10] J.L. LIONS-G. STAMPACCHIA. C.R. Acad. Sc. Paris, 261 (1965), p. 25-27.
- [11] J.L. LIONS-G. STAMPACCHIA. A paraître aux Comm. Pure Applied Maths.
- [12] J.L. LIONS-R. TEMAM. C.R. Acad. Sc. Paris, Octobre 1966.
- [13] J.L. LIONS-R. TEMAM. A paraître.
- [14] G.I. MARCHOUK. Méthodes numériques... (en russe). Novosibirsk, 1965.
- [15] J.J. MOREAU. Principes extrémaux pour le problème de la naissance de la cavitation. Journal de Mécanique, 1967.
- [16] D.W. PEACEMAN-M.M. RACHFORD. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. Journal SIAM (1955), p. 28-42.
- [17] W. PRAGER. Unilateral constraints in mechanics of continua. Atti del Convegno Lagrangiano, Torino, accad. delli Scienze (1964), p. 181-191.
- [18] A. SIGNORINI. Questioni di elasticità non linearizzata e semi linearizzata. Rendic. Mat. 18 (1959), p. 95-139.
- [19] G. STAMPACCHIA. C.R. Acad. Sc. Paris 258 (1964), 4413-4415.
- [20] R. TEMAM. C.R. Acad. Sc. Paris, Janvier et Août 1966.
- [21] R. TEMAM. Thèse, Paris 1967.

- [22] H.F. TROTTER. On the product of semi groups of operators. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), p. 545-551.
- [23] N.N. YANENKO. Méthode des pas fractionnaires... (en russe). novosibirsk, 1966.