J. L. LIONS

Sur un nouveau type de problème non linéaire pour opérateurs paraboliques du 2e ordre

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1965-1966), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966___2_1_0>

SUR UN NOUVEAU TYPE DE PROBLÈME NON LINÉAIRE POUR OPÉRATEURS PARABOLIQUES DU 2e ORDRE

par

J.L. LIONS

Introduction.

On expose ici l'un des résultats de la note [4] de G. Stampacchia et l'A. de la conférence. Il s'agit du problème suivant (qui sera posé de façon plus générale et plus précise au n°1) :

trouver u solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{dans un cylindre} \quad \Omega \times (0,\infty)$$

$u \geqslant 0$ sur la frontière latérale Σ du cylindre,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \quad \text{(dérivée normale dirigée vers l'extérieur)}$$

$$u.\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma ,$$

$$u(x,0) = 0.$$

La méthode de résolution consiste à approcher ce problème par une famille de problèmes de même nature mais pour des opérateurs elliptiques (c'est la régularisation elliptique ; cf. [2]) ; pour chacun de ces problèmes elliptiques, on peut utiliser un résultat de [5] et on passe à la limite à l'aide d'estimations convenables. Ceci fournit (n°2) l'existence d'une solution. L'unicité (n°3) d'une solution "faible" est fournie par une variante d'un procédé de [3] pour l'unicité des solutions faibles, en dimension d'espace 2, des équations de Navier-Stokes.

Le problème posé au n°1 est montré, au n°5, être une formulation "faible" du problème initial ; nous ignorons si les solutions faibles sont "fortes".

1. Notations. Énoncé du résultat.

1.1. Notations.

Ω = ouvert borné de $\underline{\underline{R}}^n$, de frontière Γ.

$H^1(\Omega) = \{v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega),\ i = 1,\dots, n\}$, muni de sa structure hilbertienne habituelle. Pour simplifier l'écriture, on posera

$$V = H^1(\Omega) \ , \qquad H = L_2(\Omega) \ .$$

On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H^1_0(\Omega)$ = sous espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions nulles au bord de Ω.

Pour un peu simplifier - mais ceci n'a rien d'essentiel ! - on suppose toutes les fonctions <u>à valeurs réelles</u>.

On pose, X étant un espace de Banach quelconque

$L_2(X) = L_2(0,\infty \ ; X)$ = espaces des (classes de) fonctions de carré sommable sur $(0, \infty)$, pour la mesure dt, à valeurs dans X.

Si $f \in L_2(X)$, on pose :

$f' = \frac{df}{dt}$ = dérivée (distribution) de f sur $]0,\infty[$, à valeurs dans X.

On introduit maintenant les espaces suivants :

$$W_o = \{w \mid w \in L_2(V),\ w' \in L_2(H),\ w(0) = 0\} \ ,$$

$$W = \{w \mid w \in L_2(V),\ w' \in L_2(H^{-1}(\Omega)),\ w(0) = 0\} \ ;$$

notons que tout élément w de W (donc <u>a fortiori</u> de $W_o \subset W$) est p.p. égal à une fonction continue de $t \geq 0 \to H^{-1}(\Omega)$, de sorte que la condition " $w(0) = 0$ " a un sens.

En fait il y a plus (et cela sera démontré au n°5) :

PROPOSITION 1.1. Si Ω a une frontière assez régulière, tout élément w de W est p.p. égal à une fonction continue (encore notée w) de $t \geqslant 0 \to H$.

Les espaces W_o et W sont des espaces de Hilbert pour les normes

$$\|w\|_{W_o} = \left(\int_0^\infty (\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2)dt\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\|w\|_W = \left(\int_0^\infty (\|w(t)\|^2 + \|w'(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)})dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\| \quad \| , | \quad |$$

désignent respectivement les normes dans V et H.

Si l'on considère l'application "trace sur Γ" :

$$v \to \gamma v$$

qui applique $H^1(\Omega) = V$ sur $H^1(\Gamma)$, donc en particulier dans $L_2(\Gamma)$, on en déduit une application

$$w \to \gamma w \text{ de } L_2(V) \to L_2(L_2(\Gamma))$$

et l'on peut poser :

$$K_o = \{w | \; w \in W_o \; , \; \gamma w \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Sigma = \Gamma \times (0,\infty)\} ,$$

$$K = \{w | \; w \in W \; , \; \gamma w \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Sigma \} .$$

On définit ainsi des cones convexes fermés dans W_o et dans W respectivement.

Soient maintenant des fonctions a_o , a_{ij} avec

(1.1) $$a_o , a_{ij}, (i,j = 1,\ldots,n), \in L_\infty(\Omega \times (0,\infty)) ;$$

pour chaque couple $u,v \in V$, posons

$$(1.2)\qquad a(t\,;u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a_0(x,t)uv\,dx\ ,$$

ce qui a un sens pour presque tout t. On définit ainsi une famille de formes $u,v \to a(t;u,v)$, bilinéaires continues sur $V \times V$.

On fait l'hypothèse (d'ellipticité) :

$$(1.3)\qquad a(t;v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2,\ \alpha > 0,\quad \forall\ v \in V\ .$$

N.B. La forme $a(t;u,v)$ n'est pas nécessairement symétrique.

A la forme $a(t;u,v)$ est associé l'opérateur $A(t) = A$:

$$(1.4)\qquad A(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a_0\,u\ .$$

1.2. Énoncé du résultat.

THÉORÈME 1.1. On suppose que Ω a une frontière assez régulière pour que la Prop. 1.1. ait lieu et on suppose que (1.3) a lieu. Alors il existe un élément u dans K et un seul tel que

$$(1.5)\qquad \int_0^\infty [a(t;u,w-u) - (u,w')]dt \geqslant \int_0^\infty (f,w-u)dt \quad \forall\ w\in K_0\ ,$$

f étant donné dans $L_2(H)$.

Le plan sera le suivant :

n°2. Démonstration de l'existence d'une solution.

n°3. Démonstration de l'unicité.

n°4. Interprétation du problème.

n°5. Démonstration de la Proposition 1.1.

2. Démonstration de l'existence d'une solution.

2.1. Régularisation elliptique.

Pour $u,v \in W_o$, on pose :

$$\pi_\varepsilon(u,v) = \int_0^\infty [a(t;u,v) + (u',v)]dt + \varepsilon \int_0^\infty (u',v')dt, \tag{2.1}$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé.

Comme

$$\int_0^\infty (v',v)dt = 0 \quad \text{si} \quad v \in W_o ,$$

on a, grâce à (1.3) :

$$\pi_\varepsilon(v,v) \geqslant \alpha \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt + \varepsilon \int_0^\infty |v'(t)|^2 dt \tag{2.2}$$

donc

$$\pi_\varepsilon(v,v) \geqslant \inf(\alpha,\varepsilon)\|v\|^2_{W_o} . \tag{2.3}$$

Donc $u,v \to \pi_\varepsilon(u,v)$ est une forme bilinéaire continue sur $W_o \times W_o$ et donc, d'après le théorème de Stampacchia [5], <u>il existe</u> $u_\varepsilon \in K_o$ <u>unique tel que</u>

$$\pi_\varepsilon(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) \geqslant \int_0^\infty (f, v-u_\varepsilon)dt \qquad \forall\, v \in K_o . \tag{2.4}$$

On va maintenant établir des :

2.2. Majorations sur u_ε .

LEMME 2.1. $\displaystyle \int_0^\infty \|u_\varepsilon\|^2 dt + \varepsilon \int_0^\infty |u'_\varepsilon|^2 dt \leqslant C$

(les C désignent des constantes variées, indépendantes de ε).

<u>Démonstration</u>.

Faire $v = 0$ ($\in K_o$) dans (2.4), en utilisant (2.3) et Cauchy-Schwarz.

LEMME 2.2. <u>Au sens des distributions dans le cylindre</u> $\Omega \times]0,\infty[$, <u>on a</u> :

(2.5) $$A\, u_\varepsilon + u'_\varepsilon - \varepsilon\, u''_\varepsilon = f\ .$$

<u>Démonstration</u>.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ = fonctions C^∞ et à support compact dans $Q = \Omega \times]0,\infty[$. Alors $v = u_\varepsilon \pm \varphi$ est dans K_0 et (2.4) donne

$$\pi_\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi) = \int_0^\infty (f,\varphi)dt \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(Q)$$

d'où (2.5).

LEMME 2.3. <u>Lorsque</u> $\varepsilon \to 0$, u'_ε <u>demeure dans un borné de</u> $L_2(H^{-1}(\Omega))$.

<u>Démonstration</u>.

L'opérateur A est linéaire continu de $L_2(V) \to L_2(H^{-1}(\Omega))$ et grâce au lemme 2.1, $A\, u_\varepsilon$ demeure alors dans un borné de $L_2(H^{-1}(\Omega))$. Donc (2.5) donne :

(2.6) $$u'_\varepsilon - \varepsilon\, u''_\varepsilon = f - A\, u_\varepsilon = g_\varepsilon \in \text{ borné de } L_2(H^{-1}(\Omega)).$$

Considérons (2.6) comme une équation différentielle en u'_ε ; l'unique solution qui soit dans $L_2(H)$ est donnée par

$$u'_\varepsilon = E_\varepsilon \underset{(t)}{*} g_\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad u'_\varepsilon(t) = \int_t^\infty E_\varepsilon(t-\sigma) g_\varepsilon(\sigma)d\sigma\ , \qquad t > 0$$

avec

$$E_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) & \text{si} \quad t < 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |E_\varepsilon(t)| dt = 1\ ,$$

donc
$$\|u_\varepsilon'\|_{L_2(H^{-1}(\Omega))} \leqslant \|g_\varepsilon\|_{L_2(H^{-1}(\Omega))}$$
d'où le résultat.

2.3. Passage à la limite.

On peut, grâce aux lemmes précédents, extraire de u_ε une suite u_η telle que

$$(2.7)\quad \begin{cases} u_\eta \to u \text{ dans } L_2(V) \text{ faible, lorsque } \eta \to 0\ , \\ \\ u_\eta' \to u' \text{ dans } L_2(H^{-1}(\Omega)) \text{ faible (lorsque } \eta \to 0)\ . \end{cases}$$

Puisque $u_\eta \in K_0$, on a :

$$(2.8)\qquad u \in K\ .$$

On va vérifier que u satisfait à (1.5).

Puisque $\int_0^\infty (u_\varepsilon', u_\varepsilon)dt = 0$, on peut écrire (2.4) (avec η au lieu de ε), après une intégration par parties :

$$\int_0^\infty [a(t;u_\eta, v-u_\eta) - (u_\eta, v')]dt + \eta \int_0^\infty (u_\eta', v')dt \geqslant \int_0^\infty (f, v-u_\eta)dt$$

ou encore

$$(2.9)\quad \begin{cases} \int_0^\infty [a(t;u_\eta, v) - (u_\eta, v')]dt + \eta \int_0^\infty (u_\eta', v')dt \geqslant \\ \\ \qquad \geqslant \int_0^\infty (f, v-u_\eta)dt + \int_0^\infty a(t;u_\eta, u_\eta)dt\ . \end{cases}$$

Grâce au lemme 2.1, $\eta \int_0^\infty (u_\eta', v')dt = 0(\eta^{\frac{1}{2}})$ et l'on déduit de (2.7) et (2.9) que

$$(2.10)\quad \int_0^\infty [a(t;u,v) - (u,v')]dt \geqslant \int_0^\infty (f, v-u)dt + \operatorname*{lim.\,inf.}_{\eta \to 0} \int_0^\infty a(t,u_\eta, u_\eta)dt.$$

Mais

$$\liminf_{\eta \to 0} \int_0^\infty a(t;u_\eta,u_\eta)dt \geq \int_0^\infty a(t;u,u)dt$$

et donc (2.10) donne

$$\int_0^\infty [a(t;u,v) - (u,v')]dt \geq \int_0^\infty (f,v-u)dt + \int_0^\infty a(t;u,u)\, dt\ , \quad \forall\ v \in K_0\ ,$$

d'où (1.5) ; c.q.f.d.

<u>Remarque</u> 2.1.

Il résulte de (2.5) que

$$Au + u' = f.$$

<u>Remarque</u> 2.2.

Il résultera de l'<u>unicité</u> que u_ε (et non seulement une suite extraite) converge vers u au sens (2.7).

3. Démonstration de l'unicité.

3.1. Les opérateurs T_n^m.

On pose :

$$\theta_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq \frac{1}{m}\ , \\ m(t - \frac{1}{m}) & \text{si} \quad \frac{1}{m} \leq t \leq \frac{2}{m}\ , \\ 1 & \text{si} \quad t \geq \frac{2}{m}\ , \end{cases}$$

ρ_n = suite de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}_t$, à support dans $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$,

ρ_n <u>paire</u> , $\rho_n \geq 0$, $\int \rho_n(t)dt = 1$.

Si v est un élément de $L_2(V)$, on pose :

(3.1) $$T_n^m v = \theta_m((\theta_m v) * \rho_n * \rho_n) .$$

Si l'on suppose $n > 2m$, la fonction $(\theta_m v) * \rho_n * \rho_n$ est <u>nulle</u> au voisinage de 0 (plus précisément dans $(0, \frac{1}{m} - \frac{2}{n})$). On a :

(3.2) Si $v \in K$, alors $T_n^m v \in K_0$.

En effet,

(3.3) $$(T_n^m v)' = \theta_m'((\theta_m v)*\rho_n*\rho_n) + \theta_m((\theta_m v)*\rho_n*\rho_n')$$

donc

$$(T_n^m v)' \in L_2(H) \quad (\text{et même } \in L_2(V)).$$

Ensuite :

$$\gamma T_n^m v = \theta_m((\theta_m \gamma v)*\rho_n*\rho_n)$$

et $\gamma v \geqslant 0$ sur Σ entraîne $\gamma T_n^m v \geqslant 0$ sur Σ.

3.2. <u>Principe de la démonstration</u>.

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (1.5), $u_j \in K$.

Alors

$$\int_0^\infty [a(t;u_1,w-u_1) - (u_1,w')]dt \geqslant \int_0^\infty (f,w-u_1)dt \quad \forall\, w \in K_0 ,$$

$$\int_0^\infty [a(t;u_2,w-u_2) - (u_2,w')]dt \geqslant \int_0^\infty (f,w-u_2)dt \quad \forall\, w \in K_0 .$$

Grâce à (3.2) on peut prendre dans la première (resp. 2ème) inégalité :

$$w = T_n^m u_2 , \ (\text{resp. } w = T_n^m u_1).$$

Additionnons les inégalités correspondantes. Si nous posons :

$$X_n^m = \int_0^\infty [a(t;u_1, T_n^m u_2 - u_1) - a(t;u_2, u_2 - T_n^m u_1)]dt,$$

$$Y_n^m = -\int_0^\infty [(u_1, (T_n^m u_2)') + (u_2, (T_n^m u_1)')]dt$$

$$Z_n^m = \int_0^\infty (f, T_n^m u_2 - u_2 + T_n^m u_1 - u_1)dt ,$$

nous avons :

$$X_n^m + Y_n^m \geqslant Z_n^m . \tag{3.4}$$

Nous allons dans cette inégalité faire tendre n vers l'infini, puis m vers l'infini.

3.3. Lemmes.

LEMME 3.1. Lorsque $n \to \infty$, on a :

$$X_n^m \to X^m = \int_0^\infty [a(t;u_1, \theta_m^2 u_2 - u_1) - a(t;u_2, u_2 - \theta_m^2 u_1)]dt .$$

Ceci est immédiat.

LEMME 3.2. Lorsque $n \to \infty$, on a :

$$Y_n^m \to Y^m = -2\int_0^\infty \theta_m\, \theta_m'(u_1, u_2)dt .$$

Démonstration.

Utilisant la formule (3.3), on peut écrire :

$$Y_n^m = y_n^m + \eta_n^m ,$$

avec

$$y_n^m = -\int_0^\infty (\theta_m u_1, (\theta_m u_2) * \rho_n * \rho_n')dt - \int_0^\infty (\theta_m u_2, (\theta_m u_1) * \rho_n * \rho_n')dt ,$$

$$\eta_n^m = -\int_0^\infty \theta_m'(u_1, (\theta_m u_2) * \rho_n * \rho_n)dt - \int_0^\infty \theta_m'(u_2, (\theta_m u_1) * \rho_n * \rho_n)dt .$$

On peut supposer $n > 2m$, de sorte que toutes les fonctions sont nulles au voisinage de 0 et y_n^m peut s'écrire (on utilise ici <u>la parité de</u> ρ_n) :

$$y_n^m = -\int_0^\infty [((\theta_m u_1)*\rho_n,((\theta_m u_2)*\rho_n)') + (((\theta_m u_1)*\rho_n)',(\theta_m u_2)*\rho_n)]dt .$$

Posant $(\theta_m u_i)*\rho_n = \varphi_i$, on a :

$$y_n^m = -\int_0^\infty [(\varphi_1,\varphi_2') + (\varphi_1',\varphi_2)]dt = 0 .$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n^m = -2\int_0^\infty \theta_m\theta_m'(u_1,u_2)dt ,$$

on a le résultat.

On a évidemment

LEMME 3.3. $Z_n^m \to Z^m = \int_0^\infty (\theta_m^2-1)(f,u_2-u_1)dt$.

On déduit de (3.4) :

(3.5) $$X^m + Y^m \geqslant Z^m .$$

On a maintenant :

LEMME 3.4. <u>Lorsque</u> $m \to \infty$, <u>on a</u> :

$$Y^m \to 0 .$$

<u>Démonstration</u>.

D'après la proposition 1.1, les fonctions $u_j(t)$ sont continues de $t \geqslant 0 \to H$ et $u_j(0) = 0$.

Alors

$$Y^m = -2m\int_{1/m}^{2/m} \theta_m(u_1,u_2)dt$$

vérifie :

$$|Y^m| \leqslant 2m\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} \theta_m(t)dt\right) \sup_{t\in[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]} |u_1(t)| . \sup_{t\in[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]} |u_2(t)|$$

$$\leqslant \sup_{t\in[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]} |u_1(t)| . \sup_{t\in[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]} |u_2(t)| \to 0 .$$

c.q.f.d.

3.4. Démonstration de l'unicité.

Il est immédiat que

$$X^m \to -\int_0^\infty a(t;u_2-u_1,u_2-u_1)dt,$$

$$Z^m \to 0 .$$

Donc (3.5) donne, grâce au lemme 3.4 :

$$-\int_0^\infty a(t;u_2-u_1,u_2-u_1)dt \geqslant 0$$

et comme $a(t;v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2$, il en résulte $u_2 = u_1$. c.q.f.d.

4. Interprétation du problème.

Montrons d'abord :

PROPOSITION 4.1. Les inégalités (1.5) équivalent à :

$$\int_0^\infty [a(t;u,v) - (u,v')]dt \geqslant \int_0^\infty (f,v)dt \quad \forall\ v\in K_0 , \tag{4.1}$$

$$\int_0^\infty a(t,u,u)dt = \int_0^\infty (f,u)dt. \tag{4.2}$$

Démonstration.

Il est clair que (4.1),(4.2) entraînent (1.5).

Réciproquement, si u satisfait à (1.5), nous prenons (avec les notations du n° 3)

$$w = T_n^m u + v , \qquad v \in K_o .$$

D'après les résultats du n° 3, on en déduit (4.1) par passage à la limite en n puis en m.

Prenant $v = T_n^m u$ dans (4.1), on en déduit, toujours par le même procédé, que

$$\int_0^\infty a(t;u,u)dt \geqslant \int_0^\infty (f,u)dt \ ;$$

prenant $w = 0$ dans (1.5), on a l'inégalité inverse, d'où (4.2).

On a maintenant l'interprétation formelle suivante :

la fonction u satisfait à

(4.3) $$A(t)u + u' = f \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[,$$

(4.4) $$u \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma ,$$

(4.5) $$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \quad \text{(dérivée conormale)} ,$$

(4.6) $$u . \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma .$$

(4.7) $$u(x,0) = 0 , \quad x \in \Omega.$$

En effet, on sait déjà (Remarque 2.1) que (4.3) a lieu (cela résulte aussi de (4.1), en prenant $v = \pm \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$) ; (4.4) a lieu puisque $u \in K$.

Multipliant (4.3) par $v \in K_o$ et intégrant - formellement - par parties, il vient

$$(4.8) \qquad -\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v \, d\Sigma + \int_0^\infty [a(t;u,v) - (u,v')]dt = \int_0^\infty (f,v)dt$$

d'où, avec (4.1) :

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v \, d\Sigma \geqslant 0 \quad \forall \; v \in K_0 \;, \quad \text{i.e.} \quad v \geqslant 0 \quad \text{sur } \Sigma \;,$$

et donc on a (4.5).

Prenant $v = u$ dans (4.8) et notant que $\int_0^\infty -(u,u')dt = 0$ (formel !) et utilisant (4.2), on a :

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_A} u \, d\Sigma = 0$$

d'où (4.6) (puisque u et $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \geqslant 0$ sur Σ).

Enfin (4.7) a lieu puisque $u \in K$.

5. <u>Démonstration de la proposition</u> 1.1.

Par partition de l'unité et cartes locales, on se ramène au problème analogue aves

$$\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, \; x_n > 0\} \; .$$

Posons $x' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ et pour $v \in L_2(\Omega)$, définissons $\pi v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ par

$$(5.1) \qquad \pi v(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si} \quad x_n > 0 \\ -3v(x',-x_n) + 4v(x',-2x_n) & \text{si} \quad x_n < 0 \; . \end{cases}$$

On vérifie tout de suite que

(5.2) π est un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n)$.

Vérifions que

(5.3) π est un opérateur linéaire continu de $H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\underline{\underline{R}}^n)$.

En effet, si $v \in L_2(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\underline{\underline{R}}^n)$, on a :

$$\int_{\underline{\underline{R}}^n} (\pi v)\, \varphi \, dx = \int_\Omega v(\pi^* \varphi) dx$$

où

$$\pi^* \varphi(x) = \varphi(x) - 3\varphi(x', -x_n) + 2\varphi(x', -\frac{x_n}{2}) \ , \quad x \in \Omega \ .$$

On vérifie sans peine que $\pi^* \in \mathcal{L}(H^1(\underline{\underline{R}}^n) \ ; \ H_0^1(\Omega))$; soit $\|\pi^*\|$ sa norme. Alors, pour $v \in L_2(\Omega)$, on a :

$$\|\pi v\|_{H^{-1}(\underline{\underline{R}}^n)} \leqslant \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\pi^* \varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|^{-1}_{H^1(\underline{\underline{R}}^n)} \leqslant \|\pi^*\| \ \ \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} \ ,$$

ce qui montre (5.3) (puisque $L_2(\Omega)$), est dense dans $H^{-1}(\Omega)$).

Soit alors u donnée avec

$$u \in L_2(H^1(\Omega)) \ , \quad u' \in L_2(H^{-1}(\Omega)).$$

On introduit

$$\pi u = U$$

qui d'après (5.2)(5.3) vérifie

$$U \in L_2(H^1(\underline{\underline{R}}^n)) \ , \ U' \in L_2(H^{-1}(\underline{\underline{R}}^n))$$

et donc (cas très particulier de [1]) U est p.p. égale à une fonction <u>continue de</u> $t \geqslant 0 \to L_2(\underline{\underline{R}}^n)$ et comme la restriction de U à $\Omega \times (0,\infty)$ est u, on a la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.L. LIONS, Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications Bull. Math. R.P.R. t.2 (1958), p. 419-432.

[2] J.L. LIONS, Cours C.I.M.E., Varenna, Mai 1963.

[3] J.L. LIONS-G. PRODI, Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier Stokes en dimension 2. C.R. Acad. Sc. Paris, t.248 (1959), p. 3519-3521.

[4] J.L. LIONS-G. STAMPACCHIA, Inéquations variationnelles non coercives. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261 (1965), p. 25-27.

[5] G. STAMPACCHIA, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258 (1964), p. 4413.