Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

J. L. Lions

Sur un nouveau type de problème non linéaire pour opérateurs hyperboliques du 2e ordre

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1965-1966), p. 17-33
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966___2_17_0>

SUR UN NOUVEAU TYPE DE PROBLÈME NON LINÉAIRE POUR OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES DU 2e ORDRE

par

J.L. LIONS

Introduction

On donne ici un résultat de G. Stampacchia et l'A., suite naturelle de l'exposé précédent ; on va montrer que (dans un sens faible précisé au n°1 ; cf. interprétation du problème au n°5) il existe une fonction u et une seule satisfaisant à

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega\times(0,\infty),\ \Omega \subset \underline{\underline{R}}^n , \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \quad \text{sur } \Sigma \doteq \Gamma\times(0,\infty),\ \Gamma = \text{frontière de } \Omega , \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0 \quad \text{sur } \Sigma , \\[2ex] \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right) = 0 \quad \text{sur } \Sigma , \\[2ex] u(x,0) = 0 ,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 . \end{array}\right.$$

La méthode de résolution consiste encore à approcher le problème par une famille de problèmes elliptiques (régularisation elliptique des opérateurs hyperboliques ; cf. [3]). Les détails techniques sont sensiblement plus compliqués que dans le cas parabolique mais de même nature. Comme dans le cas parabolique, on ignore si les solutions faibles sont - lorsque f est assez régulière - des solutions fortes.

I. Notations. Énoncé du résultat.

1.1. Les notations sont analogues à celles de [1]. On suppose toutefois que :

$$a(t;u,v) = a(t;v,u) \quad \forall\ u,\ v \in V\ (= H^1(\Omega))$$

et que la fonction $t \to a(t;u,v)$ est une fois continûment différentiable dans $t \geq 0$, avec

(1.1) $|a'(t;u,v)| \leq M\|u\|\ \|v\|\ ,\quad \forall\ u,\ v \in V,\quad t \geq 0,\quad a'(t;u,v) = \frac{d}{dt}\, a(t;u,v)$.

On introduit <u>une fois pour toutes</u> $k > 0$ tel que

(1.2) $ka(t;v,v) - \frac{1}{2}\, a'(t;v,v) \geq \alpha_1 \|v\|^2,\quad \alpha_1 > 0,\ t \geq 0,\quad \forall\ v \in V.$

On écrira :

(1.3) $a(t;v,v) = a(t;v)\ ,\quad a'(t;v,v) = a'(t;v)$.

On définit

$$W_0 = \{w \mid e^{-kt}\, w \in L_2(V),\ e^{-kt}\, w' \in L_2(V),\ e^{-kt}\, w'' \in L_2(H),\quad w(0) = w'(0) = 0\}$$

$$W = \{w \mid e^{-kt}\, w \in L_2(V),\ e^{-kt}\, w' \in L_2(H),\ e^{-kt}\, w'' \in L_2(H^{-1}(\Omega)),\quad w(0) = w'(0) = 0\}\ ;$$

évidemment $W_0 \subset W$; noter que les conditions " $w(0) = 0$ " et " $w'(0) = 0$ " ont un sens, puisque tout $w \in W$ est p.p. égal à une fonction une fois continûment différentiable de $t \geq 0 \to H^{-1}(\Omega)$ (ce qui peut être amélioré !). Les espaces W_0 et W sont des espaces de Hilbert pour les normes respectives

$$\left(\int_0^\infty (\|e^{-kt}\, w\|^2 + \|e^{-kt}\, w'\|^2 + |e^{-kt}\, w''|^2)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\left(\int_0^\infty (\|e^{-kt}\, w\|^2 + |e^{-kt}\, w'|^2 + \|e^{-kt}\, w''\|^2_{H^{-1}(\Omega)})dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit γ l'opérateur "trace sur Γ ", qui applique en particulier $H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$. On introduit

$$K_0 = \{w \mid w \in W_0 \ , \ \frac{d}{dt}(\gamma w) \geqslant 0 \ \text{ sur } \ \Sigma \}$$

($\frac{d}{dt}(\gamma w) \geqslant 0$ au sens des mesures sur Σ) et

$$K = \{w \mid w \in W, \ \frac{d}{dt}(\gamma w) \geqslant 0 \text{ sur } \Sigma \} \ .$$

Ce sont des <u>cônes convexes fermés</u> dans W_0 et W respectivement.

On désigne par

$$L_{\infty,loc}(X) \ , \quad (\ X = \text{Banach} \ )$$

l'espace des (classes de) fonctions f mesurables et bornées sur $[0,T]$, $\forall \ T < \infty$, à valeurs dans X .

On peut maintenant énoncer le résultat.

1.2. <u>Énoncé du résultat.</u>

THÉORÈME 1.1. <u>On suppose</u> $a(t;u,v)$ <u>symétrique et coercive sur</u> V ; k <u>est fixé de sorte que</u> (1.2) <u>ait lieu</u>. <u>Il existe une fonction</u> u <u>et une seule ayant les propriétés suivantes</u> :

$$u \in K \tag{1.4}$$

$$e^{-kt} u \in L_{\infty,loc}(V) \cap L_2(V), \ e^{-kt} u' \in L_{\infty,loc}(H) \cap L_2(H) \ , \tag{1.5}$$

$$u(t) \to 0 \ \text{ dans } \ V, \ u'(t) \to 0 \ \text{ dans } \ H \ \text{ lorsque } \ t \to 0, \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty e^{-2kt}[-(u',v''-2kv') + a(t;u,v')]dt \geqslant \int_0^\infty e^{-2kt}(f,v')dt \\ \\ \forall \ v \in K_0 \ , \quad f \ \text{ donné avec } \ e^{-kt} \ f \in L_2(H) \ , \end{cases} \tag{1.7}$$

$$(1.8)\quad \begin{cases} k\int_0^\infty (|e^{-kt}u'|^2 + e^{-2kt}a(t;u))dt \\ -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2kt}a'(t;u)dt = \int_0^\infty e^{-2kt}(f,u')dt \end{cases} .$$

2. Réduction du théorème d'existence

On va montrer dans ce N° que certaines des propriétés du Théorème 1.1 résultent des autres. De façon précise :

LEMME 2.1. *Hypothèses du Théorème* 1.1. *Si une fonction* u *vérifie*

(2.1) $u \in K$

(2.2) $\equiv (1.7)$,

et

$$(2.3)\quad \begin{cases} C = k\int_0^\infty (|e^{-kt}u'|^2 + e^{-2kt}a(t;u))dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2kt}a'(t;u)dt \\ -\int_0^\infty e^{-2kt}(f,u')dt \leqslant 0 \end{cases}$$

alors u *vérifie* (1.4) ... (1.8) .

Démonstration.

Soit $s > 0$ fixé quelconque. Soit :

$$\chi m(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < s , \\ m(t-s) & \text{si } s < t < s+\frac{1}{m} , \\ 1 & \text{si } t > s+\frac{1}{m} , \end{cases}$$

ρ_n = suite régularisante paire comme dans 3.1 de [1] ,

$\tilde{\rho}_n(t) = e^{2kt}\rho_n(t)$,

$\varphi = ((\chi_m u')_* \rho_{n*}\tilde{\rho}_n)\chi_m$,

$w(t) = \int_0^t \varphi(\sigma)d\sigma$

On peut écrire :

$$(2.4) \quad \varphi = ((\chi_m u)_* \rho_n * \tilde{\rho}_n)' \chi_m - ((\chi_m' u)_* \rho_n * \tilde{\rho}_n) \chi_m \ .$$

Comme $e^{-kt} u \in L_2(V)$, il résulte de (2.4) que $e^{-kt} \varphi \in L_2(V)$ et aussi $e^{-kt} \varphi' \in L_2(V)$. Puis $e^{-kt} w \in L_2(V)$ et donc $w \in W_0$. Comme

$$(\gamma w)' = ((\chi_m (\gamma u)')_* \rho_n * \tilde{\rho}_n) \chi_m$$

on a : $(\gamma w)' \geqslant 0$ sur Σ , donc $w \in K_0$.

On peut donc choisir $v = w$ dans (1.7) . Il vient :

$$(2.5) \begin{cases} \int_0^\infty e^{-2kt} [-(u', (\chi_m u')_* \rho_n' * \tilde{\rho}_n) \chi_m - (u', (\chi_m u')_* \rho_n * \tilde{\rho}_n) \chi'_m + \\ + 2k\ (u', (\chi_m u')_* \rho_n * \tilde{\rho}_n) \chi_m + \\ + a(t; u, (\chi_m u')_* \rho_n * \tilde{\rho}_n) \chi_m]\ dt \geqslant \int_0^\infty e^{-2kt} (f, \varphi) dt \end{cases}$$

Soient X_m^n et Y_m^n les 1er et 4ème termes dans (2.5). On a :

$$X_m^n = - \int_0^\infty (e^{-2kt} \chi_m u' \ , \ (\chi_m u')_* \rho_n' * \tilde{\rho}_n) dt \ ;$$

prenons $n > 2m$ de sorte que toutes les fonctions écrites sont nulles au voisinage de 0 ; alors

$$X_m^n = - \int_0^\infty ((e^{-2kt} \chi_m u')_* \check{\tilde{\rho}}_n \ , \ (\chi_m u')_* \rho_n') dt$$

$$= - \int_0^\infty e^{-2kt} ((\chi_m u')_* \rho_n \ , \ (\chi_m u')_* \rho_n') dt$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-2kt} \frac{d}{dt} |(\chi_m u')_* \rho_n|^2 dt$$

et donc $X_m^n = - k \int_0^\infty e^{-2kt} |(\chi_m u')_* \rho_n|^2 dt$. Donc

$$(2.6) \quad Z_m^n = X_m^n + \text{3ème terme de } (2.5) = k \int_0^\infty e^{-2kt} |(\chi_m u')_* \rho_n|^2 dt$$

Calculons maintenant Y_m^n ; posons d'abord :

$$a(t,u,v) = ((\mathcal{A}(t)u,v)) \quad ,\mathcal{A}(t)\in\mathcal{L}(V;V) \quad ;$$

alors

$$Y_m^n = \int_0^\infty((e^{-2kt}\mathcal{A}\chi_m u \ , \ (\chi_m u')_*\rho_{n*}\check{\rho}_n)) \, dt$$

$$= \int_0^\infty(((e^{-2kt}\mathcal{A}\chi_m u)_*\check{\rho}_n \ , \ (\chi_m u')_*\rho_n)) \, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-2kt}(((\mathcal{A}\chi_m u)_*\rho_n,(\chi_m u')_*\rho_n)) \, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-2kt}((\mathcal{A}((\chi_m u)_*\rho_n) \ , \ ((\chi_m u)_*\rho_n)')) \, dt \ +$$

$$+ \, y_m^n + \eta_m^n \quad ,$$

$$y_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}(((\mathcal{A}\chi_m u)_*\rho_n - \mathcal{A}((\chi_m u)_*\rho_n) \ , \ (\chi_m u)_*\rho_n')) \, dt \quad ,$$

$$\eta_m^n = -\int_0^\infty e^{-2kt}(((\mathcal{A}\chi_m u)_*\rho_n \quad , \quad (\chi_m' u)_*\rho_n)) \, dt \quad .$$

Mais

$$y_m^n = -\int_0^\infty(((e^{-2kt}[(\mathcal{A}\chi_m u)_*\rho_n - \mathcal{A}((\chi_m u)_*\rho_n)])' \ , \ (\chi_m u)_*\rho_n)) \, dt$$

et d'après le Lemme de Friedrichs **vectoriel**, $y_m^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Le premier terme de Y_m^n peut s'écrire :

$$\int_0^\infty e^{-2kt} \left[\tfrac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(a(t;(\chi_m u)*\rho_n\right) \quad - \tfrac{1}{2} \, a'(t;(\chi_m u)*\rho_n)\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-2kt}[ka(t;(\chi_m u)*\rho_n) - \tfrac{1}{2} \, a'(t;(\chi_m u)*\rho_n)]dt$$

d'où

$$(2.7)\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} Y_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}\chi_m^2\,[ka(t;u) - \frac{1}{2}a'(t;u)]dt - \\ \qquad - \int_0^\infty e^{-2kt}\chi_m\chi'_m a(t;u)\,dt \;. \end{cases}$$

De (2.5) (2.6) (2.7) on déduit, faisant $n \to \infty$:

$$(2.8)\begin{cases} \int_0^\infty e^{-2kt}\chi_m^2[k|u'|^2 + ka(t;u) - \frac{1}{2}a'(t;u)]\,dt - \\ - \int_0^\infty e^{-2kt}\chi_m\chi'_m[|u'(t)|^2 + a(t;u)]\,dt \geqslant \int_0^\infty e^{-2kt}\chi_m^2(f,u')dt \end{cases}$$

On fait maintenant tendre m vers l'infini. On obtient, <u>pour presque tout</u> s :

$$(2.9)\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-2ks}[|u'(s)|^2 + a(s;u(s))] \leqslant \int_s^\infty e^{-2kt}[k|u'|^2 + ka(t;u) - \frac{1}{2}a'(t;u)]\,dt - \\ - \int_s^\infty e^{-2kt}(f,u')\,dt = C(s) \;. \end{cases}$$

Comme le 2ème membre est borné, on voit que $u' \in L_{\infty,loc}(H)$ et $u \in L_{\infty,loc}(V)$, d'où (1.5) .

En outre, d'après (2.3) , on a :

$$C(s) \to C \leqslant 0 \quad \text{lorsque} \quad s \to 0$$

et comme le premier membre de (2.9) est $\geqslant 0$ on en déduit que $C = 0$ (i.e. (1.8)) et que $|u'(s)|^2 + a(s;u(s)) \to 0$ lorsque $s \to 0$ (i.e. (1.6))

D'où le Lemme.

<u>Conséquence</u>. Pour l'existence, il va suffire de montrer l'existence de u avec (2.1)(2.2)(2.3) .

3. <u>Existence</u>.

3.1. <u>Régularisation elliptique</u>.

Soit $\varepsilon > 0$; $\forall\, u, v \in W_o$ on pose

$$
(3.1)\quad \begin{cases} \pi_\varepsilon(u,v) = \varepsilon\int_0^\infty e^{-2kt}[(u'',v'') + a(t;u',v')]dt + \\ \qquad + \int_0^\infty e^{-2kt}[(u'',v') + a(t;u,v')]dt \quad . \end{cases}
$$

LEMME 3.1. <u>La forme</u> $\pi_\varepsilon(u,v)$ <u>est bilinéaire continue sur</u> W_0 . <u>On a</u> :

$$
(3.2)\quad \begin{cases} \pi_\varepsilon(v,v) \geqslant \varepsilon\int_0^\infty e^{-2kt}[|v''|^2 + a(t;v')]dt + \\ \qquad + \int_0^\infty e^{-2kt}[k|v'|^2 + ka(t;v) - \frac{1}{2}\, a'(t;v)]dt \quad . \end{cases}
$$

(<u>on a donc coercivité grâce à</u> (1.2)).

<u>Démonstration</u>.

L'estimation des termes contenant ε en facteur est évidente. Les autres termes s'écrivent :

$$
\int_0^\infty e^{-2kt}\ [\tfrac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,|v'|^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,a(t;v) - \tfrac{1}{2}\,a'(t;v)]dt
$$

d'où le résultat par intégration par parties.

D'après [2] :

<u>Corollaire 3.1</u>. <u>Il existe</u> u_ε <u>unique dans</u> K_0 <u>solution de</u>

$$
(3.3)\qquad \pi_\varepsilon(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) \geqslant \int_0^\infty e^{-2kt}(f,v'-u'_\varepsilon)dt\ \forall\ v\in K_0 \quad .
$$

En outre, on déduit de (3.2) , faisant $v = 0$ dans (3.3) :

$$
\begin{array}{llll}
e^{-kt}u_\varepsilon & \text{est borné dans} & L_2(V) & \text{lorsque } \varepsilon \to 0 \ , \\
e^{-kt}u'_\varepsilon & \quad " & L_2(H) & , \\
\sqrt{\varepsilon}\, e^{-kt}u'_\varepsilon & \quad " & L_2(V) & , \\
\sqrt{\varepsilon}\, e^{-kt}u''_\varepsilon & \quad " & L_2(H) & .
\end{array}
$$

LEMME 3.2. <u>On a</u> :

(3.4) $\quad e^{-kt}u''_\varepsilon$ <u>est borné dans</u> $L_2(H^{-1}(\Omega))$ <u>lorsque</u> $\varepsilon \to 0$.

<u>Démonstration</u>.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(Q)$(= fonctions C^∞ à support compact dans le cylindre $\Omega \times (0,\infty)$), et

$$w(x,t) = \int_0^t \psi(x,\sigma)d\sigma .$$

On peut prendre dans (3.3) $v = u_\varepsilon \pm w$, d'où, $\forall\ \psi \in \mathcal{D}(Q)$:

$$\varepsilon \int_0^\infty e^{-2kt}[(u''_\varepsilon,\psi') + a(t;u'_\varepsilon,\psi)]dt +$$
$$+ \int_0^\infty e^{-2kt}[(u''_\varepsilon,\psi) + a(t;u_\varepsilon,\psi)]dt = \int_0^\infty e^{-2kt}(f,\psi)dt.$$

Donc :

$$- \varepsilon \frac{d}{dt}(e^{-2kt}u''_\varepsilon) + \varepsilon e^{-2kt}A(t)u'_\varepsilon + e^{-2kt}(u''_\varepsilon + A(t)\ u_\varepsilon) = e^{-2kt}f$$

d'où

$$- \varepsilon \frac{d}{dt}(e^{-kt}u''_\varepsilon) + e^{-kt}\ u''_\varepsilon = e^{-kt}f - e^{-kt}Au_\varepsilon - \varepsilon e^{-kt}Au'_\varepsilon - \varepsilon k\ e^{-kt}u''_\varepsilon = g_\varepsilon$$

et g_ε demeure dans un borné de $L_2(H^{-1}(\Omega))$. Donc, comme dans [1], Lemme 2.3 on en déduit (3.4).

3.2. <u>Passage à la limite</u>.

On suppose, par extraction, que $u_\varepsilon \to u$ dans la topologie faible de W. On écrit (3.3) sous la forme

$$\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon \geqslant \gamma_\varepsilon + \delta_\varepsilon ,$$

où

$$\alpha_\varepsilon = \varepsilon \int_0^\infty e^{-2kt}[(u''_\varepsilon,v'') + a(t;u'_\varepsilon,v')]dt,$$

$$\beta_\varepsilon = \int_0^\infty e^{-2kt}[(u''_\varepsilon,v') + a(t;u_\varepsilon,v')]dt,$$

$$\gamma_\varepsilon = \int_0^\infty e^{-2kt}[(u''_\varepsilon,u'_\varepsilon) + a(t;u_\varepsilon,u'_\varepsilon)]dt,$$

$$\delta_\varepsilon = \int_0^\infty e^{-2kt}(f,v'-u'_\varepsilon)dt.$$

Pour v fixé, $\alpha_\varepsilon = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. On a par ailleurs :

$$\beta_\varepsilon = \int_0^\infty e^{-2kt}[-(u'_\varepsilon,v''-2kv') + a(t;u_\varepsilon,v')]dt \to \beta =$$
$$= \int_0^\infty e^{-2kt}[-(u',v''-2kv') + a(t;u,v')]dt \; ;$$

puis

$$\gamma_\varepsilon = \int_0^\infty e^{-2kt}(\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}[|u'_\varepsilon|^2 + a(t;u_\varepsilon)] - \tfrac{1}{2}a'(t;u_\varepsilon))dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{-2kt}[k|u'_\varepsilon(t)|^2 + ka(t;u_\varepsilon) - \tfrac{1}{2}a'(t;u_\varepsilon)]dt$$

d'où

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}. \gamma_\varepsilon \geqslant \int_0^\infty e^{-2kt}[k|u'|^2 + ka(t;u) - \tfrac{1}{2}a'(t,u)]dt = \gamma \, .$$

Donc :

$$\beta \geqslant \gamma + \int_0^\infty e^{-2kt}(f,v'-u')dt.$$

Posons :

$$L(v) = \beta - \int_0^\infty e^{-2kt}(f,v')dt$$

$$C = \gamma - \int_0^\infty e^{-2kt}(f,u')dt.$$ (C'est la quantité intervenant dans (2.3

On a :

$$L(v) \geqslant C \qquad \forall\, v\in K_0 \, ,$$

donc

$$L(\lambda v) = \lambda L(v) \geqslant C \qquad \forall\, \lambda > 0 \; ;$$

faisant tendre λ vers 0, on en déduit $C \leqslant 0$ (i.e. (2.3)).

Puis $L(v) \geqslant \frac{C}{\lambda}$ et faisant $\lambda \to \infty$, $L(v) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in K_o$, i.e. (2.2) ≡ (1.7). Comme $u = \lim u_\varepsilon$ dans W, $u_\varepsilon \in K_o$, on a : $u \in K$ et donc u satisfait à (2.1)(2.2)(2.3) - et donc, d'après le n°2, u satisfait aux conditions du théorème **1.1**.

4. <u>Unicité</u>.

4.1. Soient u_1 et u_2 deux solutions ; donc

$$u_j \in K, \qquad j = 1,2$$

$$(4.1)\quad \begin{cases} L_j(v) = \int_0^\infty e^{-2kt}[-(u_j',v''-2kv') + a(t;u_j,v')]dt - \\ \qquad - \int_0^\infty e^{-2kt}(f,v')dt \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in K_o \ , \end{cases}$$

$$(4.2)\quad \begin{cases} C_j = \int_0^\infty e^{-2kt}[k|u_j'|^2 + ka(t;u_j) - \frac{1}{2}\, a'(t;u_j)]dt - \\ \qquad - \int_0^\infty e^{-2kt}(f,u_j')dt = 0 \quad , \quad j = 1,\ 2. \end{cases}$$

Soient : $\theta_m = (\chi_m \text{ pour } s = \frac{1}{m}) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leqslant \frac{1}{m}\ , \\ m(t-\frac{1}{m}) \text{ si } \frac{1}{m} \leqslant t \leqslant \frac{2}{m} \\ 1 \text{ si } t > \frac{2}{m}\ , \end{cases}$

ρ_n , $\tilde{\rho}_n$ comme au n°2,

$w_j = ((\theta_m u_j') * \rho_n * \tilde{\rho}_n)\theta_m$,

$v_j(t) = \int_0^t w_j(\sigma)d\sigma$;

on a : $v_j \in K_o$ comme au n°2.

On peut donc déduire de (4.1) que :

$$L_1(v_2) + L_2(v_1) \geqslant 0$$

ou encore

$$X_m^n + Y_m^n + Z_m^n + R_m^n \geqslant S_m^n$$

où

$$X_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}[-(\theta_m u_1', (\theta_m u_2')*\tilde{\rho}_n*\rho_n') - \ldots^{(1)}]dt,$$

$$Y_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}[-\theta_m'(u_1', (\theta_m u_2')*\tilde{\rho}_n*\rho_n) - \ldots]dt,$$

$$Z_m^n = 2k\int_0^\infty e^{-2kt}[(\theta_m u_1', (\theta_m u_2')*\tilde{\rho}_n*\rho_n) + \ldots]dt,$$

$$R_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}[a(t;\theta_m u_1, (\theta_m u_2')*\tilde{\rho}_n*\rho_n) + \ldots]dt,$$

$$S_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}(f, (\theta_m(u_1'+u_2'))*\rho_n*\tilde{\rho}_n)\theta_m\, dt.$$

Mais

$$X_m^n = -\int_0^\infty [(e^{-2kt}\theta_m u_1')*\check{\tilde{\rho}}_n, (\theta_m u_2')*\rho_n') + \ldots]dt =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-2kt}[((\theta_m u_1')*\rho_n, (\theta_m u_2')*\rho_n') + \ldots]dt =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-2kt}\frac{d}{dt}(\theta_m u_1'*\rho_n, (\theta_m u_2')*\rho_n)dt =$$

$$= -2k\int_0^\infty e^{-2kt}((\theta_m u_1')*\rho_n, (\theta_m u_2')*\rho_n)dt.$$

---

(1) Au cours de ce calcul, par ... nous désignons le terme déduit du précédent <u>par échange de</u> u_1 et u_2.

et donc, lorsque $n \to \infty$:

$$X_m^n \to X_m = -2k \int_0^\infty e^{-2kt}\, \theta_m^2 (u_1', u_2')dt .$$

On vérifie tout de suite que, lorsque $n \to \infty$,

$$Y_m^n \to Y_m = -2 \int_0^\infty e^{-2kt}\, \theta_m \theta_m' (u_1', u_2')dt ,$$

$$Z_m^n \to Z_m = 4k \int_0^\infty e^{-2kt}\, \theta_m^2 (u_1', u'_2)dt ,$$

$$S_m^n \to S_m = \int_0^\infty e^{-2kt} (f, u_1' + u_2')\theta_m^2\, dt .$$

Admettons un instant le

LEMME 4.1. <u>Lorsque</u> $n \to \infty$ <u>on a</u> :

$$R_m^n \to R_m = \int_0^\infty e^{-2kt} \theta_m^2 [2ka(t;u_1,u_2) - a'(t;u_1,u_2)]dt - 2 \int_0^\infty e^{-2kt} \theta_m \theta_m' a(t;u_1,u_2)dt.$$

On obtient alors :

$$X_m + Y_m + Z_m + R_m \geqslant S_m$$

soit :

$$(4.3) \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \theta_m^2\, e^{-2kt} [2k(u_1',u_2') + 2ka(t;u_1,u_2) - a'(t;u_1,u_2)]dt - \\ \displaystyle\qquad -2 \int_0^\infty e^{-2kt} \theta_m \theta_m' [(u_1',u_2') + a(t;u_1,u_2)]dt \geqslant \\ \displaystyle\qquad\qquad \geqslant \int_0^\infty \theta_m^2\, e^{-2kt} (f, u_1'+u_2')dt . \end{cases}$$

Mais

$$\left| \int_0^\infty e^{-2kt}\, \theta_m \theta_m' [(u_1',u_2') + a(t;u_1,u_2)]dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant (\text{constante})[\sup. |u_1'(t)| . \sup. |u_2'(t)| + \sup. \|u_1(t)\| . \sup. \|u_2(t)\|],$$

tous les sup. étant pris dans $[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]$, et grâce à (1.6) ceci $\to 0$ avec $\frac{1}{m}$.

On déduit donc de (4.3), lorsque $m \to \infty$:

$$\int_0^\infty e^{-2kt}[2k(u_1',u_2') + 2ka(t;u_1,u_2) - a'(t;u_1,u_2)]dt \geq \int_0^\infty e^{-2kt}(f,u_1'+u_2')dt.$$

Donc, utilisant (4.2) :

$$C_1 + C_2 - \int_0^\infty e^{-2kt}[2k(u_1',u_2') + 2ka(t;u_1,u_2) - a'(t;u_1,u_2)]dt +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-2kt}(f,u_1'+u_2')dt \leq 0$$

i.e.

$$\int_0^\infty e^{-2kt}[k(u_1'-u_2')^2 + ka(t;u_1-u_2) - \tfrac{1}{2}\, a'(t;u_1-u_2)]dt \leq 0$$

d'où, utilisant (1.2), $u_1 - u_2 = 0$. c.q.f.d.

4.2. <u>Démonstration du Lemme</u> 4.1.

Avec les notations du n°2 :

$$R_m^n = \int_0^\infty [(((e^{-2kt}\mathcal{A}\,\theta_m u_1)*\check{\tilde{\rho}}_n,(\theta_m u_2')*\rho_n)) + \ldots\ ]dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-2kt}[(((\mathcal{A}\,\theta_m u_1)*\rho_n,(\theta_m u_2')*\rho_n)) + \ldots\ ]dt\ .$$

Donc

$$R_m^n = r_m^n + \rho_m^n$$

avec

$$r_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}[(((\mathcal{A}\,\theta_m u_1)*\rho_n,(\theta_m u_2)*\rho_n')) + \ldots\ ]dt,$$

$$\rho_m^n = -\int_0^\infty e^{-2kt}[(((\mathcal{A}\,\theta_m u_1)*\rho_n,(\theta_m' u_2)*\rho_n)) + \ldots\ ]dt,$$

et

$$\rho_m^n \to -2\int_0^\infty e^{-2kt}\ \theta_m\theta_m'\ a(t;u_1,u_2)dt,\quad n \to \infty\ .$$

Reste donc à montrer que

$$(4.4) \qquad r_m^n \to \int_0^\infty e^{-2kt}\theta_m^2[2ka(t;u_1,u_2) - a'(t;u_1,u_2)]dt .$$

Mais

$$r_m^n = {}^1r_m^n + {}^2r_m^n ,$$

où

$${}^1r_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}[((\mathcal{A}((\theta_m u_1)*\rho_n), (\theta_m u_2)*\rho_n')) + \dots]dt,$$

$${}^2r_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}[(((\mathcal{A}\theta_m u_1)*\rho_n - \mathcal{A}((\theta_m u_1)*\rho_n), (\theta_m u_2)*\rho_n')) + \dots]dt .$$

Or d'après le Lemme de Friedrichs vectoriel déjà utilisé :

$$\int_0^\infty \{((\frac{d}{dt} [e^{-2kt}((\mathcal{A}\theta_m u_1)*\rho_n - \mathcal{A}((\theta_m u_1)*\rho_n))] , (\theta_m u_2)*\rho_n)) + \dots \}dt \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Donc

$$\lim_{n\to\infty} r_m^n = \lim_{n\to\infty} {}^1r_m^n \quad \text{(si la limite existe)} ;$$

or

$${}^1r_m^n = \int_0^\infty e^{-2kt}[\frac{d}{dt} a(t;(\theta_m u_1)*\rho_n, (\theta_m u_2)*\rho_n) - a'(t;(\theta_m u_1)*\rho_n,(\theta_m u_2)*\rho_n)]dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-2kt}[2ka(t;(\theta_m u_1)*\rho_n,(\theta_m u_2)*\rho_n) - a'(t;(\theta_m u_1)*\rho_n,(\theta_m u_2)*\rho_n)]dt$$

d'où (4.4) et le Lemme 4.1.

Ceci achève la démonstration du Théorème 1.1.

5. Interprétation du problème.

On va vérifier que u vérifie (certaines conditions étant **formelles**) :

(5.1) $u'' + Au = f$ dans le cylindre $\Omega\times]0,\infty[$,

(5.2) $(\gamma u)' \geqslant 0$ sur Σ ,

(5.3) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} \geqslant 0$ sur Σ,

(5.4) $(\gamma u)' \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0$ sur Σ ,

(5.5) $u(x,0) = 0, \quad u'(x,0) = 0$.

Tout d'abord (5.2) et (5.5) résultent de l'appartenance de u à K.

On a vu dans la démonstration du Lemme 3.2 que

$$\varepsilon \frac{d}{dt}(e^{-kt} u''_\varepsilon) + \varepsilon e^{-kt} Au'_\varepsilon + e^{-kt}(u''_\varepsilon + Au_\varepsilon - f) = 0$$

d'où (5.1) en passant à la limite.

Multipliant (5.1) par $e^{-2kt}v'$ et intégrant par parties, on trouve

(5.6) $$\int_0^\infty e^{-2kt}[-(u',v''-2kv') + a(t;u,v')]dt + \int_\Sigma (-\frac{\partial u}{\partial \nu_A})v' d\Sigma = \int_0^\infty e^{-2kt}(f,v')dt$$

d'où en tenant compte de (1.7) :

$$\int_\Sigma (\frac{\partial u}{\partial \nu_A})v' \, d\Sigma \geqslant 0$$

d'où (5.3). Si l'on prend $v' = u'$ dans (5.6), que l'on intègre encore par parties et que l'on utilise (1.8), on obtient

$$\int_\Sigma (\frac{\partial u}{\partial \nu_A})u' \, d\Sigma = 0$$

d'où (5.4) et le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.L. Lions, Séminaire Leray, Conférence précédente.

[2] G. Stampacchia, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258 (1964), p.4413.

[3] W. Strauss. A paraître.