Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

François Trèves

Inégalités asymptotiques dans L^2

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1965-1966), p. 50-89
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966___1_50_0>

INÉGALITÉS ASYMPTOTIQUES DANS L^2

par

François TRÈVES

On sait le rôle que jouent les inégalités de Carleman dans la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires (existence et unicité de solutions, unicité dans le problème de Cauchy et dans le prolongement des singularités). L'emploi de fonctions-poids convexes, ou bien pseudoconvexes au sens de Hörmander, a permis de démontrer un type assez spécial d'inégalités de Carleman, qui se rattachent à la forme suivante :

$$(1) \qquad \sum_p \tau^{|p|} \int e^{2\tau f} |P^{(p)} u|^2 dx \leqslant C \int e^{2\tau f} |Pu|^2 dx \quad .$$

Ici P est un opérateur différentiel d'ordre $m \geqslant 0$, défini et à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; f est une fonction réelle, disons $\mathcal{C}^\infty$, dans Ω. Nous désignerons systématiquement par p, q, etc... des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à composantes entières $\geqslant 0$, c'est-à-dire des "n-uples". Si $x_1, \ldots, x_n$ est un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^n$, et si l'expression de l'opérateur P dans ce système est

$$P(x,D) = \sum_{|p| \leqslant m} a_p(x) D^p \quad , \quad \left(D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad j = 1 \ , \ \ldots, \ n\right) \quad ,$$

nous utiliserons la notation $P^{(q)}(x,D)$, ou $P^{(q)}$, pour désigner l'opérateur différentiel dans Ω

$$(\partial/\partial D)^q P(x,D) = \sum_{p\geq q} \frac{p!}{(p-q)!} a_p(x) D^{p-q}$$

(où $p\geq q$ signifie $p_j \geq q_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$).

Convenons de dire que l'inégalité (1) est vraie dans Ω pour un nombre $\tau \geq 0$ s'il existe une constante $C\geq 0$ telle qu'on ait (1) pour toute fonction $u \in \mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$, et que l'inégalité (1) est vraie dans Ω pour tout τ grand si (1) est vraie dans Ω pour tout τ au moins égal à un certain nombre $\tau_0 \geq 0$ de telle sorte que la constante C soit indépendante de $\tau \geq \tau_0$. Nous dirons aussi que (1) est semi-globalement vraie dans Ω (resp. localement vraie dans Ω) si (1) est vraie sur tout sous-ensemble ouvert relativement compact, Ω' , de Ω , i.e. pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$ (resp. si tout point de Ω possède un voisinage dans lequel (1) soit vraie).

Des inégalités de Carleman de la forme (1) sont apparues pour la première fois (à ma connaissance) dans le Chapitre 4 de Trèves [1] où il est démontré que (1) est vraie dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $\tau \geq 0$ quels que soient l'opérateur différentiel à coefficients constants $P = P(D)$ et la forme quadratique définie positive, f. Dans ce cas, la constante C ne dépend que de la forme quadratique f et du degré m de P . L.Hörmander a utilisé ensuite des modifications et généralisations diverses de ce résultat dans ses articles [1], [2] sur l'unicité du problème de Cauchy. Les résultats du Chapitre VIII de Hörmander [3] sont tous basés sur des inégalités du type (1) . Celles-ci conduisent Hörmander à introduire l'importante notion de pseudo-convexité

(<u>ou de pseudo-convexité forte</u>) par rapport à un opérateur différentiel. Il n'est pas inutile de rappeler de quoi il s'agit, dans un cas simple : par exemple dans le cas d'un opérateur différentiel à coefficients constants $P = P(D)$. On considère l'ensemble $N_y(y\in\Omega)$ des vecteurs complexes de la forme $\xi+i\tau$ grad $f(y)$ $\xi\in R^n$, $\tau > 0$, $|\xi|^2+\tau^2 \neq 0$, qui satisfont l'équation caractéristique $P_m(\xi+i\tau \text{grad } f(y)) = 0$ et tels que l'on ait, lorsque $\tau = 0$, $<\text{grad } P_m(\xi), \text{grad } f(y)> = 0$. Notons ensuite $\bar{N}_y$ l'adhérence de N_y dans le complémentaire de l'origine dans C^n et posons, pour $z\in C^n$,

$$f_2(y;z) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_j \partial x_k} z_j \bar{z}_k .$$

Autrement dit, $z \rightsquigarrow f_2(y;z)$ est la forme hermitienne sur C^n définie par la hessienne de f au point y. On dit alors que f est fortement pseudoconvexe par rapport à P si pour tout $y\in\Omega$ et tout $\zeta\in\bar{N}_y$, on a :

(2) $$f_2(y;P_m(\zeta)) > 0 .$$

Remarquons que ceci implique, entre autre choses, que les caractéristiques de P qui appartiennent à $\bar{N}_y$ soient toutes simples. Les éléments de $\bar{N}_y$, ce sont les caractéristiques de P qui interviennent dans le problème : poser qu'elles doivent être simples a pour conséquence (fort habituelle dans toute la théorie des équations aux dérivées partielles) que tout va dépendre de la partie principale de P, P_m. Cela a aussi pour conséquence, comme il n'est pas difficile de vérifier, l'inégalité suivante (valable semi-globalement dans Ω pour τ grand)

$$(3) \qquad \sum_q \tau^{2(m-|q|)-1}\int e^{2\tau f}|D^q u|^2 dx \leqslant C \sum_p \tau^{|p|}\int e^{2\tau f}|P^{(p)}u|^2 dx \quad .$$

Si la fonction f est fortement pseudo-convexe dans Ω , l'inégalité (1) est alors vraie, semi-globalement, dans Ω , pour τ grand. En combinant (1) et (3) on obtient ce cas particulier des inégalités du Chapitre VIII de Hörmander [3] ,

$$(4) \qquad \sum_q \tau^{2(m-|q|)-1}\int e^{2\tau f}|D^q u|^2 dx \leqslant C\int e^{2\tau f}|Pu|^2 dx \quad .$$

Il est d'ailleurs intéressant de voir que ce résultat admet une réciproque (toujours dans le cas où $P = P(D)$ est à coefficients constants) : <u>si les caractéristiques de</u> P <u>qui appartiennent à</u> $\bar{N}_y$ <u>dont simples</u> <u>(pour tout</u> $y \in \Omega$) <u>et si</u> (1) <u>est vraie localement dans</u> Ω <u>pour</u> τ <u>grand, alors</u> f <u>est nécessairement fortement pseudoconvexe par rapport à</u> P . On trouvera une démonstration de cette réciproque dans le Chapitre VIII de Hörmander [3] .

Bien entendu, Hörmander ne se limite pas au cas des coefficients constants. En fait, sa méthode de démonstration repose sur un changement $\mathcal{C}^\infty$ de variables : il transforme ainsi f en une fonction linéaire, ce qui exige que grad f ne s'annule en aucun point de Ω ; il utilise ensuite la transformation de Fourier. Cette méthode est fort différente de celle de Trèves [1]. On voit qu'elle ne "récupère" pas le cas où f est une forme quadratique et Ω un ouvert rencontrant le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ où grad f = 0 . Mais il n'est pas difficile de donner une démonstration des inégalités du Chapitre VIII de Hörmander [3] qui, en s'inspirant des méthodes de Trèves [1] , permette de lever l'hypothèque que grad f ne doive jamais s'annuler - du moins dans le cas où P est elliptique (et bien entendu, aussi dans le cas où P est à coefficients constants) ; pour cela, voir Harvoy [1] et Trèves [2] .

Pour terminer ces quelques considérations "historiques", signalons que les inégalités d'énergie, pour les équations hyperboliques et paraboliques, sont équivalentes à l'inégalité (1) lorsqu'on choisit pour f une fonction linéaire (les inégalités d'énergie semblent plus fortes - mais ce n'est là qu'apparence - ce qui n'empêche pas, bien sûr, que ce soient les formes les plus fortes qui soient les plus intéressantes !).

Le temps semble être venu de lever la restriction que les caractéristiques déterminantes, c'est-à-dire les caractéristiques de la forme

$$\xi + i\tau \text{ grad } f(y)$$

et certaines de leurs limites, doivent être simples. Je me suis efforcé de trouver des conditions suffisantes assez générales (et même nécessaires, si possible !) pour que l'on ait encore une majoration (1) - sans cette restriction. Cela semble très difficile, même dans le cas, auquel je me suis limité, où les coefficients de l'opérateur différentiel sont constantes. Dans ces exposés, j'énoncerai un théorème qui fournit une telle condition (Théorème 1). Cette condition est de nature algébrique : elle ne porte que sur le polynôme P et l'exposant f de la fonction-poids (plus précisément sur les valeurs de f dans Ω) ; elle est, en outre, invariante par le groupe de transformations qui intervient ici, c'est-à-dire le groupe affine. Elle présente toutefois un inconvénient majeur : elle semble très difficile à vérifier, en dehors des cas déjà plus ou moins connus. J'espère qu'elle pourra servir d'instrument d'investigation des propriétés des opérateurs à caractéristiques multiples et conduire éventuellement à des conditions, elles aussi algébriques, mais plus humaines! Cependant, s'il s'avérait que son exploitation se heurte à des difficultés insurmontables, cela signifierait sans doute que la direction choisie était mauvaise - peut-être même que l'étude des inégalités (1) n'est pas intéressante. Cette éventualité n'est certes pas à exclure. Mais il est peut-être trop tôt pour se décourager. Il resterait d'ailleurs à expliquer pourquoi des inégalités de Carleman du type (1) ont fait leur apparition et ont joué un rôle important en divers points de la théorie des EDP linéaires (cf. e.g. les inégalités démontrées dans Trèves [2], Ch. II, qui portent sur un opérateur différentiel de la forme $P(z, \partial/\partial z)$, avec $z = (z_1, \ldots, z_\nu) \in \mathbb{C}^\nu \cong \mathbb{R}^{2\nu}$ - ici $2\nu = n$ - et sur une fonction f, en exposant, qui est strictement pseudoconvexe (au sens de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes). Rappelons d'ailleurs (cf. Trèves [1], ch. IV, [3], Appendice C) qu'à l'origine des inégalités du type (1) il y a des <u>identités</u> qui traduisent des <u>relations de commutation</u> fondamentales.

§ 1. Invariance. Passage du local au global. Reduction au cas où la fonction-poids est l'exponentielle d'un polynome.

Nous commençons par une remarque d'invariance. Bien que nous ayons utilisé un système de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ pour formuler la majoration (1) sa validité locale (ou semi-globale) ne dépend pas des coordonnées choisies. Si (1) *est localement vraie dans* Ω *et si* T *est un difféomorphisme de* $\mathbb{R}^n$, *alors* (1) *est localement vraie dans* $T\Omega$ *lorsqu'on remplace* f *par*

$$T\Omega \ni x \rightsquigarrow f^T(x) = f(T^{-1}x) \quad ,$$

et l'opérateur P *par l'opérateur*

$$\mathcal{C}_c^\infty(T\Omega) \ni u \rightsquigarrow P^T u = (P(u^{T^{-1}}))^T \quad .$$

Pour vérifier cette assertion, il suffit de remarquer l'équivalence entre la validité locale (ou semi-globale) de (1) dans Ω, et le fait suivant :

(*) *Pour tout ensemble de* r *fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *dans* Ω, $g_1, \ldots, g_r$ $(r \geq 1)$, *et pour tout ouvert* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *il existe* $C > 0$ *telle que l'on ait, pour toute fonction* $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega')$,

$$\tau^r \int e^{2\tau f} |[\ldots[[P,g_1], g_2], \ldots g_r]u|^2 dx \leq C \int e^{2\tau f} |Pu|^2 dx \quad .$$

Nous avons employé la notation habituelle : $[A,B] = AB - BA$ (g_j désignant ici l'opérateur multiplication par la fonction g_j). Signalons que lorsque le difféomorphisme T est un automorphisme *affine* de $\mathbb{R}^n$, la validité *globale* de (1) dans Ω (pour $\tau \geq 0$ donné) est équivalente à sa validité globale dans $T\Omega$ lorsqu'on y remplace f par f^T et P par P^T (pour la même valeur de τ).

Il est temps aussi de remarquer que <u>la validité locale de</u> (1) <u>pour τ grand</u> implique sa validité semi-globale (aussi pour τ grand). Ceci se voit aussitôt en utilisant une partition de l'unité. Mais en choisissant avec soin la partition de l'unité (en particulier, en la faisant dépendre d'une certaine façon, que nous allons maintenant préciser, de τ), on peut obtenir quelque chose de plus, qui va éclairer le rôle des facteurs $\tau^{|p|}$ au premier membre de (1). Ces facteurs $\tau^{|p|}$ constituent l'un des traits distinctifs des inégalités (1) ; pour mieux le voir, considérons les majorations suivantes :

$$(5)_k \qquad \sum_p \tau^{2|p|/k} \int e^{2\tau f} |P^{(p)}u|^2 dx \leqslant C \int e^{2\tau f} |Pu|^2 dx \quad .$$

Ici, k sera un entier $\geqslant 1$; pour $k = 2$, on obtient (1) .

Posons, pour $x^0 \in \Omega$,

$$f_k(x;x^0) = \sum_{|p|\leqslant k} \frac{1}{p!} (x-x^0)^p \quad (\partial/\partial x)^p f(x^0) \quad .$$

Supposons que $(5)_k$ soit vraie localement dans Ω (pour une certaine valeur de τ). Soit $\rho > 0$ un nombre assez petit pour que l'ensemble

$$(6) \qquad \{x \; ; |x - x^0| \leqslant \rho \tau^{-\frac{1}{k+1}}\}$$

soit contenu dans Ω . Pour x dans l'ensemble (6) , on aura

$$|f(x)-f_k(x;x^0)| \leqslant K_0 |x-x^0|^{k+1} \leqslant K_0 \tau^{-1} \rho^{k+1} \quad ,$$

et donc, si le support de u est contenu dans (6),

$$(7) \qquad \Sigma\tau^{2|p|/k}\int e^{2\tau f_k(x;x^0)}|P^{(p)}u|^2dx \leq C_1\int e^{2\tau f_k(x;x^0)}|Pu|^2dx \quad .$$

Cette implication $(5)_k \Rightarrow (7)$ admet une sorte de réciproque, que nous allons énoncer et démontrer soigneusement.

Soit d un nombre > 0 ; nous noterons Ω_d l'ensemble des $x \in \Omega$ dont la distance à $\complement\Omega$ est $> d$. Nous ferons l'hypothèse suivante :

$$(8) \qquad \sup_{y\in\Omega_d} \sum_{|p|=k+1} |D^p f(y)| < +\infty \quad \underline{\text{pour tout}}\ d > 0 \quad .$$

Il est clair que (8) est automatiquement vérifiée si Ω est borné.

PROPOSITION 1.- _Supposons que_ (8) _soit vérifiée. Pour tout_ $d > 0$, _il existe un nombre_ $R > 0$ _ayant la propriété suivante :_

Supposons que la majoration (7) _soit vraie pour tout_ $x^0 \in \Omega_d$ _et toute fonction_ $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ _ayant son support dans la boule_

$$(9) \qquad \{x \ ;\ |x-x^0| < R\tau^{-1/k}\} \quad ,$$

avec des constantes τ _et_ C_1 _indépendantes de_ x^0 ; _supposons de plus que_

$$(10) \qquad R\tau^{-1/k} < d \quad ,$$

$$(10') \qquad R^{k+1}\,\tau^{-1/k} < 1 \quad .$$

Alors la majoration $(5)_k$ _est valable dans_ Ω_d.

Démonstration

En vertu de (10), l'ensemble (9) est contenu dans un ouvert $\Omega_{d'}$, avec $d'>0$. Il résulte alors de (8) que si x est un point de (9) , on aura

$$|f(x)-f_k(x;x^0)| \leqslant K\, R^{k+1}\, \tau^{-1-\frac{1}{k}} .$$

On peut choisir la constante K indépendamment de x^0 . Si on tient compte de ceci dans (7) , on voit que la majoration $(5)_k$ est vraie dans l'ensemble (9) , avec une constante C indépendante de x^0 . Il reste à déduire de là que $(5)_k$ est vraie dans Ω_d .

Cela se fait à l'aide d'une partition de l'unité $\{g_\tau^j\}$ (j=1,2...) dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ayant les propriétés suivantes :

(11) Pour tout j ,

diamètre (supp g_τ^j) $< R\tau^{-1/k}$.

(12) Pour tout j , il existe ν entiers $j' \neq j$ (et pas plus !) tels que

$$\text{supp } g_\tau^j \cap \text{ supp } g_\tau^{j'} \neq \emptyset \;;$$

l'entier ν ne dépend que de la dimension de l'espace .

(13) Pour tout n-uple p , il existe $K_p > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Sigma_{j=1}^{\infty} \; |D^p g^j(x)|^2 \leqslant K_p R^{-2|p|} \; \tau^{2|p|/k} .$$

La constante K_p ne dépend que de p et de la dimension n de l'espace.

Soit Q un opérateur différentiel à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω , d'ordre $\leqslant m$. La formule de Leibniz, combinée avec (13) , implique

$$(14) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \int e^{2\tau f} \, |Q(g_\tau^j u)|^2 \, dx \leqslant K' \{ \int e^{2\tau f} |Qu|^2 dx + R^{-2} \sum_{p \neq 0} \tau^{2|p|/k} \int e^{2\tau f} |Q^{(p)} u|^2 dx \}$$

D'autre part, la propriété (12) implique

$$(15) \quad \int e^{2\tau f} |Qu|^2 dx = \sum_{j,j'} \int e^{2\tau f} Q(g_\tau^j u) \, \overline{Q(g_\tau^{j'} u)} dx \leqslant (\nu+1) \sum_j \int e^{2\tau f} |Q(g_\tau^j u)|^2 \, dx \ .$$

Nous allons appliquer (14) avec $Q=P$ et (15) avec $Q=\tau^{|p|/k} P^{(p)}$.
En appliquant aussi $(5)_k$ avec u remplacé par $g_\tau^j u$, $j=1,2,\ldots,$ et $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_d)$, ce qui est légitime en vertu de (11) , on obtient

$$\sum_p \tau^{2|p|/k} \int e^{2\tau f} |P^{(p)} u|^2 dx \leqslant CK'(\nu+1) \{ \int e^{2\tau f} |Pu|^2 dx + $$
$$+ R^{-2} \sum_{p \neq 0} \tau^{2|p|/k} \int e^{2\tau f} |P^{(p)} u|^2 dx \} \ .$$

Il reste à s'assurer que si $R \to +\infty$, $CK'(1+\nu)R^{-2} \to 0$. En vertu de (12) et de (13) , $K'(1+\nu)$ ne dépend que de la dimension n de l'espace et de l'ordre m de P . Quant à C , les considérations du début de la démonstration montrent qu'on peut prendre

$$C = C_1 e^{2KR^{k+1}\tau^{-1/k}} < C_1 e^{2K} ,$$

en vertu de (10') .

C.Q.F.D.

La philosophie de la Proposition 1, c'est que la validité de $(5)_k$ dépend du développement taylorien d'ordre k de f au voisinage de chaque point de Ω . En particulier, la validité de (1) va dépendre du développement taylorien d'ordre deux de f au voisinage de chaque point de Ω . A partir du paragraphe suivant, donc, nous nous bornerons à considérer le cas où f est un polynôme du second degré (à coefficients réels). Il suffirait d'ailleurs, en principe, de n'étudier la validité de (1) que dans un voisinage d'un point. Toujours en vertu de la proposition 1, le diamètre de ce voisinage pourra tendre vers zéro avec $1/\tau$, pourvu qu'il reste grand par rapport à $1/\sqrt{\tau}$.

§ 2. Une identité portant sur les polynômes différentiels et les formes quadratiques.

Nous nous proposons d'étudier les majorations (1) lorsque

$$f(x) = \langle N,x\rangle + Q(x) ,$$

où N est un vecteur (du dual) de $\mathbb{R}^n$ et Q une forme quadratique (à valeurs réelles) sur $\mathbb{R}^n$. Nous supposerons désormais que P est un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, i.e., un polynôme différentiel. Posons alors, dans (1) ,

$$u = v\, e^{-\tau f} ,$$

ce qui donne

$$(17) \qquad \Sigma\tau^{|p|}\int |P^{(p)}(D+i\tau f')u|^2 dx \leqslant C\int |P(D+i\tau f')u|^2 dx ,$$

où nous avons utilisé la notation

$$f' = \text{grad } f = N + \text{grad } Q \ .$$

Notre but est d'obtenir des conditions "algébriques" suffisantes pour que (17) soit valable, dans un certain ouvert Ω , pour τ grand. A cette fin, nous utiliserons une identité exprimant

$$\int |P(D + i\tau f')u|^2 dx \tag{18}$$

comme combinaison linéaire de produits hermitiens

$$\int P^{(p)}(D-i\tau f')u \, \overline{P^{(q)}(D-i\tau f')u} \, dx \ .$$

Ici $\overline{P}$ désigne le polynôme obtenu en remplaçant chaque coefficient de P par son complexe conjugué ; notons que l'opérateur

$$\overline{P}^{(p)}(D-i\tau f')$$

est l'adjoint formel (pour le produit hermitien de L^2) de l'opérateur En essayant d'exploiter une expression de (18) nous nous inspirons de la méthode du Ch. IV de Trèves [1] ; nous verrons au paragraphe suivant à quoi cela mène. Pour le moment, calculons l'expression en question. Pour cela (et afin de préserver l'invariance par le groupe affine), il est bon d'employer des notations tensorielles.

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur le corps des complexes. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de V . Les produits tensoriels

$$e_\alpha = e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_d}$$

forment une base de l'espace vectoriel des tenseurs homogènes de degré d (entier $\geqslant 0$) lorsque $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ parcourt l'ensemble des <u>multi-indices de longueur</u> d , c'est-à-dire des systèmes de d entiers α_j tels que $1 \leqslant \alpha_j \leqslant n$.

Nous noterons alors θ_α la coordonnée d'ordre α de $\theta^{(d)}$ dans cette base :

$$\theta^{(d)} = \sum_{|\alpha|=d} \theta_\alpha e_\alpha ,$$

où $|\alpha|$ est la longueur du multi-indice α . Considérons alors la forme hermitienne définie par la forme quadratique Q ; nous noterons aussi Q cette forme hermitienne. Supposons qu'elle s'écrive, dans la base $\{e_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$,

$$Q(z) = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} z_j \bar{z}_k$$

On peut définir (de façon intrinsèque) l'extension de la forme hermitienne Q aux tenseurs homogènes de degré d ; cette extension sera notée $Q^{(d)}$.

Si $d \geqslant 1$, l'expression de cette extension par rapport à la base $(e_\alpha)_{|\alpha| = d}$ est

$$Q^{(d)}(\theta^{(d)}) = \sum_{|\alpha|;|\beta|= d} c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \bar{\theta}_\beta \quad ,$$

où l'on a posé

$$c_{\alpha\beta} = c_{\alpha_1\beta_1} \cdots c_{\alpha_d\beta_d} \quad .$$

Pour $d = 0$, $\theta^{(d)}$ est un nombre complexe, soit z ; on pose

$$Q^{(0)}(\theta^{(0)}) = |z|^2 \quad .$$

Soit P un polynôme à coefficients complexes, en n lettres $X_1,\ldots,X_n$; si $\alpha = (\alpha_1 , \ldots, \alpha_d)$ est un multi-indice, nous posons

$$P^{(\alpha)}(X) = (\partial/\partial X_{\alpha_1})\ldots(\partial/\partial X_{\alpha_d})P(X) \quad .$$

Nous prendrons, comme espace vectoriel V , le dual complexe de $\mathbb{R}^n$, i.e., l'espace des fonctions linéaires, à valeurs complexes, sur $\mathbb{R}^n$. Considérons une forme quadratique réelle Φ à n variables, une fonction $\mathcal{C}^\infty$ u à décroissance rapide à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées, c'est-à-dire $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Utilisons les coordonnées x_j dans $\mathbb{R}^n$; ces coordonnées peuvent être considérées comme une base de V . A partir de cette base, nous pouvons construire une base $\{x_\alpha\}$ de l'algèbre tensorielle sur V : si $\alpha \neq \emptyset$, $x_\alpha = x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_d}$; $x_\emptyset = 1$.

Nous désignerons par

$$(19) \qquad P^{(d)}(D+i\,\Phi'(x))u(x) \quad , \quad x \in R^n \quad ,$$

le tenseur homogène de degré d ayant pour coordonnées, dans la base

$(x_\alpha)_{|\alpha|=d}$, les nombres

$$P^{(\alpha)}(D+i\Phi'(x))u(x) \quad .$$

On vérifie facilement que nous avons bien défini ainsi un tenseur, évidemment symétrique. Lorsque x varie dans $\mathbb{R}^n$, (19) définit un champ tensoriel, que nous noterons naturellement

$$P^{(d)}(D+i\,\Phi')u \quad .$$

Nous considérons aussi le champ tensoriel (symétrique, homogène de degré d)

$$\overline{P}^{(d)}(D-i\,\Phi')u \quad .$$

Nous pouvons enfin énoncer l'identité que nous avions en vue :

LEMME 1. - Soit P un polynôme à coefficients complexes, à n indéterminées. Soient Φ une forme quadratique réelle à n variables, u une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées. On a :

$$(20) \qquad \int |P(D+i\,\Phi')u|^2 dx = \sum_{d\geq 0} \frac{4^d}{d!} \int \Phi^{(d)}(\overline{P}^{(d)}(D-i\,\Phi')u)dx \quad .$$

Ce lemme est une extension très simple du Lemme 4, de Trèves [1]. Nous allons en donner (ou plutôt en esquisser) trois démonstrations.

Démonstration n° 1.

Par un changement de variables linéaires dans $\mathbb{R}^n$, on se ramène au cas où la forme Φ est une somme de carrés positifs ou négatifs,

$$(21) \qquad \Phi(x) = |x'|^2 - |x''|^2 \quad ,$$

avec $x = (x', x'', x''')$, $x' = (x_1, \dots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \dots, x_{r+s})$, $x''' = (x_{r+s+1}, \dots, x_n)$. Le couple d'entiers (r,s) est la signature de la forme quadratique Φ .

On part de l'identité évidente :

$$|P(\xi + i\Phi'(y))|^2 = |\overline{P}(\xi - i\Phi'(y))|^2 \quad , \qquad \xi, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par $|\hat{v}(\xi,y)|^2$,

où

$$\hat{v}(\xi,y) = \int e^{i<\xi,x>} v(x,y)dx \quad ,$$

et

$$v(x,y) = u(x)e^{-|x-y|^2} \ .$$

En appliquant la formule de Plancherel, nous obtenons :

$$\int e^{-2|x-y|^2} |P(D+2i(x-y) + i\Phi'(y))u(x)|^2 dx =$$

$$= \int e^{-2|x-y|^2} |\overline{P}(D+2i(x-y) - i\Phi'(y))u(x)|^2 dx \ .$$

On a :

$$2(x-y)+\Phi'(y) = 2(x-y)-\Phi'(x-y) + \Phi'(x) \quad ,$$

$$2(x-y)-\Phi'(y) = 2(x-y)+\Phi'(x-y) - \Phi'(x) \ .$$

D'ailleurs :

$$2(x-y)-\Phi'(x-y) = 4(x''-y'') \quad ,$$

$$2(x-y)+\Phi'(x-y) = 4(x'-y') \ .$$

Nous avons donc

$$P(D+2i(x-y) + i\Phi'(y))u(x) = P(D+i\Phi'(x))(e^{-2|x''-y''|^2}u(x)) ,$$

$$\overline{P}(D+2i(x-y) - i\Phi'(y))u(x) = \overline{P}(D-i\Phi'(x))(e^{-2|x'-y'|^2}u(x)) ,$$

Si on utilise alors la formule de Leibniz, on peut écrire, en posant

$$t' = x' - y' \quad , \quad t'' = x'' - y'' \quad , \quad t = x - y \quad ,$$

(23) $$P(D+2i(x-y) + i\Phi'(y))u(x) = \sum_{p''} \frac{1}{p''!} D^{p''}_{t''}(e^{-2t''^2})P^{(p'')}(D_x+i\Phi'(x))u(x) ,$$

(24) $$\overline{P}(D+2i(x-y) - i\Phi'(y))u(x) = \sum_{p'} \frac{1}{p'!} D^{p'}_{t'}(e^{-2t'^2})\overline{P}^{(p')}(D_x-i\Phi'(x))u(x) .$$

Posons

$$H_p(t) = \frac{1}{p!} e^{t^2} D^p(e^{-2t^2}) \quad .$$

Les formules classiques pour les fonctions d'Hermite donnent :

(25) $$\int |H_p(t)|^2 dt = \frac{4^{|p|}}{p!} (\pi/2)^{n/2} ,$$

(26) $$\int H_p(t)\overline{H_q(t)} dt = 0 \quad \text{si} \quad p \neq q \quad .$$

Si on tient compte de (23) et (24) dans l'égalité (22) , on obtient

$$\sum_{p'',q''} \int H_{p''}(t)\overline{H_{q''}(t)} P^{(p'')}(D+i\Phi')u\overline{P^{(q'')}(D+i\Phi')u}\, dx =$$

$$= \sum_{p',q'} \int H_{p'}(t)\overline{H_{q'}(t)}\,\overline{P}^{(p')}(D-i\Phi')u\overline{\overline{P}^{(q')}(D-i\Phi')u}\, dx \quad .$$

Ici, comme dans (23) et (24) ,

$$p' = (p_1,\dots,p_r,0,\dots,0) \quad , \quad p'' = (0,\dots,0,p_{r+1},\dots,p_{r+s},0,\dots,0) \quad ,$$

et de même pour q' , q'' . Si l'on tient compte de (25) et de (26) , on obtient :

$$(27) \qquad \sum_{p''} \frac{4^{|p''|}}{p''!} \int |P^{(p'')}(D+i\Phi')u|^2 dx = \sum_{p'} \frac{4^{|p'|}}{p'!} \int |\overline{P}^{(p')}(D-i\Phi')u|^2 dx \quad .$$

Cette identité (27) implique facilement (20) : il suffit de raisonner par récurrence sur le degré de P , (20) étant évidente lorsque ce degré est nul. Il suffit, alors, de remplacer, dans le premier membre de (27) , les termes

$$\int |P^{(p'')}(D+i\Phi')u|^2 dx \quad , \quad p'' \neq 0 \quad ,$$

par leur expression que donne (20) lorsqu'on y remplace P par $P^{(p'')}$.

<u>Démonstration n° 2</u>

Cette démonstration, ainsi que la suivante, est basée sur une identité abstraite, que nous allons maintenant énoncer. On considère $2n$ éléments $A_1,\dots A_n$, $B_1,\dots,B_n$ d'un anneau $\mathcal{A}$, lequel possède un élément unité, noté I ; d'ailleurs, cet anneau $\mathcal{A}$ est une algèbre sur le corps des complexes. On fait l'hypothèse que les A_j et les B_k satisfont aux relations de commutation suivantes :

$$(28) \quad \begin{cases} [A_j,A_{j'}] = [B_k,B_{k'}] = 0 & \text{pour tous } j, j', k, k' \ ; \\ [A_j,B_j] = 1 & \text{pour tout } j = 1, \dots, n \ ; \\ [A_j,B_k] = 0 & \text{si } j \neq k \ . \end{cases}$$

On peut alors considérer des polynómes en les A_j (resp. en les B_k) :

$$P(A) = \sum_p a_p A^p \quad (\text{resp. } Q(B) = \sum_q b_q B^q) \ ,$$

où, comme d'habitude, $A^p = A_1^{p_1} \dots A_n^{p_n}$, etc... Sous les conditions (28) on a :

$$(29) \qquad Q(B)P(A) = \sum_p (-1)^{|p|} \frac{1}{p!} P^{(p)}(A) Q^{(p)}(B) \ .$$

La démonstration est extrêmement simple : comme (29) est bilinéaire par rapport aux polynomes P, Q, il suffit de l'établir pour $P(A) = A^\mu$ et $Q(B) = B^\nu$ où μ et ν sont des n-uples ; on raisonne alors par récurrence sur les longueurs $|\mu|$ et $|\nu|$.

Ceci dit, on remarque que (20) est continue par rapport à Φ et qu'il suffit donc de la démontrer lorsque Φ est non dégénérée, c'est-à-dire lorsque $r+s=n$. On suppose alors que Φ est sous la forme (21) . On choisit

$$A_j = \frac{1}{2i}(D_j - D_j\Phi) \ , B_k = \theta_k \ \frac{1}{2i}(D_k + D_k\Phi) \ , \quad i = \sqrt{-1} \ ,$$

où $\theta_k = 1$ si $1 \leqslant k \leqslant r$ et $\theta_k = -1$ si $r+1 \leqslant k \leqslant r+s$. On vérifie aisément que les relations (28) sont satisfaites. Nous prendrons

$$P(X) = R(2iX) \ , \quad Q(X) = \overline{R}(2iX', -2iX'') \ , \quad i = \sqrt{-1}.$$

Ici R est un polynome quelconque à n indéterminées. On a :

$$P(A) = R(D - D\Phi) \ , \quad Q(B) = \overline{R}(D + D\Phi) \ ,$$

et l'on voit que $Q(B)$ est l'adjoint de $P(A)$. On a donc :

$$P^{(p)}(A)Q^{(p)}(B) = (2i)^{2|p|}(-1)^{|p''|}R^{(p)}(D-D\Phi)\overline{R}^{(p)}(D+D\Phi)$$

et en remplaçant dans (29) ,

$$\overline{R}(D+D\Phi)R(D-D\Phi) = \sum_p (-1)^{|p''|}\frac{4^{|p|}}{p!}R^{(p)}(D-D\Phi)\overline{R}^{(p)}(D+D\Phi) \quad (30)$$

Il suffit de faire opérer les deux membres sur u et de prendre le produit scalaire (au sens de L^2) du résultat avec u . On obtient exactement (20) avec R au lieu de P .

Démonstration n° 3

Ceci est une variante complexe de n° 2 ; nous nous bornerons à en esquisser l'idée. On suppose que Φ est non dégénérée et on effectue un changement de variables $\mathbb{C}$-linéaire pour ramener l'extension holomorphe de Φ dans $\mathbb{C}^n$ (notée encore Φ) à la forme $(z_1)^2+\dots+(z_n)^2$.

On choisit alors

$$A_j = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_j} -2z_j\right) , \quad B_k = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}+2z_k\right) .$$

Les relations (28) sont satisfaites et on déduit de (29) , en remplaçant $P(A)$ par $P(2A)$ et $Q(B)$ par $Q(-2B)$,

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial z} +2z\right)P\left(\frac{\partial}{\partial z} -2z\right)= \sum_p \frac{4^{|p|}}{p!}P^{(p)}\left(\frac{\partial}{\partial z} -2z\right)Q^{(p)}\left(\frac{\partial}{\partial z}+2z\right) .$$

En faisant le changement $\mathbb{C}$-linéaire de variables, inverse de celui du début, on obtient la formule générale

(31) $$Q(\frac{\partial}{\partial z}+\Phi'(z))P(\frac{\partial}{\partial z}-\Phi'(z)) = \sum_{d\geqslant 0} \frac{4^d}{d!} \tilde{\Phi}^{(d)}(P^{(d)}(\frac{\partial}{\partial z} - \Phi'(z)),Q^{(d)}(\frac{\partial}{\partial z} + \Phi'(z)))$$

Nous avons noté $\tilde{\Phi}^{(d)}$ la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire associée à la forme quadratique $\Phi^{(d)}$. On applique les deux membres à la même fonction entière $z \leadsto u(z)$ et on choisit $P(X) = R(-iX)$, $Q(X) = \overline{R}(-iX)$. On suppose que la restriction de u à l'espace réel $\mathbb{R}^n$ appartient à $\mathcal{S}$ et on multiplie par $\overline{u(x)}$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ les deux membres de l'identité obtenue, restreints à $\mathbb{R}^n$; on intègre par rapport à x sur $\mathbb{R}^n$. On obtient ainsi (20) pour toute fonction $u\in\mathcal{S}$ qui se prolonge à $\mathbb{C}^n$ en une fonction entière (et avec P remplacé par R). Mais ces fonctions sont denses dans $\mathcal{S}$.

§ 3. Enoncé du critère algébrique.

Nous conservons ici les notations tensorielles du paragraphe précédent, mais il est préférable de manipuler des tenseurs symétriques. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n , V son dual "complexe" c'est-à-dire $E'\otimes C \cong L(E;C)$. L'algèbre des tenseurs symétriques sur V peut être identifiée à l'algèbre des fonctions polynômes sur E à valeurs complexes. Si $x_1, \dots, x_n$ est une base de E' (i.e., un système de coordonnées dans E) on obtient une base de l'algèbre symétrique sur V en prenant les "monômes" $\frac{1}{p!}x^p$, $p\in\mathbb{N}^n$. Si θ est un tenseur symétrique sur V , sa coordonnée de rang p dans cette base sera notée θ_p .

Notre hypothèse de départ sera l'existence d'une famille de formes hermitiennes sur l'algèbre symétrique sur V ,

(32) $$(\lambda_{p,q}^{(\xi^0,y^0)})_{p,q\in\mathbb{N}^n} ,$$

famille indiciée par les points (ξ^0,y^0) de $E'\times\Omega$, et douée de propriétés diverses (relatives au polynome P définissant notre opérateur différentiel $P(D)$, à l'ouvert Ω et à l'exposant f de la fonction-poids,

$$f(x) = \langle N,x\rangle + Q(x)) .$$

La première de ces propriétés s'exprime par la condition

(33) $$\sum_{p,q} \lambda_{p,q}^{(\xi^0,y^0)} \tau^{\frac{1}{2}|p+q|} P^{(p)}(\xi+i\tau f'(y))\overline{P^{(q)}(\xi+i\tau f'(y))} \geqslant 0 ,$$

qui doit être valable :

pour tout τ au moins égal à un nombre $\tau_0 \geqslant 0$, indépendant de ξ^0, y^0 ;

pour tout $y\in E$ tel que $|y-y^0| \leqslant \rho(\tau)\tau^{-\frac{1}{2}}$,

pour tout $\xi\in E'$ tel que $|\xi-\xi^0| \leqslant \rho(\tau)\tau^{\frac{1}{2}}$.

La fonction $\rho(\tau)$ ne dépend pas non plus de (ξ^0,y^0) ; en outre,

(34) $$\lim_{\tau\to+\infty} \rho(\tau) = +\infty .$$

Bien entendu, il y a des foules de formes hermitiennes remplissant les conditions précédentes. Les conditions ultérieures opèreront un tri parmi ces formes. Nous exigerons que, pour chaque $(\xi^0,y^0)\in E'\times\Omega$, il existe une forme quadratique complexe sur E ,

$$K^{(\xi^0,y^0)} ,$$

<u>dont la partie réelle soit définie positive</u> :

(35) $\quad \mathrm{Re}K^{(\xi^0,y^0)} \succ 0 \quad ,$

telle que l'on ait, pour tout tenseur symétrique θ (sur V), dont les composantes de degré $> m$ soient nulles,

(36) $$\sum_{p,q} T_{p,q}(\lambda^{(\xi^0,y^0)} \ , \ K^{(\xi^0,y^0)} \ , Q)\, \theta_p \overline{\theta}_q \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{d\geqslant 0} \frac{4^d}{d!} Q^{(d)}(\theta^{(d)}) - c_0 \sum_p |\theta_p|^2 \quad .$$

Nous devons expliquer les notations : $\Phi^{(d)}$ est la puissance tensorielle d-ième de la forme hermitienne Φ ; $\theta^{(d)}$ est la composante homogène de degré d du tenseur symétrique θ (en particulier, $\theta^{(d)} = 0$ si $d > m$) ; $T_{p,q}(\lambda,K,Q)$ est une sorte de loi de composition entre formes hermitiennes, donnée par la formule suivante

(37) $\quad T_{p,q}(\lambda,K,Q) =$

$$= \sum_{\substack{r \leqslant p \\ s \leqslant q}} \overline{\lambda}_{p-r,q-s} \int_{R^n} e^{-2\mathrm{Re}K(y)} H_r(y;Q+K)\, \overline{H_s(y;Q+K)}\, dy \quad ,$$

où $r \leqslant p$ signifie $r_j \leqslant p_j$ pour tout $j = 1 , \ldots, n$ et où $H_r(y;F)$ est le "polynome d'Hermite" d'ordre $r(r\in\mathbb{N}^n)$ de la forme quadratique (complexe) F :

(38) $$H_r(y;F) = \frac{1}{r!}\, e^{F(x)} D^r(e^{-F(x)}) \quad .$$

La constante c_0 dans (36) doit être indépendante de $(\xi^0,y^0)\in E' \times \Omega$ et de θ . On a d'ailleurs d'autres conditions d'uniformité par rapport à (ξ^0,y^0) :

(39) $$\sup_{p,q} |\lambda_{p,q}^{(\xi^0,y^0)}| \quad ,$$

$$\sup_{|x|=1} |K^{(\xi^0,y^0)}(x)| \quad ,$$

$$\sup_{|x|=1} \{\mathrm{Re} K^{(\xi^0,y^0)}(x)\}^{-1}$$

sont bornés indépendamment de $(\xi^0,y^0)\in E' \times \Omega$.

DEFINITION 1.- Sous les conditions précédentes, nous dirons que (32) constitue un système admissible de formes hermitiennes sur l'algèbre symétrique sur V , défini dans $E' \times \Omega$

Cette définition est justifiée par le résultat suivant :

THÉORÈME 1.- Supposons qu'il existe un système admissible de formes hermitiennes sur l'algèbre symétrique sur V , défini dans $E' \times \Omega$.

Alors, il existe des constantes τ_1 , $C > 0$ telles que, pour tout nombre $\tau \geqslant \tau_1$ et toute fonction $u \in \mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$, on ait :

(1) $$\sum_p \tau^{|p|} \int e^{2\tau f} |P^{(p)}(D)u|^2 dx \leqslant C \int e^{2\tau f} |P(D)u|^2 dx \quad .$$

Il ne peut être question de donner ici la démonstration de ce résultat, démonstration qui est technique à l'extrême. Nous donnerons cependant une idée de l'étape cruciale de cette démonstration. Les difficultés techniques surgissent de ce que les formes (32) sont données <u>localement</u> tant par rapport à ξ que par rapport à y (sans aucune "homogénéité" entre voisinages de points (ξ,y) différents) et qu'il faut "recoller les morceaux".

Soulignons le fait que tant l'hypothèse que la conclusion du Théorème 1 sont invariantes par le groupe affine de E (ou de $\mathbb{R}^n$) .

§ 4. <u>Démonstration du théorème 1 dans un cas très simple</u>

Il n'est pas trop difficile de déduire la majoration (1) , plus exactement sa validité globale dans $\mathbb{R}^n$, d'une forme simplifiée - et renforcée - de l'hypothèse du Théorème 1. Cette déduction a le mérite de mettre en évidence l'une des étapes essentielles de la démonstration du Théorème 1. La simplification de l'hypothèse consiste à <u>supprimer toute localisation par rapport à</u> (ξ,y) . Et tout d'abord, nous raisonnerons seulement dans le cas où $\Omega = E(=\mathbb{R}^n)$. Au lieu d'une famille de formes hermitiennes (32) , nous considèrerons une seule de ces formes $(\lambda_{p,q})_{(p,q\in\mathbb{N}^n)}$. Nous supposerons que l'on a, pour <u>tous</u> ξ, $y\in\mathbb{R}^n$,

(40) $$\sum_{p,q} \lambda_{p,q} \tau^{\frac{1}{2}|p+q|} P^{(p)}(\xi + i\tau f'(y)) \overline{P^{(q)}(\xi + i\tau f'(y))} \geqslant 0 \quad .$$

Ceci doit avoir lieu pour tout $\tau \geqslant \tau_0$. Nous supposons en outre qu'il existe une forme quadratique complexe, K , sur $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout tenseur symétrique θ tel que $\theta^{(d)} = 0$ pour $d > m$,

(41) $$\sum_{p,q} T_{p,q}(\lambda, K, Q)\theta_p \overline{\theta}_q \leqslant \sum_{d \geqslant 0} \frac{4^d}{d!} Q^{(d)}(\theta^{(d)}) - c_0 \sum_p |\theta_p|^2 \quad .$$

La constante c_0 est > 0 et ne dépend pas de θ . Les nombres $T_{p,q}(\lambda, K, Q)$ ont été définis en (37) .

Soit une fonction quelconque appartenant à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, u . Posons

$$v_\tau(x,y) = e^{-\tau K(x-y)} u(x) \quad ,$$

$$\hat{v}_\tau(\xi, y) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} v_\tau(x,y) dx \quad .$$

Multiplions le premier membre de (40) par $|\hat{v}_\tau(\xi,y)|^2$, intégrons par rapport à ξ et appliquons la formule de Parseval. Nous obtenons

(42) $$\sum_{p,q} \overline{\lambda}_{p,q} \tau^{\frac{1}{2}|p+q|} \int e^{-2\tau \operatorname{Re} K(x-y)} \overline{P}^{(p)}(D_x - i\tau f'(y) + i\tau K'(x-y)) u(x)$$
$$\times \; \overline{\overline{P}^{(q)}(D_x - i\tau f'(y) + i\tau K'(x-y)) u(x)} dx \geqslant 0 \quad .$$

Pour raccourcir les expressions, posons $F = f + K$; on a :

$$\overline{P}^{(p)}(D_x - i\tau f'(y) + i\tau K'(x-y))u(x) =$$

$$= \overline{P}^{(p)}(D_x - i\tau f'(x) + i\tau F'(x-y))u(x) =$$

$$= e^{\tau F(x-y)}\overline{P}^{(p)}(D_x - i\tau f'(x))[u(x)\ e^{-\tau F(x-y)}] =$$

$$= \sum_r \frac{1}{r!} e^{\tau F(x-y)} D_x^r (e^{\tau F(x-y)})\ \overline{P}^{(p+r)}(D - i\tau f')u(x)$$

d'après la formule de Leibniz. Ainsi donc, en employant la notation (38) nous pouvons ré-écrire (42)

$$(43) \qquad \sum_{p,q} \lambda_{p,q} \tau^{\frac{1}{2}|p+q|} \sum_{r,s} \int e^{-2\tau \mathrm{Re} K(x-y)} H_r(x-y;\tau F)\overline{H_s(x-y;\tau F)} \quad \times$$

$$\times \quad \overline{P}^{(p+r)}(D - i\tau f')u(x)\overline{\overline{P}^{(q+s)}(D - i\tau f')u(x)}dx \geqslant 0 \quad .$$

On remarque alors que

$$H_r(\xi;\tau F) = \tau^{\frac{1}{2}|r|} H_r(\sqrt{\tau}\xi;F) \quad .$$

Nous intégrons ensuite le 1er membre de (43) par rapport à y , sur $\mathbb{R}^n$ entier ; dans cette intégrale, nous faisons le changement de variables,

$$x - y \to \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, y \quad .$$

Après réarrangement des sommations, nous obtenons (cf. (37))

$$(44) \qquad \sum_{p,q} T_{p,q}(\lambda,K,Q)\tau^{\frac{1}{2}|p+q|} \int \overline{P}^{(p)}(D - i\tau f')u\ \overline{\overline{P}^{(q)}(D - i\tau f')u}dx \geqslant 0 \quad .$$

On applique (41) au tenseur θ de coordonnées

$$\theta_p = \tau^{\frac{1}{2}|p|}\overline{P}^{(p)}(D-i\tau f'(x))u(x) \quad , \quad x\in \mathbb{R}^n \quad .$$

En intégrant par rapport à x sur $\mathbb{R}^n$, on déduit de (41) et de (44) :

$$(45) \qquad c_0 \sum_p \tau^{|p|}\int|\overline{P}^{(p)}(D-i\tau f')u|^2dx \leqslant \sum_{d\geqslant 0} \frac{(4\tau)^d}{d!}\int Q^{(d)}(\overline{P}^{(d)}(D-i\tau f')u)dx \quad .$$

Il suffit pour conclure d'appliquer deux fois le lemme 1. On l'applique une première fois au polynome

$$P(X+i\tau N)$$

au lieu de l'appliquer à P lui-même (on rappelle que $N =$ grad $f(0)$) , et à la forme quadratique $\Phi = \tau Q$. Noter alors que l'on a

$$\Phi^{(d)} = \tau^d Q^{(d)} \quad .$$

Le deuxième membre de (45) est donc égal à $\int|P(D+i\tau f')u|^2dx$.

On applique ensuite le lemme 1 aux polynomes

$$P^{(p)}(X+i\tau N) \quad , \quad p\in\mathbb{N}^n \quad ,$$

encore avec $\Phi = \tau Q$. On en déduit

$$\sum_p \tau^{|p|}\int|P^{(p)}(D+i\tau f')u|^2dx \leqslant C_0 \sum_p \tau^{|p|}\int|\overline{P}^{(p)}(D-i\tau f')u|^2dx \quad ,$$

où C_0 ne dépend que de la forme quadratique Q , de m (degré de P) et de n (nombre de variables). En combinant tout cela, on obtient

$$\sum_p \tau^{|p|}\int |P^{(p)}(D+i\tau f')u|^2 dx \leqslant C_0/c_0 \int |P(D+i\tau f')u|^2 dx \quad .$$

En remplaçant u par $ue^{\tau f}$, on obtient exactement (1) .

§. 5. Exemples

Nous considérons, comme précédemment, un polynome différentiel $P(D)$ sur $\mathbb{R}^n$, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, un polynome réel du second degré à n variables,

$$f(x) = \langle N,x\rangle + Q(x) \quad .$$

Exemple n° 1 : la forme quadratique Q est définie positive

Ce cas est trivial : on peut prendre $\Omega = R^n$ et $\lambda_{p,q}^{(\xi,y)} = 0$ pour tous $(\xi,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ et tous $p, q\in\mathbb{N}^n$; on aura alors
$T_{p,q}(\lambda^{(\xi,y)},K,Q) = 0$

quelle que soit la forme quadratique K (telle que $\mathrm{Re}K > 0$) . Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que (36) , c'est-à-dire

$$c_0 \sum_p |\theta_p|^2 \leqslant \sum_{d\geqslant 0} \frac{4^d}{d!} Q^{(d)}(\theta^{(d)}) \quad ,$$

soit vérifiée pour tout tenseur symétrique θ tel que $\theta^{(d)} = 0$ pour $d > m$. Nous voyons donc que, dans ce cas, la majoration (1) est vraie globalement dans $\mathbb{R}^n$ - pour tout polynôme différentiel $P(D)$. On retrouve ainsi le théorème 4.4. de Trèves [1] .

Exemple n° 2 : la forme quadratique Q est définie négative

Ici aussi, nous prendrons $\lambda_{p,q}^{(\xi,y)} = \lambda_{p,q}$ indépendant de $(\xi,y)\in\mathbb{R}^n \times \Omega$.
Nous prendrons de plus $\lambda_{p,q} = 0$ si $|p|\neq|q|$; nous pouvons alors noter $\lambda^{(d)}$ la restriction de λ aux tenseurs homogènes de degré d . Nous choisirons

$$\lambda^{(d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2Q(y)}dy\right)^{-1}\left(\frac{4d}{d!}\, Q^{(d)} - J^{(d)}\right) ,$$

où J est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$, définie positive. La condition (33) devient

$$(46) \qquad \sum_{d\geq 0} \frac{(4\tau)^d}{d!} Q^{(d)}(P^{(d)}(\xi+i\tau f'(y))) \geq \sum_{d\geq 0} \tau^d J^{(d)}(P^{(d)}(\xi+i\tau f'(y))) ,$$

qui doit être valable pour tout $\tau \geq \tau_0$, tout $\xi\in\mathbb{R}^n$, tout y dans le voisinage d'ordre $\rho(\tau)\tau^{-\frac{1}{2}}$ de Ω (avec $\rho(\tau) \to +\infty$ avec τ).
Nous choisissons alors

$$K = - Q .$$

Avec ce choix,

$$H_r(y;Q+K) = 0 \quad \text{si} \quad r \neq 0 \quad , \quad = 1 \quad \text{si} \quad r = 0 ,$$

donc

$$T_{p,q}(\lambda,K,Q) = \bar{\lambda}_{p,q}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2Q(y)}dy .$$

Mais alors (36) est trivialement vérifié.

Ainsi l'existence d'une forme J telle que (46) soit vraie dans les conditions décrites entraîne la validité globale dans Ω de (1) .

Signalons que lorsque P est homogène de degré m , l'existence de la forme définie positive J telle que (46) soit vraie (dans les conditions précédentes) est nécessaire. En effet, il est facile de déduire de (1) , lorsque Q est définie négative, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait

$$\sum_{|p| \neq 0} \varepsilon^{|p|} \tau^{|p|} |P^{(p)}(\xi + i\tau f'(y))|^2 \leqslant |P(\xi + i\tau f'(y))|^2$$

pour y dans $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ et τ assez grand (cet "assez" pouvant dépendre de Ω') . Ceci est vrai même lorsque P n'est pas homogène ; mais lorsque P est homogène, cela entraîne facilement la validité de (46) dans les ouverts $\Omega' \subset\subset \Omega$ pour τ assez grand.

Exemple n° 3 : le cas des caractéristiques simples

Notons Σ^+ l'hémisphère positif unité dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$, i.e. l'ensemble

$$\{(\eta, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \quad ; \quad |\eta|^2 + \sigma^2 = 1 , \ \sigma \geqslant 0\} \quad .$$

Pour chaque $y \in \mathbb{R}^n$, nous introduirons les sous-ensembles suivants de Σ^+ ,

$$A_y = \{(\eta, \sigma) \in \Sigma^+ \quad ; \quad \sigma > 0 \quad , \quad P_m(\eta + i\sigma f'(y)) = 0 \ \} \quad ;$$

$B_y = \{(\eta, 0) \in \Sigma^+$; il existe une suite $(\eta_k, \sigma_k) \to (\eta, 0)$, $\sigma_k > 0$, telle que

$$\sigma_k^{-1} P_m(\eta_k) \to - i < P'_m(\eta), f'(y) > \}$$

(on a posé $P'_m(X) = \mathrm{grad}_X P_m(X)$; P_m est la partie principale de P)

$$C_y = \{(\eta,0)\in\Sigma^+ \; ; \; P_m(\eta) = 0 \; , \; < P'_m(\eta), f'(y) > = 0\} \; .$$

De plus (cf. l'introduction), nous poserons

$$N_y^0 = A_y \cup C_y$$

Enfin, nous désignerons par U_y l'ensemble des $(\xi,\tau)\in\Sigma^+$ tels qu'il existe un voisinage $U_y(\xi,\tau)$ de (ξ,τ) dans Σ^+ , et une constante $c(\xi,\tau) > 0$ tels que, pour tout $(\eta,\sigma)\in U_y(\xi,\tau)$, $\sigma \neq 0$,

$$(47) \qquad \sigma^{-1} |P_m(\eta+i\sigma f'(y))| \geqslant c(\xi,\tau) > 0 \; .$$

L'ensemble U_y est ouvert, les ensembles B_y et C_y sont fermés ; en général, A_y n'est pas fermé. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- <u>Les ensembles suivants sont identiques</u> :

1) <u>la fermeture</u> $\bar{N}^0$ <u>de</u> N_y^0 <u>dans</u> Σ^+ ;

2) <u>la réunion</u> $A_y \cup B_y$;

3) <u>le complémentaire de</u> U_y <u>par rapport à</u> Σ^+ .

<u>Démonstration</u> : l'identité de 2) et de 3) est évidente sur les définitions. Ainsi $A_y \cup B_y$ est fermé. Montrons que N_y^0 (et par conséquent, $\bar{N}_y^0$) est contenu dans $A_y \cup B_y$. Il suffit de montrer que $C_y \subset B_y$; mais si $(\eta,0)\in C_y$, il est évident que $0 = (\frac{1}{k})^{-1} P_m(\eta_k) \to \frac{1}{i} < P'_m(\eta), f'(y) > = 0$ si l'on prend $\eta_k = (1 - \frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}}\eta$. Reste à montrer que $A_y \cup B_y$ est exactement égal à $\bar{N}_y^0$. Comme $A_y \subset N_y^0$, il suffit de montrer que si $(\eta,0)\in B_y \setminus C_y$, alors

$(\eta,0)\in\bar{A}_y$. Supposons donc

$$a = \langle P'_m(\eta) \ , \ f'(y) \rangle \neq 0 \ .$$

Montrons qu'il existe alors un vecteur $\theta\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$\text{(48)} \qquad \operatorname{Im} \frac{1}{a} \langle P'_m(\eta) \ , \ \theta \rangle \neq 0 \ .$$

Si ce n'était pas le cas, le polynome par rapport à $\xi\in\mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{a} P_m(\xi) \ ,$$

devrait être réel. Mais alors on ne pourrait pas trouver une suite $(\eta_k \ , \sigma_k)$, $\sigma_k > 0$, convergeant vers $(\eta \ , 0)$, telle que $\sigma_k^{-1} P_m(\eta_k)$ converge vers $-ia$.

Choisissons θ vérifiant (48) . Puisque $a \neq 0$, il existe une fonction holomorphe $w = w(z)$ (dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^1$) vérifiant

$$P_m(\eta + z\theta + wf'(y)) = 0 \ , \ w(0) = 0 \ .$$

Puisque

$$w = -\frac{1}{a} \langle P'_m(\eta) \ , \ \theta \rangle z + O(|z|^2 + |w|^2) \ ,$$

on peut trouver un intervalle assez petit $[-\delta,+\delta]$ dans $\mathbb{R}^1$ tel que, lorsque z est réel et varie dans cet intervalle, w ne s'annule qu'en $z = 0$ et change de signe en ce point. Supposons que $w(z)$ soit > 0 pour $0 < z < \delta$ (on peut se ramener à ce cas en changeant θ en $-\theta$) .

Posons

$$w = \rho + i\tau \ , \ \xi = \eta + z\theta + \rho f'(y) \ .$$

Pour $0 < z < \delta$ et δ suffisamment petit, on a $\tau > 0$ et $\xi \neq 0$.

Il suffit alors de poser

$$\eta' = \xi/(|\xi|^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \sigma' = \tau/(|\xi|^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

On a $P_m(\eta' + i\sigma' f'(y)) = 0$ et $(\eta' , \sigma') \to (\eta , 0)$ pour $z \geq 0$. C.Q.F.D.

Remarquons que lorsque y parcourt un compact de $\mathbb{R}^n$, la réunion des $\overline{N}^0_y$ est un compact de Σ^+ . En outre, pour tout voisinage U de $\overline{N}^0_{y^0}$ dans Σ^+ , il existe un voisinage V de y^0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{N}^0_y \subset V$ pour tout $y \in V$.

Soit maintenant F une fonction réelle et C^2 dans Ω ; soit y un point de Ω . La définition suivante est due à Hörmander ([3], Définition 8.6.1.).

DÉFINITION 2.- <u>On dit que</u> F <u>est fortement pseudo-convexe, par rapport à l'opérateur différentiel</u> $P(D)$, <u>au point</u> y <u>si, pour tout</u> $(\eta , \sigma) \in \overline{N}_y$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F(y)}{\partial x_j \partial x_k} P_m^{(j)}(\eta + i\sigma F'(y)) \overline{P_m^{(k)}(\eta + i\sigma F'(y))} > 0 \quad .$$

En vertu de la remarque qui précède la définition 2 , si F est fortement pseudo-convexe en y , il en va de même en tout point proche de y .

Supposons que la fonction F soit fortement pseudo-convexe par rapport à $P(D)$ au point y . Alors les caractéristiques de $P(D)$ qui sont de la forme $\eta + i\sigma F'(y)$, avec $(\eta , \sigma) \in \overline{N}^0_y$, sont nécessairement simples. Ceci dit, la définition 2 se justifie par le résultat suivant (essentiellement dû à Hörmander) :

THÉORÈME 2.- <u>Supposons que pour tout</u> $y \in \Omega$, <u>les caractéristiques de</u> $P(D)$ <u>qui sont de la forme</u>

$$\eta + i\sigma F'(y) \quad , \quad (\eta , \sigma) \in \overline{N}_y^0 \quad ,$$

<u>soient simples.</u>

<u>Alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) F <u>est fortement pseudo-convexe par rapport à</u> $P(D)$ <u>dans</u> Ω ;

(b) <u>pour tout ouvert</u> $\Omega' \subset\subset \Omega$, <u>il existe deux constantes</u> > 0 , C , τ_0 , <u>telles que, pour tout</u> $\tau \geqslant \tau_0$ <u>et toute</u> $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega')$,

$$\sum_{|p|<m} \tau^{2(m-|p|)-1} \int e^{2\tau F} |D^p u|^2 dx \leqslant C \int e^{2\tau F} |P(D)u|^2 dx \quad ;$$

(c) <u>pour tout</u> $\Omega' \subset\subset \Omega$, <u>il existe</u> C , $\tau_0 > 0$ <u>telles que, pour tout</u> $\tau \geqslant \tau_0$ <u>et toute</u> $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega')$,

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^n} \tau^{|p|} \int e^{2\tau F} |P^{(p)}(D)u|^2 dx \leqslant C \int e^{2\tau F} |P(D)u|^2 dx \quad .$$

Nous nous bornerons à indiquer ici comment on peut déduire l'implication (a) $\Rightarrow$ (c) (ou(a) $\Rightarrow$ (b) , en fait) du Théorème 1.

Il suffit de raisonner au voisinage d'un point de Ω et de remplacer F par son développement de Taylor d'ordre deux en ce point, c'est-à-dire de remplacer F par un polynome du second degré,

$$f(x) = \langle N, x \rangle + Q(x) \quad .$$

La pseudo-convexité forte de F , par rapport à P(D) , conduit ainsi à la condition

$$Q(P'_m(\eta+i\sigma f'(y))) > 0 \quad \text{pour tout} \quad (\eta , \sigma)\in \overline{N}^0_y .$$

Dans ceci, nous pouvons supposer que y varie dans une boule fermée de rayon suffisamment petit, $\mathcal{B}$. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de Σ^+ , ouvert par rapport à Σ^+, contenant y pour tout $y\in\mathcal{B}$, et une constante $c > 0$, tels que pour tout $y\in\mathcal{B}$, tout $(\eta , \sigma)\in \mathcal{O}$,

$$(49) \qquad Q(P'_m(\eta+i\sigma f'(y))) > c .$$

Le complémentaire de $\mathcal{O}$ par rapport à Σ^+ est un compact, contenu dans le complémentaire de la réunion des $\overline{N}^0_y$, $y\in\mathcal{B}$. Il existe donc $c' > 0$ tel que

$$(50) \qquad \sigma^{-1}|P_m(\eta+i\sigma f'(y))| > c'$$

pour tout $y\in\mathcal{B}$ et tous $(\eta , \sigma)\in\Sigma^+\setminus \mathcal{O}$, $\sigma \neq 0$. Cela résulte aussitôt de (47) . En combinant (49) et (50) , on voit qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $y\in\mathcal{B}$ et tous $(\eta , \sigma)\in\Sigma^+$, $\sigma > 0$,

$$(51) \qquad M\sigma^{-2}|P_m(\eta+i\sigma f'(y))|^2 + 4Q(P'_m(\eta+i\sigma f'(y))) \geqslant c'' > 0 .$$

Soient alors $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ quelconques ; prenons, dans (51) ,

$$\eta = (|\xi|^2+ \tau^2)^{-\frac{1}{2}}\xi \quad , \quad \sigma = (|\xi|^2 + \tau^2)^{-\frac{1}{2}}\tau .$$

On déduit aussitôt de (51) , par homogénéité,

$$(52) \qquad \varepsilon|P_m(\xi+i\tau f'(y))|^2+ 4 \tau Q(P'_m(\xi+i\tau f'(y))) \geqslant c''\tau(|\xi|^2+\tau^2)^{m-1} .$$

Nous avons choisi un nombre $\varepsilon \geqslant \frac{M}{\tau}$. Il suffit d'imposer à τ d'être suffisamment grand pour obtenir, à partir de (52) ,

$$(53) \qquad \varepsilon|P(\xi+i\tau f'(y))|^2 + 4\tau Q(P'(\xi+i\tau f'(y))) \geqslant c''\tau(|\xi|^2+\tau^2)^{m-1} \quad .$$

Nous allons maintenant choisir la forme hermitienne $(\lambda_{p,q})$ qui intervient dans (33) ; ici encore elle sera indépendante de $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ et de y^0 dans $\mathcal{B}$. Nous prendrons $\lambda_{p,q} = 0$ si $|p|$, $|q| \leqslant 1$, $|p| \neq |q|$. Soit K une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, réelle, définie positive (ou bien son extension hermitienne à $\mathbb{C}^n$). Nous choisirons

$$\lambda_{0,0} = \varepsilon \quad , \quad \lambda^{(1)} = 4Q - \sqrt{\varepsilon}\, K \, ,$$

en notant $\lambda^{(1)}$ la restriction de λ aux tenseurs homogènes de degré un. Il existe $\tau_0 > 0$, suffisamment grand, et $\varepsilon \geqslant M/\tau_0$ suffisamment petit pour pouvoir déduire de (53) ,

$$(54) \qquad \lambda_{0,0}|P(\xi+i\tau f'(y))|^2 + \tau\lambda^{(1)}(P(\xi+i\tau f'(y))) \geqslant c_3\tau(|\xi|^2+\tau^2)^{m-1} \quad .$$

Supposons, pour simplifier, que l'on ait

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2K(y)} dy = 1 \quad .$$

Si l'on se reporte à la définition (37) , on voit que l'on aura

$$T_{0,0}(\lambda,K,Q) = \overline{\lambda}_{0,0} = \varepsilon \quad , \quad T_{p,q}(\lambda,K,Q) = \overline{\lambda}_{p,q} + \mu_{p,q}\varepsilon \quad ,$$

si $0 < |p+q|$, $|p|$, $|q| \leqslant 1$; les nombres $\mu_{p,q}$ ne dépendent que de Q, K, p, q . Il existera donc une constante $M_1 > 0$ telle que l'on ait pour tout tenseur θ ,

$$\sum_{|p|,|q|\leqslant 1} T_{p,q}(\lambda,K,Q)\theta_p\bar{\theta}_q \leqslant \sum_{|p|,|q|\leqslant 1} \lambda_{p,q}\theta_p\theta_q + M_1\varepsilon \sum_{|p|\leqslant 1} |\theta_p|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{d\leqslant 1} \frac{4^d}{d!} Q^{(d)}(\theta) - (1-M_1\varepsilon)|\theta_0|^2 - (M_0-\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} \sum_{|p|=1} |\theta_p|^2 \ .$$

Nous avons posé $M_0 = \inf_{|x|=1} K(x)$. On détermine ensuite, par récurrence sur p et sur q , les nombres $\lambda_{p,q}$ de manière à avoir

$$T_{p,q}(\lambda,K,Q) = 0 \quad \text{si} \quad \inf(|p| \ , \ |q|) \leqslant 1 \quad , \quad \sup\,(|p| \ , \ |q|) > 1 \quad ,$$

$$\sum_{|p|,|q|>1} T_{p,q}(\lambda,K,Q)\theta_p\bar{\theta}_q < -M_2 \sum_{|p|>1} |\theta_p|^2 \quad ,$$

où M_2 est un nombre > 0 aussi grand que l'on voudra. On choisira $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et M_2 suffisamment grand de manière à avoir (36) avec $c_0 = \sqrt{\varepsilon}/2$. On choisira d'autre part $\tau_0 > 0$ suffisamment grand de manière à avoir (33) . Ces choix sont rendus possibles par (54) .

BIBLIOGRAPHIE

Charles M. HARVEY

[1]. Domination estimates and global existence for linear partial differential operators with variable coefficients, Thesis, Stanford University.

Lars HÖRMANDER

[1]. On the uniqueness of the Cauchy problem, I

[2]. On the uniqueness of the Cauchy problem, II, Math. Scand. 6, 213-225 (1958); 7, 177-190 (1959).

[3]. Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin 1963.

François TRÈVES

[1]. Relations de domination entre opérateurs différentiels, Acta Math. 101, 1-139 (1959).

[2]. Cours sur les équations aux dérivées partielles linéaires, Université de Paris 1965-66.

[3]. Linear partial differential equations with constant coefficients, Gordon and Breach, New-York 1966.