Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Robert Finn

Relations entre les propriétés métriques, topologiques et conformes d'une surface ouverte et complète

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1965-1966), p. 43-49
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966___1_43_0>

RELATIONS ENTRE LES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES, TOPOLOGIQUES ET CONFORMES D'UNE SURFACE OUVERTE ET COMPLÈTE

par

Robert FINN

1. Introduction. Je considère pour commencer une surface fermée arbitraire S située dans un espace euclidien à 3 dimensions. Je suppose que la surface S est topologiquement une sphère à laquelle on a ajouté un nombre fini d'anses.

Soit k la courbure totale en un point S et χ la caractéristique d'Euler. Soit $\mathcal{C}$ l'intégrale de k étendue à S :

$$\mathcal{C} = \iint_S k d\sigma .$$

D'après le théorème classique de Gauss-Bonnet, on a toujours la relation

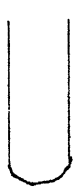
$$\mathcal{C} = 2 \pi \chi . \tag{1}$$

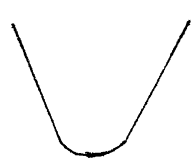
Cette relation met en évidence une connexion étroite entre les propriétés topologiques et les propriétés métriques d'une surface fermée.

Que se passe-t-il si S n'est pas fermée ?

On s'aperçoit tout d'abord que si S est une surface à bords le théorème est faux. Mais il existe une classe assez intéressante de surfaces intermédiaires entre les deux cas cités ; ce sont les surfaces complètes qui furent introduites par Hopf-Rinow (1931). Une surface S est complète au sens de Hopf-Rinow si chaque courbe sur S qui s'étend jusqu'à la frontière idéale est d'une longueur infiniment grande.

Exemples :

(a) 

(b) 

Pour ces deux surfaces on obtient les résultats :

a) $\mathscr{C} = 2\pi$, $\chi = 1$; alors $\mathscr{C} = 2\pi\chi$

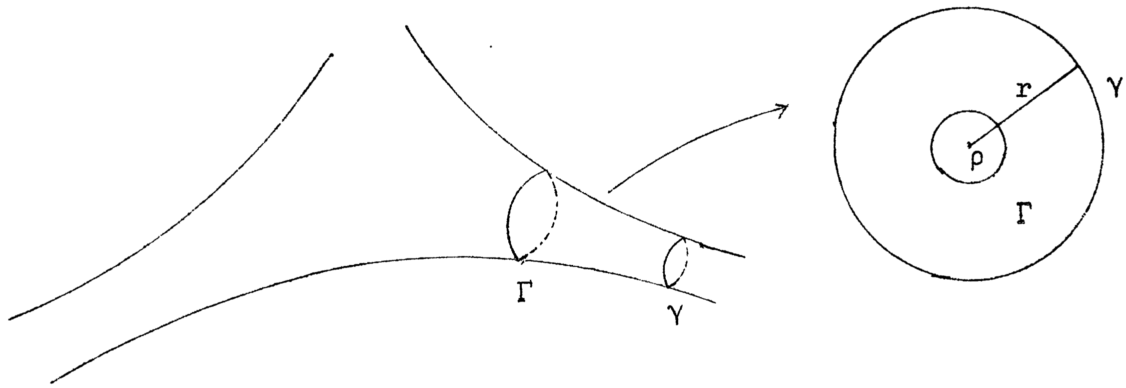
b) $\mathscr{C} < 2\pi$, $\chi = 1$; alors $\mathscr{C} < 2\pi\chi$.

Le théorème n'est donc plus vrai ; mais on peut le remplacer par un autre théorème dû à Cohn-Vossen (1935). Dans un travail profond, Cohn-Vossen démontra que si l'on ajoute certaines hypothèses raisonnables sur le comportement de S à l'infini, on aura toujours l'inégalité

$$\mathscr{C} < 2\pi\chi . \tag{2}$$

M. A. Huber a précisé la démonstration et exposé quelques résultats importants supplémentaires dans un travail paru en 1954.

2. Je voudrais maintenant montrer qu'en ajoutant quelques quantités, que les caractéristiques géométriques de toutes les surfaces complètes permettent d'obtenir, on peut remplacer (2) par une égalité exacte. Pour fixer les idées je considère d'abord un cas particulier ; c'est celui d'une surface avec un nombre fini de branches qui est à l'infini une surface de révolution.



Représentons conformément la région annulaire comprise entre Γ et γ sur un domaine $\mathfrak{D}$ limité par deux cercles concentriques. La première forme fondamentale de S nous est donnée par l'expression

$$ds^2 = e^{2u(z)}|dz|^2 .$$

D'après le théorème célèbre de Gauss on sait que

$$\Delta u(z) = -K\, e^{2u(z)}.$$

La courbure intégrale entre Γ et γ est alors

$$\mathscr{C}(\Gamma\ ;\ \gamma) = -\iint_{\mathfrak{D}} \Delta u |dz|^2.$$

En raison de la symétrie, on peut intégrer explicitement cette expression :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\Gamma;\gamma) &= -2\pi[-\rho\, u_\rho + r\, u_r] \\ &= -2\pi[\Phi_\Gamma + \Phi_\gamma]\end{aligned}$$

où r et ρ sont respectivement les rayons des deux cercles concentriques γ et Γ.

Or Φ_Γ ne dépend pas de r. Donc, si $\mathscr{C}(\Gamma;\gamma)$ tend vers une limite $\mathscr{C}_\Gamma$ lorsque $\gamma \to \infty$, il s'ensuivra que $\Phi_\gamma \to \Phi$. On peut écrire cette relation sous la forme

$$r\, u_r = \Phi + o(1),$$

ce qui nous donne une estimation asymptotique pour $u = u(r)$ et nous conduit, en supposant S complète, à l'inégalité

$$\Phi \geqslant -1 .$$

Considérons alors la longueur

$$\mathfrak{L}(\gamma) = \oint_\gamma e^u|dz| = 2\pi\, r\, e^{u(r)}$$

et l'aire

$$\mathcal{A}(\Gamma;\gamma) = \iint_{\mathcal{D}} e^{2u}\, dx\, dy = 2\pi \int_{\rho}^{r} \tau\, e^{2u}\, d\tau \ .$$

Ce sont des équations paramétriques en fonction de r d'où l'on déduit facilement

$$(3) \qquad \frac{d\mathcal{L}^2}{d\mathcal{A}} = 4\pi[1 + \Phi + o(1)].$$

Nous avons déjà constaté que $\Phi > -1$. Si $\Phi > -1$, on en déduit que $\mathcal{A} \to \infty$ puis, grâce à (3), que $\mathcal{L} \to \infty$. En employant alors le théorème de L'Hopital on voit que la limite

$$(4) \qquad \lim_{\gamma \to \infty} \frac{\mathcal{L}^2(\gamma)}{4\pi\mathcal{A}(\Gamma;\gamma)} = 1 + \Phi = \nu$$

existe dès que $\mathscr{C}_\Gamma$ existe au sens de la valeur principale de Cauchy.

Si $\Phi = -1$ on démontre le même résultat en employant une méthode un peu différente.

Nous avons, pour chaque branche de S, la relation

$$\mathscr{C}_\Gamma = -2\pi[\Phi_\Gamma + \Phi] \ .$$

En additionnant les valeurs de ν sur toutes les branches de S on trouve

$$\Sigma\nu = \Sigma(1 + \Phi) = -\frac{1}{2\pi}\Sigma\,\mathscr{C}_\Gamma + \Sigma(1 - \Phi_\Gamma) \ ,$$

et d'après le théorème le théorème classique de Gauss-Bonnet

$$\Sigma(1 - \Phi_\Gamma) = -\frac{1}{2\pi}\,\mathscr{C}^{*}_{\Gamma} + \chi \ ,$$

où $\overset{*}{\Gamma}$ est la courbure intégrale de la partie de S limitée par les courbes Γ et où χ est la caractéristique d'Euler. Or $\mathscr{C}^{*}_{\Gamma} + \Sigma\,\mathscr{C}_\Gamma = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est la courbure intégrale de la surface entière. Nous avons donc démontré le

THÉORÈME : $$\mathscr{C} = 2\pi(\chi - \Sigma\nu) \quad .$$

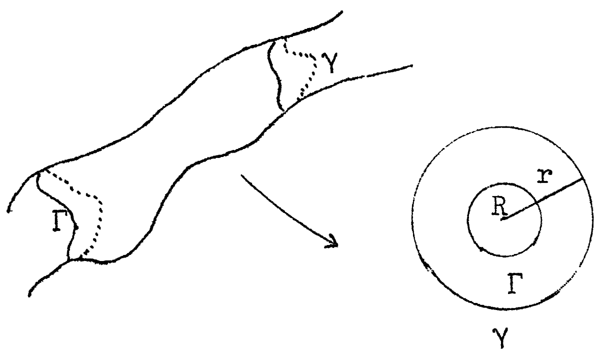
3. Ce résultat a été établi dans le cas où S est une surface de révolution à l'infini. Si cela n'est pas, je suppose

a) $\iint_S |K| d\sigma < \infty$

b) S complète.

Ces hypothèses entraînent - d'après un théorème de A. Huber - que χ est fini.

Considérons encore une branche de S. Il s'agit de définir les quantités ν.



Soit Γ une courbe fermée autour d'une branche de S. On représente conformément la partie de S située à l'extérieur de Γ sur une région plane annulaire ; en raison des hypothèses a) et b) il s'ensuit que cette partie de S est conformément parabolique, c'est-à-dire que son image est l'extérieur entier $\mathcal{E}$ d'un cercle. Considérons maintenant un cercle γ concentrique à Γ. Son image réciproque sur S est une courbe γ fermée autour de la même branche de S. On peut alors considérer les quantités $\mathcal{L}(\gamma)$ et $\mathcal{A}(\Gamma;\gamma)$; ce sont celles dont nous avons besoin.

On cherche tout d'abord des formules asymptotiques pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$. Il est commode d'introduire la mesure

$$\mu(\mathfrak{D}) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{D}} \Delta u \, dx \, dy.$$

On a toujours

$$(5) \qquad u(z) = \iint_{\mathcal{E}} \log \left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu_\zeta + h(z)$$

où $\Delta h(z) \equiv 0$ dans $\mathcal{E}$. L'idée principale est la suivante :

En raison de a) et b), la fonction harmonique $h(z)$ est de la forme

$$(6) \qquad h(z) = A \log |z| + h_0(z)$$

où A est une constante et où h_0 est harmonique à l'infini. J'ai réussi à démontrer cette représentation sous une hypothèse supplémentaire. Mais cela reste vrai en supposant seulement a) et b) : A. Huber l'a démontré dans un travail assez profond qui paraîtra prochainement.

En partant de (5) et (6) et en employant des méthodes générales de la théorie du potentiel, on arrive à des représentations asymptotiques pour $\mathcal{L}(\gamma)$ et $\mathcal{A}(\Gamma;\gamma)$ qui me semblent avoir un intérêt indépendant. On trouve :

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(\gamma) = 2\pi\, e^{u_0}\, r e^{Q(R;r)} [1 + o(1)] \\ \\ \mathcal{A}(\Gamma;\gamma) = 2\pi\, e^{2u_0} \int_R^r \rho\, e^{2Q(R;r)} d\rho\, [1 + o(1)] \qquad \text{pour } R \text{ et } r \to \infty \end{cases}$$

et où

$$u_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \oint_{\Gamma_0} e^{u(z)} ds \ ; \ Q(R;r) = \int_R^r \frac{\mu(R;\rho) - \Phi_0}{\rho}\, d\rho$$

avec

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \ ,$$

R et r étant respectivement les rayons des cercles Γ et γ.

On a toujours $Q(R;r) = [\Phi_0 + o(1)] \log r$ pour $r \to \infty$.

De (7) on déduit facilement l'existence de la limite

$$\nu = \lim_{r \to \infty} \frac{\mathcal{L}^2(r)}{4\pi \mathcal{A}(R;r)} = 1 + \Phi$$

et on trouve, comme auparavant, la relation

$$\mathcal{C} = 2\pi(\chi - \Sigma\nu)$$

pour toute surface S remplissant les conditions a) et b).

Je voudrais, pour terminer, remarquer que la même méthode nous conduit à des estimations asymptotiques pour des déformations dans la représentation conforme de S sur un plan. En ajoutant des hypothèses supplémentaires, on obtient des résultats assez précis.