SÉMINAIRE JEAN LERAY.
SUR LES ÉQUATIONS AUX
DÉRIVÉES PARTIELLES

ROBERT FINN

Sur le comportement d'une surface minima et d'une surface à courbure moyenne constante

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1965-1966), p. 35-42
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966___1_35_0>

SUR LE COMPORTEMENT D'UNE SURFACE MINIMA ET D'UNE SURFACE A COURBURE MOYENNE CONSTANTE

par

Robert FINN

1. Introduction. Presque tous les travaux[1] consacrés à la théorie des équations elliptiques

$$(1) \qquad a \ \varphi_{xx} + 2b\, \varphi_{xy} + c\, \varphi_{yy} = 0$$

emploient une hypothèse d'ellipticité uniforme, c'est-à-dire, si l'on normalise les coefficients afin que

$$(2) \qquad ac - b^2 \equiv 1 \ ,$$

que l'on demande en outre

$$(3) \qquad |a + c| < K < \infty$$

pour toutes les solutions qui peuvent intervenir. Mais il y a des équations (1) que l'on rencontre assez souvent en mécanique et en géométrie pour lesquelles, en raison de la non-linéarité des équations, l'inégalité (3) - et la théorie correspondante - n'est pas valable ! Parmi elles, on rencontre l'équation des surfaces minima :

$$(4) \qquad \frac{1+q^2}{w}\, \varphi_{xx} - 2\, \frac{pq}{w}\, \varphi_{xy} + \frac{1+p^2}{w}\, \varphi_{yy} = 0$$

où

$$p = \varphi_x \ , \ q = \varphi_y \ , \ w^2 = 1+p^2+q^2 \ .$$

Je voudrais indiquer dans cet exposé deux principes de maximum dans le cadre de l'équation (4). Ces principes ne sont pas valables pour les équations qui satisfont (3) mais ils sont cependant assez efficaces pour mettre en évi-

1. Il existe toutefois des exceptions notables dans des travaux de MM. Bernstein et Leray. L'idée principale de la première partie de cet exposé se retrouve dans des travaux antérieurs de MM. Bernstein et Leray. M. Leray est arrivé lui-même à des résultats assez généraux, dans un esprit quelque peu différent du mien.

dence certaines propriétés qualitatives des solutions de (4) et de quelques autres équations non linéaires.

Je vais essayer d'exposer ces idées au moyen de quelques applications particulières.

2. THÉORÈME 1. Soit $\varphi(x,y)$ une solution de (4) dans la région annulaire $\Delta : a \leqslant r \leqslant b$. Soient $m \leqslant \varphi \leqslant M$ sur $r = b$. Il s'ensuit que

$$a[\mathrm{Ch}^{-1}\frac{r}{a} - \mathrm{Ch}^{-1}\frac{b}{a}] + m \leqslant \varphi(x,y) \leqslant a[-\mathrm{Ch}^{-1}\frac{r}{a} + \mathrm{Ch}^{-1}\frac{b}{a}] + M \,. \tag{5}$$

Alors, si l'égalité a lieu en un point particulier, elle a lieu identiquement dans Δ.

J'attire votre attention sur le caractère particulier de ce théorème : la valeur des données sur une partie seulement de la frontière nous donne une borne de la solution dans le domaine entier. Cette propriété n'est évidemment pas valable dans le cas des équations uniformément elliptiques.

La démonstration est simple : on remarque que la fonction $\varphi^o(x,y) = a\mathrm{Ch}^{-1}\frac{r}{a} + \mathrm{cte}$ est définie sur Δ et possède les propriétés suivantes :

a) φ^o est continue sur Δ

b) $\frac{d\varphi^o}{dr} = \infty$ sur $r = a$

c) φ^o est une solution de (4) si $r > a$.

Géométriquement, φ^o représente une branche de catenoïde si $r \geqslant a$.

LEMME. Soit $\varphi(x,y) \geqslant \varphi^o(x,y)$ sur $r = b$. Alors, ou bien $\varphi > \varphi^o$ sur $r = a$, ou bien $\varphi \equiv \varphi^o$.

Supposons le contraire et soit $\mu = \underset{r=a}{\mathrm{Max}} (\varphi^o - \varphi) \geq 0$. Soit $\hat{\varphi} = \varphi + \mu$. Alors $\hat{\varphi} \geq 0$ sur $r = b$ et sur $r = a$. De plus, il existe au moins un point p sur $r = a$ où l'on a $\hat{\varphi}(p) = \varphi^o(p)$. Mais $\frac{d\varphi^o}{dr} = \infty$ et $\frac{d\hat{\varphi}}{dr} < \infty \Rightarrow \exists q$, $a < r_q < b$, tel que $\hat{\varphi}(q) < \varphi^o(q)$.

Cette inégalité se trouve en contradiction avec le principe du maximum classique ; le lemme est démontré.

Le théorème s'ensuit facilement par l'adjonction d'une constante appropriée.

COROLLAIRE 1. <u>Soit</u> $\varphi(x,y)$ <u>solution dans</u> $0 < r \leq b$. <u>Alors</u>

$$m \leq \underset{r \to 0}{\underline{\lim}}\, \varphi(x,y) \leq \underset{r \to 0}{\overline{\lim}}\, \varphi(x,y) \leq M .$$

<u>Démonstration</u>. On fixe r et on fait tendre a vers 0 dans (5).

COROLLAIRE 2. <u>Une solution</u> $\varphi(x,y)$ <u>de</u> (4) <u>n'admet pas de points singuliers isolés</u>.

<u>Remarque</u>. Ce théorème est bien connu mais la démonstration suivante est particulièrement simple et le résultat apparaît comme étant un cas particulier d'un résultat plus général.

<u>Démonstration</u>. Soient φ une solution de (4) dans $0 < r \leq b$ et $\hat{\varphi}$ solution dans $0 \leq r \leq b$ telle que $\hat{\varphi} = \varphi$ sur $r = b$. On peut écrire (4) sous la forme $(\frac{p}{w})_x + (\frac{q}{w})_y = 0$.

Posons $\theta = \frac{p}{w}$ et $\Lambda = \frac{q}{w}$. On a l'identité

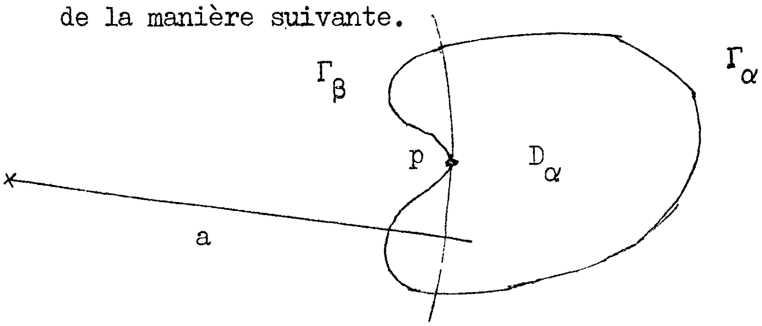
$$(6) \qquad \iint [\delta u\ \delta\theta + \delta v\ \delta\Lambda]dx\ dy = \oint_{r=a} \delta\varphi[\delta\theta\ dy - \delta\Lambda\ dx].$$

En raison du corollaire 1 on a $|\delta\varphi| < M$. Mais $\theta^2 + \Lambda^2 < 1$ et $\delta\theta^2 + \delta\Lambda^2 < 4$; alors l'intégrale du second membre tend vers 0 lorsque $a \to 0$. On constate facilement que l'intégrale du premier membre est strictement positive si $\delta u^2 + \delta v^2 > 0$. Il s'ensuit que $\delta u^2 + \delta v^2 \equiv 0$ et puisque $\varphi = \hat{\varphi}$ sur $r = b$ on a donc $\varphi \equiv \hat{\varphi}$. C.Q.F.D.

THÉORÈME 2. Soit D une région bornée, Γ sa frontière. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Dirichlet soit résoluble pour chaque choix des données continues sur Γ est que Γ soit convexe.

Démonstration. Si Γ est convexe, on démontre un théorème d'existence en utilisant une autre méthode dont je ne parlerai pas ici.

Je suppose que Γ n'est pas convexe. Il existe alors un point p sur Γ et un cercle passant par p qui divise Γ en deux parties Γ_α et Γ_β . de la manière suivante.



En utilisant le raisonnement précédent nous constatons que les valeurs de φ dans D_α sont bornées par un nombre M indépendant des valeurs sur Γ_β .

Dès que $\varphi^*(p) > M$, la solution n'existe pas.

THÉORÈME 3. Soient Γ un arc jordanien et $\varphi(x,y)$ une solution dans un voisinage situé d'un seul côté de Γ. Si $\varphi(x,y) \to \infty$ lorsque $(x,y) \to \Gamma$, alors Γ est une droite.

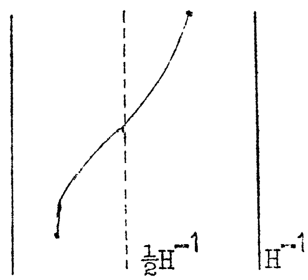
L'intérêt de ce théorème provient, en particulier, du fait que si Γ est une droite les solutions de ce genre existent et se laissent écrire explicitement.

Le comportement de ces solutions est ainsi très différent de celui des solutions des équations uniformément elliptiques.

3. On peut appliquer la même méthode à d'autres problèmes en considérant des équations à coefficients plus généraux ayant des propriétés de non-linéarité semblables. Un autre problème me semble avoir un intérêt particulier ; c'est celui de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante $= H$:

$$\theta_x + \Lambda_y = 2H .$$

On trouve alors la solution particulière représentée :



La considération de cette solution nous conduit au théorème suivant :

THÉORÈME 4. <u>Soit</u> $\varphi(x,y)$ <u>une solution quelconque dans</u> $x^2 + y^2 < H^{-2}$. <u>Alors</u> $\varphi^2 + x^2 + y^2 = H^2$. $\varphi(x,y)$ <u>représente un hémisphère.</u>

C'est la généralisation d'un théorème de S. Bernstein qui affirme que toute solution $\varphi(x,y)$ de (4) pour tout (x,y) représente un plan. Mais je n'ai pas réussi à démontrer ces deux théorèmes par la même méthode.

4. Je voudrais maintenant introduire un autre principe d'extremum qui nous conduira à une majoration des dérivées des solutions.

On considère le problème dont les données sont

$$\begin{cases} \varphi = M \,, & x^2 + y^2 = 1 \,, \quad x > 0 \\ \varphi = -M \,, & x^2 + y^2 = 1 \,, \quad x < 0 \,. \end{cases}$$

On peut démontrer qu'une solution φ^o existe, qu'elle est unique et qu'elle est telle que le théorème suivant soit vérifié :

THÉORÈME 5. <u>Soit</u> $\varphi(x,y)$ <u>une solution dans</u> $x^2 + y^2 < 1$, <u>telle que</u> $|\varphi| < M$, $\varphi(0 = 0$. <u>Alors</u> $|\nabla \ \varphi(0)\varphi| \leq |\nabla \varphi^o(0)|$.

Ce théorème dépend essentiellement de la non-linéarité particulière de l'équation. Il n'est pas vrai en général pour les équations linéaires ou quasilinéaires elliptiques. Mais il est vrai dans le cadre de l'équation (4) et il nous conduit à l'estimation suivante :

Soit $\varphi(x,y)$ solution de (4) dans $r < 1$, avec $|\varphi| < M$; alors

$$|\nabla\varphi(0)| < \tfrac{1}{2} \exp \tfrac{\pi}{2}M + M \exp\left(-\tfrac{\pi}{2}M\right). \tag{7}$$

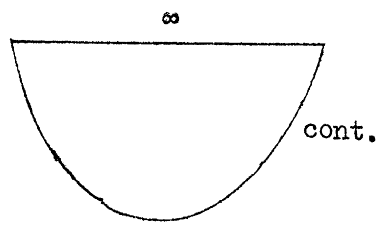
Le terme $\frac{\pi}{2}M$ est le meilleur possible ; on a en effet pour φ^o

$$|\nabla\varphi^o(0)| > 0{,}326 \exp \tfrac{\pi}{2}M \qquad \text{lorsque} \quad M \to \infty \,.$$

Il ne faut pas demander à φ d'être borné des deux côtés. Si l'on sait seulement que $\varphi(x,y) > 0$ on en déduit en effet l'estimation

$$|\nabla \varphi(0)| < \exp \tfrac{\pi}{2} \varphi(0) + \varphi(0) \exp\left(- \tfrac{\pi}{2} \varphi(0)\right). \tag{8}$$

En employant (8) on peut résoudre des problèmes dont les données prennent des valeurs ∞ sur des parties droites de la frontière.



Les recherches ont été poursuivies assez loin dans cette direction par H. Jenkins et J. Serrin qui ont établi de nombreux résultats intéressants. Ils ont toutefois employé des méthodes différentes pour obtenir certains résultats dont j'ai déjà parlé.

Je voudrais vous citer en manière de conclusion un résultat que j'ai établi en collaboration avec M. Osserman :

Il existe une fonction $g(\tau)$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$, munie des propriétés suivantes :

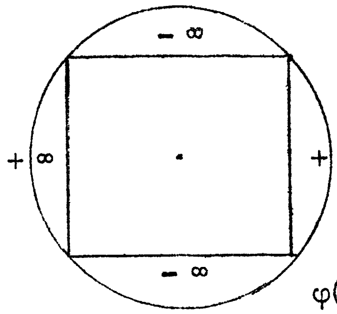
a) $g(1) = \frac{\pi^2}{2} = \lim\limits_{\tau \to \infty} g(\tau)$; $g(\tau) < \frac{1}{2}(\pi^2 + \frac{1}{\pi^2})$

b) Soit $\varphi(x,y)$ solution de (4) dans $x^2 + y^2 < R^2$ et K la courbure totale ; posons $w_0^2 = (1 + p^2 + q^2)_0$. Alors

$$|K(0)| < \frac{g(w_0)}{R^2} . \tag{9}$$

Ce qui est intéressant et nouveau dans ce résultat c'est que si $w = 1$, (9) est une inégalité forte et précise. Autrement dit $g(w_0)$ ne se laisse pas améliorer ; mais il n'existe aucune surface pour laquelle l'égalité ait lieu.

Une suite extrêmale normalisée tend vers une surface définie dans un carré inscrit avec les valeurs $\pm\infty$ à la frontière. C'est la surface minima de Sherck :



$$\varphi(x,y) = \log \cos \frac{2y}{\pi} - \log \cos \frac{2x}{\pi} .$$