Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Enrico Magenes

Espaces de fonctions et de distributions vectorielles du type de Gevrey et équations différentielles

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1965-1966), p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966___1_1_0>

ESPACES DE FONCTIONS ET DE DISTRIBUTIONS VECTORIELLES DU TYPE DE GEVREY ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par

M. Enrico MAGENES*

Introduction.

Les classes de fonctions de Gevrey qui ont été introduites par Gevrey [4] et Holmgren [6] depuis longtemps, entrent maintenant dans beaucoup de questions sur les équations aux dérivées partielles, surtout dans l'étude des propriétés générales des solutions des équations linéaires hypoelliptiques (cf. par ex. le livre de Hörmander [7]) et dans la résolution du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques linéaires et non linéaires (cf. par ex. Leray-Ohya [9] et Talenti [23], [24]).

On peut dire aussi qu'elles jouent un rôle important même dans les problèmes aux limites, bien que jusqu'à ces jours elles aient été moins utilisées dans ces problèmes.

Le but des exposés que je donnerai ici est précisément de faire connaître les résultats que M. Lions et moi-même nous avons obtenus sur les problèmes aux limites pour certaines équations d'évolution.

Il est bien naturel dans ce cas de se placer dans des classes de fonctions ou plus généralement de "distributions" du type de Gevrey en la variable de temps et à valeurs dans certains espaces vectoriels topologiques en les variables d'espace.

*) Leçons professées au Collège de France en mars 1965.

Il faudra donc d'abord étudier ces classes de Gevrey à valeurs vectorielles ; on le fera dans le § 1.

Dans le § 2 on obtiendra des résultats de régularité, dans des espaces de fonctions de Gevrey pour <u>les équations paraboliques</u>, soit dans le cas "abstrait", c'est-à-dire pour l'équation opérationnelle

$$A(t)u(t) + \frac{du}{dt} = f(t),$$

soit dans le cas "concret" des équations paraboliques "du type de la chaleur"

$$A(t,x, \frac{\partial}{\partial x})u + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)$$

dans un cylindre.

Par <u>transposition</u> on en déduira (§ 3) des résultats assez généraux pour les problèmes aux limites non homogènes dans des espaces de "distributions de Gevrey".

Enfin le § 4 sera consacré à l'extension de la théorie aux <u>équations du type de Schroedinger et du deuxième ordre en</u> t, soit dans le cas abstrait, soit dans le cas concret. Des nouveaux problèmes, qui nous semblent intéressants se poseront à ce propos.

Les résultats des § 1, 2 et 3 se trouvent dans un travail [14] à paraître dans les Annali di Mat. pura e applic., auquel nous renvoyons pour les détails et les démonstrations. Les résultats du § 4 sont annoncés ici pour la première fois.

§ 1. <u>Espaces de fonctions et des distributions vectorielles du type de Gevrey</u>.

1. <u>Préliminaires</u>.

On va se placer dans un cadre plus général que celui des classes de Gevrey proprement dites, en s'inspirant des classes de fonctions non quasi-analytiques de Mandelbrojt [16] ; on étendra au cas "vectoriel" certains des résultats de Roumieu [18] relatifs au cas scalaire.

Soit X <u>un espace vectoriel topologique localement convexe séparé</u>. On désigne par $\mathcal{D}(X)$ (resp. $\mathcal{E}(X), \mathcal{D}_+(X), \mathcal{D}_-(X)$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur la droite $\underline{\underline{R}}$, à valeurs dans X, à support compact (resp. quelconque, limité à gauche, limité à droite), ces espaces étant munis des topologies de L. Schwartz [20].

On donne une suite $\{M_k\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ de nombres réels positifs satisfaisant aux conditions suivantes :

(1.1) $$M_k^2 \leqslant M_{k-1} M_{k+1} \qquad \forall\, k$$

(1.2) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} < +\infty$$

(1.3) $$\begin{cases} \text{il existe une constante } H \text{ telle que} \\ M_{k+1} < H^k M_k \qquad \forall\, k \;. \end{cases}$$

Les deux premières conditions signifient [16] que la suite est <u>logarithmique-convexe</u> et non <u>quasi-analytique</u>. Les suites (de type de Gevrey) $M_k = (k!)^d$, avec d réel > 1, satisfont à (1.1), (1.2), (1.3).

2. <u>Espace</u> $\mathcal{D}_{M_k}(X)$.

On définit algébriquement l'espace $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ comme l'espace des fonctions $\Phi : t \to \Phi(t)$, définies dans $\underline{\underline{R}}$ et à valeurs dans X, telles que

(1.4) $$\Phi \in \mathcal{D}(X)$$

(1.5) $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{il existe un nombre}}\ L \geq 1\ \underline{\text{et un borné}}\ \mathcal{B}\ \underline{\text{de}}\ X \\ (\underline{\text{dépendants de}}\ \Phi\ )\ \underline{\text{tels que}} \\ \qquad \dfrac{\Phi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in \mathcal{B} \qquad k = 0,1,\dots,\ t \in \underline{\underline{R}}\ . \end{array} \right.$

On définit la topologie sur $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ de la façon suivante. Soit $\{L_n\}$ une suite croissante tendant vers $+\infty$.

On désigne par $\mathcal{D}^{(n)}_{M_k}(X)$ le sous espace de $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ des Φ à support dans $[-n,n]$ et tels que (1,5) ait lieu avec $L = L_n$ fixé ; et sur $\mathcal{D}^{(n)}_{M_k}(X)$ un système fondamental de voisinages de l'origine est donné par

$$\mathcal{V} = \{\Phi \mid \frac{\Phi^{(k)}(t)}{L_n^k M_k} \in \mathcal{V}_X\ ,\ \forall\ k\ ,\ t \in [-n,n]\}$$

lorsqu'on fait parcourir à $\mathcal{V}_X$ un système fondamental de voisinages de l'origine dans X. La topologie sur $\mathcal{D}^{(n)}_{M_k}(X)$ étant ainsi définie, on <u>munit</u> $\mathcal{D}_{M_k}(X)$, <u>de la topologie de limite inductive des</u> $\mathcal{D}^{(n)}_{M_k}(X)$, puisque

$$\mathcal{D}_{M_k}(X) = \bigcup_n \mathcal{D}^{(n)}_{M_k}(X) \quad .$$

On voit facilement qu'elle ne dépend pas de la suite $\{L_n\}$ choisie.

3. <u>Espaces</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$ et $\mathcal{E}_{M_k}(X)$.

On introduit maintenant l'espace $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$ <u>des fonctions à support limité à gauche</u>.

Soient a, b, L fixés réels avec $a < b$, $L \geq 1$; on désigne par $\mathcal{D}^{a,b,L}_{+,M_k}(X)$ l'espace des fonctions $\Phi : t \to \Phi(t)$ (de $\underline{\underline{R}}$ dans X), tels que

(1.6) $\qquad \Phi \in \mathcal{E}(X)$

$$\Phi(t) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad t \leqslant a \tag{1.7}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{il existe un borné } \mathcal{B} \text{ de } X \text{ (dépendant de } \Phi \text{) tel que} \\ \dfrac{\Phi^{(k)}(t)}{L^k M_k} \in \mathcal{B} \qquad \forall\, t \in [a,b] \text{ et } \forall\, k. \end{array}\right. \tag{1.8}$$

On définit un système fondamental de voisinages de l'origine dans $\mathcal{D}^{a,b,L}_{+,M_k}(X)$ par

$$\mathcal{V} = \{\Phi \mid \Phi \in \mathcal{V}_{\mathcal{E}(X)}\ ,\ \frac{\Phi^{(k)}(t)}{L^k\ M_k} \in \mathcal{V}_X\ ,\ \forall\, k,\ \ \forall\, t \in [a,b]\ \} \tag{1.9}$$

lorsqu'on fait parcourir à $\mathcal{V}_{\mathcal{E}(X)}$ et à $\mathcal{V}_X$ un système fondamental de voisinages de l'origine respectivement dans $\mathcal{E}(X)$ et X.

On définit ensuite

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}^{a,b}_{+,M_k}(X) = \bigcup\limits_{L_n} \mathcal{D}^{a,b,L_n}_{+,M_k}(X) \\ \\ \{L_n\} \text{ suite quelconque croissante tendant vers } +\infty\text{, avec la} \\ \text{topologie de limite inductive ;} \end{array}\right. \tag{1.10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}^{a}_{+,M_k}(X) = \bigcap\limits_{b_n} \mathcal{D}^{a,b_n}_{+,M_k}(X) \\ \\ \{b_n\} \text{ suite quelconque croissante tendant vers } +\infty\text{, avec la} \\ \text{topologie de limite projective ;} \end{array}\right. \tag{1.11}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}_{+,M_k}(X) = \bigcup\limits_{a_n} \mathcal{D}^{a_n}_{+,M_k}(X) \\ \\ \{a_n\} \text{ suite quelconque décroissante tendant vers } -\infty\text{, avec la} \\ \text{topologie de limite inductive.} \end{array}\right. \tag{1.12}$$

De façon tout à fait analogue on définit l'espace $\mathcal{D}_{-,M_k}(X)$ des fonctions <u>à support limité à droite</u>.

Enfin on introduit l'espace $\mathcal{E}_{M_k}(X)$ <u>des fonctions à support quelconque</u>, en désignant par $\mathcal{E}_{M_k}^{a,b,L}(X)$ (a,b,L fixés avec $a < b$, $L \geqslant 1$) l'espace des $\varphi \in \mathcal{E}(X)$ telles qu'il existe un borné $\mathcal{B}$ de X tel que

$$\frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k\ M_k} \in \mathcal{B} \quad \forall\ k, \quad \forall\ t \in [a,b]\ ;$$

on introduit de façon analogue à (1.9) la topologie dans $\mathcal{E}_{M_k}^{a,b,L}(X)$, et on pose

$$\mathcal{E}_{M_k}(X) = \bigcap_{a_n, b_n} \left(\bigcup_{L_n} \mathcal{E}_{M_k}^{a_n, b_n, L_n}(X) \right)$$

où $L_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, $a_n \to -\infty$ et on prend les topologies de limite inductive pour $\bigcup_{L_n}$ et de limite projective pour $\bigcap_{a_n, b_n}$.

4. M_k-<u>distributions à valeurs vectorielles</u>

Supposons maintenant en plus que X soit <u>réflexif</u> et notons X' son dual fort. On pose

$$\mathcal{D}'_{M_k}(X) = (\mathcal{D}_{M_k}(X'))' \tag{1.13}$$

avec la topologie forte de dual. L'espace $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$ est, par définition, <u>l'espace des</u> M_k-<u>distributions</u> (ultra distributions) <u>à valeurs dans</u> X.

Sous les mêmes hypothèses on pose

$$\mathcal{D}'_{+,M_k}(X) = (\mathcal{D}_{-,M_k}(X'))' \quad (\text{resp. } \mathcal{D}'_{-,M_k}(X) = (\mathcal{D}_{+,M_k}(X'))') \tag{1.14}$$

avec la topologie forte de dual.

On peut démontrer (cf. [14], théor. 9.1, chap.1) que $\mathcal{D}'_{+,M_k}(X)$ <u>coïncide avec le sous-espace de $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$ des M_k-distributions à support limité à gauche</u>.

<u>Remarque</u> 1.1. A vrai dire, les définitions données ne sont pas les plus générales possibles ; par analogie avec [21], on pourrait par ex. appeler espaces des M_k-distributions à valeurs dans X l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{M_k}(\underline{\underline{C}});X)$ des applications linéaires continues de $\mathcal{D}_{M_k}(\underline{\underline{C}})$ dans X ; mais dans les applications que nous avons en vue, c'est la définition (1.13) qui est commode.

En tout cas on a :

$$\mathcal{D}'_{M_k}(X) \subset \mathcal{L}(\mathcal{D}_{M_k}(\underline{\underline{C}});X) \tag{1.15}$$

et il serait intéressant de donner des critères sur X permettant d'affirmer qu'il y a identité dans (1.15).

La dérivation et la multiplication par des fonctions scalaires de $\mathcal{E}_{M_k}(\underline{\underline{C}})$ se définissent dans $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$ comme dans les distributions de Schwartz [19], [21]

Ajoutons maintenant sur l'espace X l'hypothèse suivante

$$\mathcal{D}^{\circ}(X') \ \underline{\text{est tonnelé}}. \tag{1.16}$$

$\mathcal{D}^{\circ}(X')$ étant l'espace des fonctions continues sur $\underline{\underline{R}}$ à valeurs dans X' et à support compact.

On peut alors donner (cf. [14], chap.1) <u>des théorèmes de représentation des éléments de $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$ et de $\mathcal{D}'_{+,M_k}(X)$</u>. Nous nous bornerons ici à énoncer le résultat pour $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$.

THÉORÈME 1.1. <u>Toute $f \in \mathcal{D}'_{M_k}(X)$ peut se représenter, de façon non unique, sous la forme</u>

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} D^k \mu_k \tag{1.17}$$

où

(1.18) $\mu_k \in \mathcal{D}'^{o}(X) = \underline{\text{dual de}}\ \mathcal{D}^{o}(X')$,

(1.19) $\begin{cases} \underline{\text{quelle que soit la fonction}}\ \theta \in \mathcal{D}^{o}(\underline{\underline{C}})\ \underline{\text{et quel que soit}}\ L > 0, \\ \underline{\text{la série}}\ \sum_{k=0}^{\infty} L^k M_k \theta\mu_k\ \underline{\text{converge dans}}\ \mathcal{D}'^{o}(X) \end{cases}$

et où (1.17) signifie que

(1.20) $$\langle f, \Phi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \langle \mu_k, \Phi^{(k)} \rangle \quad \forall\ \Phi \in \mathcal{D}_{M_k}(X')$$

(les crochets au premier membre, resp. au second membre, désignant la dualité entre $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$ et $\mathcal{D}_{M_k}(X')$, resp. $\mathcal{D}'^{o}(X)$ et $\mathcal{D}^{o}(X')$).

Réciproquement toute f de la forme (1.17), avec (1.18) et (1.19) définit par (1.20) un élément de $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$.

Remarque 1.2. Dans les applications il est important de vérifier (1.16). Si X (et donc X') est un espace de Banach alors $\mathcal{D}^{o}(X')$ est tonnelé car il est limite inductive d'espaces de Banach. De même si $X = \mathcal{D}'(\Omega)$ (Ω ouvert de $\underline{\underline{R}}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, muni de la topologie de Schwartz [19], $\mathcal{D}'(\Omega)$ = dual fort de $\mathcal{D}(\Omega)$, espace des distributions scalaires dans Ω), alors $X' = \mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}^{o}(\mathcal{D}(\Omega))$ est tonnelé car on peut démontrer qu'il est limite inductive d'espaces $(\mathcal{F})$.

Mais il y a ici des questions ouvertes qui nous semblent intéressantes ; par exemple nous ne savons pas si $\mathcal{D}^{o}(\mathcal{H}(\Gamma))$ (resp. $\mathcal{D}^{o}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$) est tonnelé Γ étant la frontière d'un ouvert Ω borné de $\underline{\underline{R}}^n$, supposée variété analytique réelle de dimension $n-1$, et $\mathcal{H}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{H}(\bar{\Omega})$) étant l'espace des fonctions analytiques sur Γ (resp. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$)(cf. pour $\mathcal{H}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}(\bar{\Omega})$ par ex. [11], [8], [22]).

§ 2. Théorèmes de M_k-régularité pour équations de type parabolique.

1. Équations opérationnelles.

Soient V et H deux espaces de Hilbert, avec $V \subset H$, injection continue, V dense dans H ; pour $u,v \in V$ (resp. H) on désigne par $((u,v))$, $\|u\|$ (resp. (u,v), $|u|$) le produit scalaire et la norme dans V (resp. H).

On identifie H à son antidual et on désigne par V^* l'<u>antidual de</u> V ; comme V est dense dans H on a

$$V \subset H \subset V^* .$$

Si $v^* \in V^*$ et $v \in V$, (v^*,v) désignera la valeur de v^* au point v ; si $v^* \in H$, (v^*,v) coïncide avec le produit scalaire dans H ; enfin $\|v^*\|_*$ désigne la norme dans V^*.

On se donne pour tout $t \in \underline{\underline{R}}$ une forme

$$u,v \to a(t;u,v)$$

sur laquelle on suppose que

(2.1) <u>pour tout</u> $t \in \underline{\underline{R}}$, $a(t;u,v)$ <u>est sesquilinéaire et continue sur</u> V

(2.2) <u>pour tout</u> u <u>et</u> $v \in V$, $t \to a(t;u,v)$ <u>est indéfiniment différentiable sur</u> $\underline{\underline{R}}$

$$(2.3) \quad \begin{cases} \underline{\text{pour tout}}\ T\ \underline{\text{il existe}}\ \lambda_T\ \underline{\text{et}}\ \alpha_T\ \underline{\text{positifs tels que}} \\ \\ \operatorname{Re} a(t;v,v) + \lambda_T |v|^2 \geqslant \alpha_T \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V,\ \forall\, t \leqslant T . \end{cases}$$

La forme $v \to a(t;u,v)$, étant semilinéaire continue sur V pour chaque t et u fixés, peut s'écrire

$$(2.4) \qquad a(t;u,v) = (A(t)u,v) \qquad A(t)u \in V^*$$

ce qui définit $A(t) \in \mathcal{L}(V;V^*)$.

Sous les hypothèses précédentes on sait [10] que l'équation

$$(2.5) \qquad A(t)u + \frac{du}{dt} = f(t)$$

admet, pour chaque fonction $f(t)$ indéfiniment différentiable à valeurs dans V^* et à support limité à gauche, une et une seule solution $u(t)$ indéfiniment différentiable à valeurs dans V et à support limité à gauche ; plus précisément:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(t) + \frac{d}{dt} \ \underline{\text{est un isomorphisme (algébrique et topologique) de}} \ \mathcal{D}_+(V) \\ \underline{\text{sur}} \ \mathcal{D}_+(V^*) \ . \end{array} \right.$$

On se donne maintenant une suite $\{M_k\}$ comme au § 1 satisfaisant donc à (1.1), (1.2) et (1.3) ; et on suppose en outre que (cf. [3])

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{il existe une constante}} \ c_1 \ \underline{\text{telle que}} \\ \\ \binom{k}{j} M_{k-j} M_j \leqslant c_1 M_k \qquad \forall \ k, \ 0 \leqslant j \leqslant k \ . \end{array} \right.$$

On a alors le résultat suivant de M_k-régularité :

THÉORÈME 2.1. <u>Sous les hypothèses</u> (1.1), (1.2), (1.3), (2.7), (2.1), (2.2), <u>et</u> (2.3) <u>et si l'opérateur</u> $A(t \to A(t))$ <u>appartient à</u> $\mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{L}(V;V^*))$ <u>alors</u> $A(t) + \frac{d}{dt}$ <u>est un isomorphisme de</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ <u>sur</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(V^*)$.

Nous renvoyons pour la démonstration à [14] chap. 2, n.1 ; nous nous bornons à noter ici que l'on utilise la majoration suivante

$$(2.8) \qquad \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\alpha_b} \left(\int_a^b \|f(t)\|_*^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

qui est valable pour la solution u de (2.5) si $f \in \mathcal{D}_+(V^*)$, $f(t) = 0$ pour $t \leqslant a$, $b > a$, sous les seules hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3), avec $\lambda_b = 0$ (on peut se réduire à ce cas par un raisonnement usuel).

2. Équations aux dérivées partielles paraboliques ; résultats de régularité dans les espaces $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^s(\Omega))$.

On désigne par $x = (x_1, \dots, x_n)$ le point de $\underline{\underline{R}}^n$; par (x,t) le point de $\underline{\underline{R}}^{n+1} = \underline{\underline{R}}^n \times \underline{\underline{R}}$. On considère dans $\underline{\underline{R}}^n$ un ouvert Ω, borné dont la frontière Γ est supposée variété de dimension $n-1$, indéfiniment différentiable, Ω étant d'un seul côté de Γ ; on désigne par Q le cylindre de $\underline{\underline{R}}^{n+1}$, $Q = \Omega \times \underline{\underline{R}}$ et par $\Sigma = \Gamma \times \underline{\underline{R}}$ sa frontière.

Soit

$$A = A(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|p|,|q|\leqslant m} (-1)^{|p|} D_x^p(a_{pq}(x,t)D_x^q u) \tag{2.9}$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre $2m$, à coefficients définis dans $\bar{Q} = Q \cup \Sigma$, contenant seulement les dérivées D_x par rapport aux variables d'espace $x_1, \dots, x_n$.

On suppose A uniformément fortement elliptique dans chaque compact de $\bar{Q}$, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{pour chaque compact}}\ [t_0,t_1]\ \underline{\text{de}}\ \underline{\underline{R}}\ \underline{\text{il existe un}}\ \beta > 0\ , \\ \underline{\text{dépendant de}}\ [t_0,t_1]\ \underline{\text{tel que}} \\ \quad \operatorname{Re} \displaystyle\sum_{|p|,|q|= m} (-1)^{|p|}\, a_{pq}(x,t)\xi^{p+q} \geqslant \beta|\xi|^{2m} \quad \forall\ \xi\in\underline{\underline{R}}^n\ ,\ x\in\bar{\Omega}\ . \end{array}\right. \tag{2.10}$$

On considère le problème de Cauchy-Dirichlet :

$$\left\{\begin{array}{l} Au + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)\ \ \underline{\text{dans}}\ \ Q\ (f\ \underline{\text{donnée à support limité à gauche par rapport à}}\ t) \\ \gamma_j u = 0 \qquad \underline{\text{sur}}\ \Sigma\ ,\ \gamma_j = \dfrac{\partial^j}{\partial\nu^j}\ (\nu\ \underline{\text{normale à}}\ \Sigma) \\ u(x,t)\ \ \underline{\text{à support limité à gauche par rapport à}}\ \ t. \end{array}\right. \tag{2.11}$$

Soit $\{M_k\}$ une suite donnée avec (1.1), (1.2), (1.3) et (2.7). On voit alors qu'on peut utiliser le théorème 2.1, en posant

$$H = L^2(\Omega), \quad V = H_o^m(\Omega) \quad (\text{donc } V = H^{-m}(\Omega)) \ (^1)$$

$$a(t;u,v) = \sum_{|p|,|q|\leqslant m} \int_\Omega a_{pq}(x,t)\, D_x^q u\, \overline{D_x^p v}\, dx \quad .$$

Plus précisément on a :

THÉORÈME 2.2. <u>Sous les hypothèses</u> (1.1), (1.2), (1.3), (2.7), (2.10), <u>et si les coefficients</u> $a_{pq}(x,t)$ <u>satisfont à</u>

(2.12) $$a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{D}^{\,o}(\bar{\Omega})) \qquad (^2)$$

$A + \frac{\partial}{\partial t}$ <u>est un isomorphisme de</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(H_o^m(\Omega))$ <u>sur</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^{-m}(\Omega))$.

En utilisant les résultats de régularité bien connus sur les problèmes aux limites elliptiques dans les espaces $H^s(\Omega)$, on peut régulariser davantage par rapport aux variables x la solution de (2.11); plus précisément (cf. [14], chap. 2 théor. 3.1 pour la démonstration) on a le

THÉORÈME 2.3. <u>Sous les hypothèses</u> (1.1), (1.2), (1.3), (2.7), (2.10) <u>et si</u>

(2.13) $$a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{D}^{m+s}(\bar{\Omega})), \qquad s \text{ entier fixé} \geqslant -m \ ,$$

<u>alors</u>

$A + \frac{\partial}{\partial t}$ <u>est un isomorphisme de</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^{s+2m}(\Omega) \cap H_o^m(\Omega))$ <u>sur</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^s(\Omega))$.

---

(1) $L^2(\Omega)$ = espace hilbertien des (classes de) fonctions de carré sommable dans Ω ; $H^k(\Omega)$ (k entier $\geqslant 0$) = espace des u telles que $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour $|p| \leqslant k$; $H_o^k(\Omega)$ = adhérence dans $H^k(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$; $H^{-k}(\Omega)$ = dual fort de $H_o^k(\Omega)$.

(2) $\mathcal{D}^k(\bar{\Omega})$ (désigné aussi par $C^k(\bar{\Omega})$), k entier $\geqslant 0$, est l'espace de Banach des fonctions continues dans $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, avec les dérivées jusqu'à l'ordre k ; $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ (ou $C^\infty(\bar{\Omega})$) = espace de Freschet des fonctions indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$

Remarque 2.1. Une question qui se pose est la suivante : si $a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ est-ce que $A + \frac{\partial}{\partial t}$ est un isomorphisme de

$$\{u | u \in \mathfrak{D}_{+,M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega})),\ \gamma_j u = 0, j = 0,\ldots, m-1\}$$

sur $\mathfrak{D}_{+,M_k}(\mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$? Nous ne savons pas répondre même si les coefficients $a_{pq}(x,t)$ dépendent seulement des x , c'est-à-dire $a_{pq}(x,t) = a_{pq}(x) \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$.

3. Un résultat sur les opérateurs elliptiques ; application à la régularité des solutions des équations paraboliques dans les espaces $\mathfrak{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$.

Il est naturel, en étudiant la régularité de la solution du problème (2.11), de se poser la question suivante : Γ étant supposée variété analytique, la solution u est-elle de classe "de Gevrey" en t et analytique en x , si les donnés (a_{pq} et f) sont "de Gevrey" en t et analytiques en x ? En fait la réponse est affirmative comme nous le verrons dans ce numéro et dans le suivant.

La méthode que nous avons développée s'appuie sur un théorème relatif aux opérateurs elliptiques qui contient à la fois un théorème de Morrey-Nirenberg [17] et un autre de Kotake-Narasimhan [5] sur l'analyticité des solutions des équations elliptiques. Voici ce résultat :

THÉORÈME 2.4. Soit Ω un ouvert borné de $\underline{\underline{R}}^n$, dont la frontière Γ soit une variété analytique de dimension $n-1$; soit A un opérateur linéaire, à coefficients analytiques dans $\bar{\Omega}$, d'ordre $2m$, proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$. Désignons par A^k, $k = 0,1,2,\ldots,$ le k-ième itéré de A, ($A^0 u = u$). Alors, si $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ et s'il existe deux constantes L et c telles que pour tout entier k et i on ait

(2.14) $$\|A^k u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\, L^k (2mk)!$$

(2.15) $$\|\gamma_j(A^k u)\|_{H^{2m(1+i)-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant c\, L^{k+i+1}\, (2m(k+i+1))! \qquad j = 0,\ldots,m-1,\ ^{(3)}$$

<u>alors</u> u <u>est analytique dans</u> $\bar{\Omega}$ (<u>et vice-versa</u>).

La démonstration (cf. [14] chap. IV) utilise le même genre de technique dans Morrey-Nirenberg [17] et Kotake-Narasimhan [5].

Revenons maintenant au problème (2.11) et supposons que

(2.16) <u>la frontière</u> Γ <u>de</u> Ω <u>est une variété analytique de dimension</u> $n-1$.

(2.17) <u>les coefficients de l'opérateur</u> A <u>donné par</u> (2.9) <u>ne dépendent pas de</u> t <u>et sont analytiques en</u> x <u>dans</u> $\bar{\Omega}$; i.e. $a_{pq}(x) \in \mathcal{H}(\bar{\Omega})$;

(2.18) $$M_k = (2mk)!$$

On a alors le

THÉORÈME 2.5. <u>Sous les hypothèses</u> (2.10), (2.16), (2.17), (2.18), <u>si</u> $f \in \mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$ <u>la solution</u> u <u>du problème</u> (2.11) <u>appartient à</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$.

L'idée de la démonstration est la suivante (cf. pour les détails [14] n.5, chap. IV). On a par hypothèse

(2.19) $$Au = -u' + f$$

et alors si on dérive (2.19) par rapport à t (A ne dépend pas de t) et si on y applique l'opérateur A, on obtient

---

(3) $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est l'espace de Hilbert "des traces" des fonctions de $H^s(\Omega)$, $s \geqslant 1$.

$$(2.20) \qquad A^k u = (-1)^k u^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j-1} A^j(f^{(k-j-1)}) .$$

Mais grâce au théorème 2.2 $u \in \mathcal{D}_{+,M_k}(L^2(\Omega))$; et en outre $\gamma_j u = 0$, $j = 0,\dots,m-1$ et $f \in \mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$. On en déduit que pour chaque compact $[a,b]$ de $\underline{\underline{R}}$, avec a = limite inférieure en t du support de f, il existe c et L tels que u vérifie (2.14) et (2.15) pour tout $t \in [a,b]$. Donc $u(x,t)$ est analytique en x pour chaque t et il est facile de déduire plus précisément que $u \in \mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$.

Le théorème 2.5 donne donc une réponse affirmative à la question posée aux premières lignes de ce numéro, mais seulement dans le cas où les coefficients a_{pq} ne dépendent pas de x. En fait le théorème est vrai en général si, les hypothèses (2.10), (2.16) et (2.18) étant supposées valables, les coefficients $a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$; le résultat suit d'un intéressant théorème sur la régularité des solutions des équations quasi-elliptiques, qui a été trouvé, indépendamment du travail [14], par A. Cavallucci [2]. Nous donnerons le résultat de Cavallucci dans le n. suivant.

Comme nous le verrons dans le § 4, la méthode que nous avons suivie semble avoir l'avantage de pouvoir être utilisée même dans le cas d'opérateurs non hypoelliptiques, tels que l'opérateur de Schroedinger et certains opérateurs du deuxième ordre en t.

Remarque 2.2. Une question qui se pose en tout cas à propos du théor. 2.5 est la suivante : $A + \frac{\partial}{\partial t}$ est-il un isomorphisme de

$$\{\mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega})),\ \gamma_j u = 0,\ j = 0,\dots,m-1\}$$

sur $\mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$?

4. Un résultat de régularité pour les solutions des équations quasi-elliptiques.

Nous exposons dans ce numéro le théorème de Cavallucci [2]. Rappelons avant tout la définition de classe de Gevrey pour les fonctions de plusieurs variables.

DÉFINITION. Soit K un compact de $\underline{\underline{R}}^n$; on dit que u est dans la classe de Gevrey

$$\mathcal{G}^{(q_1,\ldots q_n)}(K),$$

q_i nombres réels > 0, si u est indéfiniment différentiable dans K et s'il existe deux constantes c et L (dépendant de u) telles que

$$\sup_{x\in K} |D^p u| \leqslant c\, L^{|p|}\Gamma(< p,q > +1) \qquad p = (p_1,\ldots,p_n) \tag{2.21}$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction d'Euler classique et $< q,p > = q_1p_1 + q_2p_2 +\ldots+ q_np_n$
On peut munir de façon évidente $\mathcal{G}^{(q_1,\ldots,q_n)}(K)$, d'une topologie de limite inductive d'espace de Banach.

Si $q_1 = q_2 =\ldots= q_n = s$ on écrira plus simplement $\mathcal{G}^s(K)$ au lieu de $\mathcal{G}^{(q_1,\ldots,q_n)}(K)$.

Désignons alors par Ω_R la demi-boule $\Omega_R = \{x|\ |x| < R, x_n = 0\}$ et par Γ_R l'ensemble $\{x|\ |x|\leqslant R,\ x_n = 0\}$; et soient $m_1,\ldots,m_n$ des entiers positifs fixés. Posons

$$M = \max\{m_1,\ldots,m_n\} \quad \text{et} \quad q_i = \frac{M}{m_i}\ .$$

Dans $\bar{\Omega}_{R_o}$, R_o fixé, on se donne un opérateur différentiel linéaire de la forme

$$\mathcal{A}u = \sum_{< p,q > \leqslant M} a_p(x)\, D^p u \tag{2.22}$$

les coefficients $a_p(x)$ étant indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}_R$. On suppose que $\mathcal{A}u$ est <u>quasi-elliptique</u> dans $\bar{\Omega}_{R_o}$ (ou <u>semi-elliptique</u> selon Hörmander [7], c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$(2.23) \qquad \sum_{<p,q> = M} a_p(x) i^{|p|} \xi^p > \alpha \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{m_j} \quad \forall \; \xi \in \underline{\underline{R}}^n, \; x \in \bar{\Omega}_{R_o} .$$

On suppose encore que $\mathcal{A}$ satisfait à la <u>condition sur les racines</u> (analogue à l'<u>ellipticité propre</u> pour les opérateurs elliptiques) : (2.24) le polynome en τ

$$\sum_{<p,q> = M} a_p(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) i^{|p|} \xi_1^{p_1}, \ldots, \xi_{n-1}^{p_{n-1}} \tau^{p_n}$$

<u>a un nombre</u> m_n^+ <u>fixe, indépendant de</u> $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \neq 0$ <u>et de</u>

$$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Gamma_{R_o} ,$$

<u>de racine avec</u> $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Notons que (2.24) est conséquence de (2.23) si $n \geq 3$. Considérons maintenant le problème

$$(2.25) \qquad \begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega_{R_o} \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial x_n^j} = \Phi_j & \text{sur } \Gamma_{R_o} \qquad j = 0, \ldots, m_n^+ - 1 . \end{cases}$$

On a alors le

THÉORÈME 2.6. <u>Si</u> a_p <u>et</u> f <u>appartiennent à</u> $\mathcal{G}^{(q_1, \ldots, q_n)}(\bar{\Omega}_{R_o})$ <u>et les</u> Φ_j <u>appartiennent à</u>

$$\mathcal{G}^{(q_1, \ldots, q_n)}(\Gamma_{R_o}),$$

et si u est continue dans $\bar{\Omega}_{R_o}$ avec les dérivées $D^p u$ telles que $< p,q > \leqslant M$, alors

$$u \in \mathcal{G}^{(q_1,\dots,q_n)}(\bar{\Omega}_R)$$

pour tout $R < R_o$.

Si $m_1 = \dots = m_n = 2m$, alors A est proprement elliptique et on retrouve le théorème de Morrey-Nirenberg [17] sur l'analyticité des solutions des équations elliptiques. Si $m_1 = 1$, $m_2 = \dots m_n = 2m$ on a le résultat, pour des équations paraboliques, d'où on peut déduire, par "cartes locales", le théorème 2.5 dans l'hypothèse où les $a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$. (Noter qu'il faut changer n en $n+1$ dans cette application).

§ 3. Problèmes aux limites non homogènes pour les équations paraboliques.

1. Espace X_- et propriétés de traces.

Nous avons donc obtenu dans le § 2 des résultats de régularité dans des espaces de "M_k-fonctions" à valeurs vectorielles soit pour des opérateurs "abstraits" soit pour des opérateurs différentiels paraboliques "concrets".

Par transposition on peut maintenant obtenir des résultats dans des espaces de M_k-distributions (cf. [14] chap. 3, n.1).

Nous chercherons à développer cette idée en prenant comme point de départ un résultat de régularité un peu différent des résultats du § 2, qui nous permettra d'obtenir par transposition des espaces de M_k-distributions assez généraux.

Supposons que (2.10), (2.16), (2.17) et (2.18) soient vérifiées. Désignons par A^* l'opérateur adjoint formel de (2.9), c'est-à-dire

$$A^* = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D_x^p(\overline{a_{qp}}\, D_x^q) \quad .$$

On a alors la <u>formule de Green</u> suivante [1] :

$$(3.1) \quad \int_Q (Au+u')\bar{v}\, dx\, dt - \int_Q u(\overline{A^*v} - \bar{v}')dx\, dt =$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma S_j u\, \overline{\gamma_j v} d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \gamma_j u\, \overline{T_j v}\, d\sigma$$

pour tout u et $v \in \mathcal{D}(\bar{Q})$, où S_j et T_j sont des opérateurs différentiels linéaires convenables, d'ordre $2m - j - 1$, déterminés par A, et à coefficients analytiques en x sur Γ et indépendants de t.

Définissons l'espace

$$(3.2) \quad X_- = \{v | v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega})),\ \gamma_j v = 0,\ j = 0,\dots,m-1,\ A^*v - v' \in \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\Omega))\}.$$

En utilisant le fait que $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) \subset \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ et que si $f \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ il existe v unique dans $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ telle que $\gamma_j v = 0$, $j = 0,\dots,m-1$ et $A^*v - v' = f$ (cf.[10] th. 8.1 p.121), on <u>peut munir</u> X_- <u>de la topologie image réciproque de celle de</u> $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\Omega))$, de façon que

$$(3.3) \qquad A - \frac{\partial}{\partial t} \text{ est un isomorphisme de } X_- \text{ sur } \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\Omega)) \ .$$

<u>Remarque</u> 3.1. Probablement $X_- \subset \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ et la topologie sur X_- coïncide alors avec la topologie localement convexe la moins fine rendant continue les applications $v \to v$ et $v \to A^*v - v'$ de X_- dans $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ et $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\Omega))$ respectivement ; la question est liée à la remarque 2.1.

Le point de départ pour transposer est l'isomorphisme (3.3). Mais on doit avant tout étudier l'application

$$(3.4) \qquad v \to \mathcal{T} v = \{T_o v, \dots, T_{m-1} v\} \qquad \text{pour} \quad v \in X_- \ .$$

On a à ce propos le (cf. [14] chap. 3 pour les détails)

THÉORÈME 3.1. Si $v \in X_-$, $\mathcal{T} v \in \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ <u>et l'application</u> $v \to \mathcal{T} v$ <u>est linéaire et surjective</u>.

Pour démontrer que $\mathcal{T} v \in \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ on utilise la même idée qu'au théorème 2.5 ; comme $A^* v - v' \in \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\Omega))$ on a

$$(3.5) \qquad A^* v = v' \quad \text{dans un voisinage de } \Sigma \ ,$$

et donc en utilisant (3.5) comme on a utilisé (2.19) dans le théorème 2.5 on en déduit par application du théorème 2.4 (dans une évidente formulation "locale") que, pour chaque t, $v(x,t)$ est analytique en x dans un voisinage convenable de Γ, et aussi que $\mathcal{T} v \in \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$.

Pour démontrer que $\mathcal{T}$ est linéaire et surjective on utilise un théorème récent de Talenti [24] sur la résolution du problème de Cauchy dans les classes de Gevrey.

Si maintenant $N_{\mathcal{T}}$ est le noyau de $\mathcal{T}$, $N_{\mathcal{T}}$ est fermé dans X_-, l'application quotient $\mathcal{T}^\circ$ de $X_-/N_{\mathcal{T}}$ sur $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ est un <u>isomorphisme algébrique</u>. Cela nous permet de munir $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ de la topologie image réciproque par $\mathcal{T}^\circ$ de la topologie de $X_-/N_{\mathcal{T}}$ (muni de la topologie quotient de X_- par $N_{\mathcal{T}}$). Nous ignorons si cette topologie coïncide avec la topologie "naturelle" de $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ rappelée au § 1. La question est liée au fait de savoir si l'application $v \to \mathcal{T} v$ est aussi <u>continue</u> et s'il <u>existe un "relèvement" continu de</u> $\mathcal{T}$.

Donc, bien qu'il nous semble probable que les deux topologies coïncident, pour éviter toute ambiguité on notera $\#\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ l'espace $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$ muni de la topologie isomorphe à $X_{-}/N_{\mathcal{G}}$.

2. Espace Y_+, Théorème de trace.

On considère maintenant un espace $K(\Omega)$ vectoriel topologique localement convexe séparé réflexif, de fonctions définies sur Ω , contenu dans $L^2(\Omega)$, tel que

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} &1) \quad X_- \subset \mathcal{D}_{-,M_k}(K(\Omega)) \\ &2) \quad \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\Omega)) \text{ soit dense dans } \mathcal{D}_{-,M_k}(K(\Omega)). \end{aligned}$$

Par exemple d'après le théorème 2.2. on peut prendre $K(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ (cf. [14] chap. 3 n.4.1 pour d'autres espaces).

On désigne par $K'(\Omega)$ le dual de $K(\Omega)$.

Enfin on introduit l'espace

$$(3.7)\qquad Y_+ = \{u | u\in\mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{D}'(\Omega)),\ Au + u'\in\mathcal{D}'_{+,M_k}(K'(\Omega))\}$$

muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ et $u \to Au + u'$ de Y_+ dans $\mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{D}'(\Omega))$ et $\mathcal{D}'_{+,M_k}(K'(\Omega))$, ces deux espaces étant supposés, pour éviter des difficultés topologiques, muni de leur topologie de dual faible de $\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\Omega))$ et $\mathcal{D}_{-,M_k}(K(\Omega))$ respectivement.

Le problème qui se pose à propos de cet espace Y_+ est de savoir s'il est possible de définir les "traces" sur Σ de $u\in Y_+$ et de ses dérivées normales à Σ d'ordres $\leqslant m-1$ et s'il est possible d'"écrire" la formule de Green (3.1) pour $u \in Y_+$ et $v \in X_-$.

En fait on peut démontrer (cf. [14] chap.3) :

LEMME de densité : $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ est dense dans Y_+ .

et

THÉORÈME 3.2 : L'application $u \to \gamma u = \{\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\}$ linéaire de $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\Gamma)^m)$ (4) se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \to \gamma u$, de Y_+ dans le dual ${}^{\#}\mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m)$ de ${}^{\#}\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m)$, muni de la topologie faible. Et on a

$$(3.8) \qquad < u, \overline{A^*v} - \overline{v}'> - < Au + u', \overline{v} > = < \gamma u, \overline{\mathcal{C}v} > \qquad \forall\ u \in Y_+,\ v \in X_-$$

les crochets dans (3.8) désignant la dualité respectivement entre

$$\mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{D}'(\Omega)) \text{ et } \mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{D}(\Omega)),\ \mathcal{D}'_{+,M_k}(K'(\Omega)) \text{ et } \mathcal{D}_{-,M_k}(K(\Omega)),$$
$${}^{\#}\mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{H}(\Gamma)^m) \text{ et } {}^{\#}\mathcal{D}_{-,M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m) .$$

3. Transposition. Théorème d'existence et d'unicité final.

Reprenons maintenant l'isomorphisme (3.3). Par transposition on en déduit

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute forme linéaire continue sur } X_- \text{ il existe } u \text{ unique} \\ \text{dans } \mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{D}'(\Omega)) \text{ telle que} \\ \qquad < u, \overline{A^*v} - \overline{v}'> = L(\overline{v}) \qquad \forall\ v \in X_- \\ \text{et l'application } L \to u \text{ est continue de } (X_-)' \text{ dans } \mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{D}'(\Omega)) \end{array} \right.$$

---

(4) $\mathcal{D}(\Gamma)$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Γ .

Choisissons maintenant L de façon à pouvoir "séparer" dans (3.9) l'équation $Au + u' = f$ des conditions aux limites. En fait en utilisant les n. 1 et 2 on peut choisir

$$L(v) = < f, v > + < g, \mathcal{C} v >$$

où f est quelconque dans $\mathcal{D}'_{+,M_k}(K'(\Omega))$ et g quelconque dans ${}^{\#}\mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m)$ les crochets désignant les dualités convenables.

On en déduit en utilisant le théorème 3.2

THÉORÈME 3.3. <u>On suppose que</u> (2.10), (2.16), (2.17), (2.18) <u>et</u> (3.6) <u>ont lieu</u>.

<u>Étant donné</u> $f \in \mathcal{D}'_{+,M_k}(K'(\Omega))$ <u>et</u> $g \in {}^{\#}\mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{H}'(\Gamma)^m)$ <u>il existe</u> u <u>unique dans</u> $\mathcal{D}'_{+,M_k}(\mathcal{D}'(\Omega))$ <u>satisfaisant à</u>

$$\begin{cases} Au + u' = f \\ \gamma u = g \quad \text{au sens du théorème 3.2 ;} \end{cases}$$

<u>et l'application</u> $f, g \to u$ <u>est continue, chaque espace étant muni de sa topologie faible de dual</u>.

<u>Remarque</u> 3.2. Le théorème 3.3 est d'autant plus intéressant que l'espace $K'(\Omega)$ est plus grand et donc que $K(\Omega)$ est plus petit ; nous ignorons s'il existe un $K(\Omega)$ minimal.

<u>Remarque</u> 3.3. En utilisant les résultats de Cavallucci (cf. § 2, n.4), au lieu du théorème 2.4, on voit facilement que toute la <u>théorie développée dans ce</u> § (et en particulier le théorème 3.3) <u>est valable si au lieu de l'hypothèse</u> (2.17) <u>on suppose que les coefficients</u> $a_{pq} \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$.

§ 4. Équations du type de Schroedinger et équations du deuxième ordre en t.

1. Équations du type de Schroedinger.

La théorie que nous avons développée aux §§ 2 et 3 pour les équations paraboliques peut être étendue à d'autres classes d'équations d'évolution. J'exposerai dans ce § les résultats que M. Lions et moi avons obtenus jusqu'ici pour les équations du type de Schroedinger et du deuxième ordre en t et j'indiquerai les problèmes nouveaux qui se posent à ce propos. Les détails et les démonstrations seront donnés dans un travail [15] qui paraîtra prochainement.

Reprenons donc les notations et les hypothèses du n.1, § 2 pour les espaces V et H et pour la forme sesquilinéaire $a(t;u,v)$; on suppose donc que (2.1), (2.2) et (2.3) soient encore valables et en outre que

$$a(t;u,v) = \overline{a(t;v,u)} \qquad \forall\, u,v \in V,\ \forall\, t \,. \tag{4.1}$$

On considère alors l'équation "abstraite" du type de Schroedinger

$$i\, A(t)u + \frac{du}{dt} = f(t) \,. \tag{4.2}$$

Si $\{M_k\}$ est une suite de nombres positifs satisfaisant à (1.1), (1.2), (1.3) et (2.7) on peut démontrer (cf. [15]) le

THÉORÈME 4.1. *Sous les hypothèses rappelées et si en outre*

$$(4.3)\quad \left\{ \begin{array}{l} A^{(k)}(t) \in \mathcal{L}(V,H) \quad \forall\, k \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall\, t \,, \ \left(A^{(k)}(t) = \dfrac{d^k A}{dt^k}\right) , \\[2ex] \underline{\text{pour tout}} \ \ b \ \ \underline{\text{il existe}} \ \ c \ \ \underline{\text{et}} \ \ L \ \ \underline{\text{dépendant de}} \ \ b \ \ \underline{\text{tels que}} \\[2ex] \qquad \|A^{(k)}(t)\|_{\mathcal{L}(V,H)} \leq c\, L^k M_k \qquad t \in [-b,b], \ \ k \geq 1 \end{array} \right.$$

alors pour tout $f \in \mathcal{D}_{+,M_k}(H)$ il existe u unique dans $\mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ solution de (4.2) et u dépend continûment de f.

C'est l'analogue du Théorème 2.1, mais dans des hypothèses plus restrictives (et on n'a pas un résultat d'isomorphisme).

Cela dépend essentiellement du fait qu'on ne possède pas pour l'équation (4.2) des majorations semblables à (2.8) ; les majorations qu'on utilise sont en fait les suivantes

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \sup\limits_{t \leqslant b} |u(t)| \leqslant 2 \int_a^b |f(t)| dt \\[2ex] \sup\limits_{t \leqslant b} \|u(t)\| \leqslant c' \{ \sup\limits_{t \leqslant b} |u(t)| + \sup\limits_{t \leqslant b} |u'(t)| + \int_a^b |f(t)| dt \} \end{cases}$$

valables pour la solution de (4.2) si $f \in \mathcal{D}_+(H)$, $f(t) \equiv 0$ pour $t \leqslant a$, $b > a$, c' constante dépendant de a et b.

On peut en tout cas s'appuyer sur le théorème 4.1 pour développer dans le cas "concret" d'une équation aux dérivées partielles du type de Schroedinger, une théorie analogue à celle que nous avons exposée aux §§ 2 et 3 pour les équations paraboliques ; naturellement les hypothèses (4.1) et (4.3) nous obligeront à imposer sur l'équation "concrète" des conditions plus restrictives qu'au n. 2 § 2. En pratique (4.1) signifie que le problème aux limites doit être "autoadjoint" et (4.3) que les coefficients de l'équation ne dépendent pas de t sauf pour le coefficient du terme en u.

Plus précisément : soit Ω l'ouvert introduit au n.8, § 2. Soit A un opérateur différentiel linéaire de la forme

(4.5) $$A = \sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D_x^p(a_{pq}(x)\, D_x^q u) + b(x,t)u$$

avec l'hypothèse

(4.6) A <u>est formellement autoadjoint</u> $(A = A^*)$.

Considérons le problème de Cauchy-Dirichlet du type

(4.7) $$\begin{cases} i\,Au + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) \quad \text{dans } Q \quad (f \text{ à support limité à gauche par rapport à } t) \\ \gamma_j u = 0 \,, \qquad j = 0,\dots,m-1 \\ u(x,t) \text{ à support limité à gauche par rapport à } t \,. \end{cases}$$

On peut développer pour (4.6) une théorie dans les espaces $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^s(\Omega))$ tout à fait analogue à celle du n.2, § 2. En particulier, par exemple, on a le

THÉORÈME 4.2. <u>Sous les hypothèses</u> (1.1), (1.2), (1.3), (2.7), (2.10), (4.5), (4.6) <u>et si</u>

$$a_{pq} \in \mathcal{D}^{m+s}(\bar{\Omega}), \quad b \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{D}^{m+s}(\bar{\Omega})) \quad s \ \underline{\text{entier}} \geq 0$$

<u>alors</u> $i\,A + \frac{\partial}{\partial t}$ <u>est un isomorphisme de</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^{s+2m}(\Omega) \cap H_o^m(\Omega))$ <u>sur</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^s(\Omega))$.

Le théorème 2.5 sur la régularité dans les espaces $\mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$ peut être aussi étendu au problème (4.7) :

THÉOREME 4.3. <u>Sous les hypothèses</u> (2.10), (2.16), (2.18), (4.5), (4.6) <u>et si</u> $a_{pq}(x) \in \mathcal{H}(\bar{\Omega})$, $b(x,t) = b(x) \in \mathcal{H}(\bar{\Omega})$ <u>alors si</u> $f \in \mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$ <u>la solution</u> u <u>de</u> (4.7) <u>appartient à</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$.

Enfin on n'a pas de difficultés à développer pour (4.7) aussi la théorie des problèmes aux limites non homogènes du § 3 ; mais nous ne donnerons pas ici les détails (cf. 15).

Remarque 4.1. Il faut noter que pour (4.7) on ne peut pas utiliser les résultats de Cavallucci (cf. n.4 § 2) parce que l'opérateur $i\,A + \frac{\partial}{\partial t}$ n'est pas quasi-elliptique.

2. Équations du deuxième ordre en t.

Considérons maintenant l'équation "abstraite" du deuxième ordre

$$A(t)\,u(t) + u''(t) = f(t)\ . \tag{4.8}$$

On fait les mêmes hypothèses sur les espaces V et H qu'au n.1, § 2 et on suppose que la forme $a(t;u,v)$ satisfait à (2.1), (2.2), (2.3) et (4.1) ; et que $\{M_k\}$ satisfait à (1.1), (1.2), (1.3) et (2.7). On a alors (cf. [15])

THÉORÈME 4.4. Sous les hypothèses rappelées ci-dessus et si en outre

$$\left\{\begin{array}{l} A^{(k)}(t)\in\mathcal{L}(V;H) \quad \forall\, k\geqslant 1,\ \ \forall\, t, \\ \text{pour tout } b \text{ il existe } c \text{ et } L \text{ dépendant de } b \text{ tels que} \\ \|A^{(k)}(t)\|_{\mathcal{L}(V;H)} \leqslant c\,L^k\,M_k \quad k\geqslant 1 \ \text{ et } \ t\in[-b,b] \end{array}\right. \tag{4.9}$$

alors pour tout $f\in\mathcal{D}_{+,M_k}(H)$ il existe u unique dans $\mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ solution de (4.8) et u dépend continûment de f.

On peut faire les mêmes remarques qu'au Théorème 4.1 ; la majoration que l'on utilise maintenant est la suivante

$$(4.10) \qquad \sup_{t \leqslant b} \{\|u(t)\| + |u'(t)|\} \leqslant c'\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour u solution de (4.8), $f \in \mathcal{D}_+(H)$, $f(t) \equiv 0$ pour $t \leqslant a, b > a, c'$ <u>dépendant</u> de a et b.

Dans le cas "concret" des opérateurs aux dérivées partielles on en déduit, comme dans les cas parabolique et de Schroedinger, les résultats de régularité dans les espaces $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^s(\Omega))$ pour les problèmes de Cauchy-Dirichlet

$$(4.11) \quad \begin{cases} Au + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) & (f \text{ donné à support limité à gauche par rapport à } t) \\ \gamma_j u = 0 & j = 0,\dots, m-1 \\ u(x,t) \text{ à support limité à gauche par rapport à } t \text{ dans l'hypothèse} & \end{cases}$$

où A est de la forme

$$(4.12) \qquad Au = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q u) + \sum_{|p| \leqslant m} b_p(x,t) D^p u$$

et où

$$(4.13) \quad \begin{cases} A \ \underline{\text{est fortement elliptique}} \ (\text{c'est-à-dire vérifie } (2.10)) \\ \\ \underline{\text{et formellement autoadjoint}} \ (A = A^*). \end{cases}$$

Plus précisément on a le

THÉORÈME 4.5. <u>Sous les hypothèses</u> (1.1), (1.2), (1.3), (2.7), (4.12), (4.13) <u>et si</u>

$$(4.14) \qquad a_{pq} \in \mathcal{D}^{m+s}(\bar{\Omega}), \quad b_p \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{D}^{m+s}(\bar{\Omega})) \quad s \text{ entier } \geqslant 0$$

<u>alors</u> $A + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ <u>est un isomorphisme de</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^{s+2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega))$ <u>sur</u> $\mathcal{D}_{+,M_k}(H^s(\Omega))$.

Mais une situation différente se rencontre lorsqu'on veut étendre les résultats dans les espaces $\mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$ (Théorèmes 2.5 et 4.3) et la théorie des problèmes aux limites non homogènes (§ 3). Cherchons pour fixer les idées à étudier les résultats de régularité dans les espaces $\mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$; des considérations analogues sont valables pour la théorie des problèmes aux limites non homogènes.

Dans la démonstration du Théorème 2.5 on est parti de l'équation (2.19) et on en a déduit la relation (2.20). Maintenant pour le problème (4.11) on a par hypothèse

(4.15) $$Au = -u'' + f$$

et on en déduit, de façon analogue, la relation

(4.16) $$A^k u = -u^{(2k)} + \sum_{j=0}^{k-1} A^j(f^{(2(k-j-1))}) .$$

On voit donc que si l'on veut appliquer le Théorème 2.4 pour obtenir l'analyticité de u par rapport aux variables x, on doit supposer

(4.17) $$M_k = (km)! .$$

Mais $\{M_k\}$ devant être non quasi-analytique (hypothèse (1.2)) ceci n'est possible que si

(4.18) $$m > 1 .$$

Donc le théorème 2.5 peut être étendu au problème (4.11) de la façon suivante :

THÉORÈME 4.6. Sous les hypothèses (2.16), (4.17) et (4.18) et si

$$(4.19) \qquad A = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D_x^p (a_{pq}(x) D_x^q u)$$

avec $a_{pq} \in \mathcal{H}(\bar{\Omega})$, $A = A^*$, A fortement elliptique dans $\bar{\Omega}$ (cf. (2.10)) ; alors si $f \in \mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$ la solution u de (4.11) appartient aussi à $\mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{H}(\bar{\Omega}))$.

Mais l'hypothèse (4.18) exclut le cas hyperbolique, en particulier l'équation des ondes classiques.

Remarque 4.2. A propos du Théorème 4.6 on peut aussi noter que, l'opérateur $A + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ n'étant pas en général quasi-elliptique, on ne peut pas utiliser le résultat de Cavallucci (n.4, § 2).

3. Nouvelles généralisations ; questions ouvertes.

Les considérations précédentes nous conduisent naturellement à nous mettre dans un cadre encore un peu plus général, de façon à pouvoir considérer aussi le cas hyperbolique, $m = 1$. Il faut pour cela substituer à l'espace $\mathcal{H}(\bar{\Omega})$ des fonctions analytiques par rapport aux variables x un espace du type de Gevrey par rapport aux mêmes variables.

Précisons les choses dans le cas des fonctions de Gevrey proprement dites (cf. pour la définition le n.4, § 2); on prend donc pour $\{M_k\}$ la suite

$$(4.20) \qquad M_k = \Gamma(smk + 1) \qquad s \text{ réel} > \frac{1}{m} \text{ et } s \geqslant 1 .$$

En cherchant à développer les idées qui nous ont conduit aux théorèmes du type 2.5, 4.3 et 4.6 et à la théorie du § 3, il est alors naturel d'énoncer la généralisation suivante du théorème 2.4 :

(4.21) Soit Ω un ouvert borné de $\underline{\underline{R}}^n$ dont la frontière Γ est une variété de dimension $n-1$, de classe de Gevrey $\mathcal{G}^s$ avec s réel fixé, $s \geqslant \frac{1}{m}$ (5); soit A un opérateur linéaire de la forme (4.19) à coefficients dans la classe $\mathcal{G}^s(\bar{\Omega})$, d'ordre $2m$, proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$. Alors si $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et s'il existe deux constantes L et c telles que pour tout entier k et i on ait

$$\|A^k u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\, L^k\, \Gamma(2skm + 1)$$

$$\|\gamma_j(A^k u)\|_{H^{2m(1+i)-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant c\, L^{k+i+1}\, \Gamma(2ms(k+i+1)+1)$$

alors u est dans la classe $\mathcal{G}^s(\bar{\Omega})$ (et vice-versa).

Nous n'avons pas encore les détails de la démonstration de la proposition (4.21), qui doit s'obtenir par une technique analogue à celle utilisée pour le théorème 2.4.

Une fois (4.21) admise, on peut alors l'utiliser au lieu du théorème 2.4 soit dans les théorèmes de régularité soit dans la théorie des problèmes aux limites non homogènes et <u>non seulement pour les équations du deuxième ordre en t mais aussi pour les équations paraboliques et du type de Schroedinger</u>.

On obtiendra de nouveaux résultats, qui nous semblent intéressants, surtout dans le cas des équations du deuxième ordre.

---

(5) Définition évidente : cela signifie que les fonctions qui donnent les "cartes locales" de Γ sont de classe de Gevrey, selon la définition du n.4, § 2.

Je me borne par exemple à énoncer la proposition qui généralise le Théorème 4.6:

(4.22) $\left\{\begin{array}{l} \text{Soit } \Omega \text{ un ouvert borné de } \underline{\underline{R}}^n, \text{ dont la frontière } \Gamma \text{ est une} \\ \text{variété de dimension } n-1 \text{ de classe } \mathcal{G}^s, \ s \text{ réel fixé} > \frac{1}{m}\ ; \\ \text{désignons par } \mathcal{G}_+^{sm}(\mathcal{G}^s(\bar{\Omega})) \text{ l'espace } \mathcal{D}_{+,M_k}(\mathcal{G}^s(\bar{\Omega})) \text{ avec} \\ M_k = \Gamma(skm+1)\ ; \text{ soit } A \text{ de la forme (4.19) avec } a_{pq} \in \mathcal{G}^s(\bar{\Omega}), \\ A = A^*, A \text{ fortement elliptique dans } \bar{\Omega}\ ; \text{ alors si } f \in \mathcal{G}_+^{sm}(\mathcal{G}^s(\bar{\Omega})) \\ \text{la solution } u \text{ du problème (4.11) appartient à } \mathcal{G}_+^{sm}(\mathcal{G}^s(\Omega)). \end{array}\right.$

Pour $m=1$ on peut considérer entre autres l'équation des ondes, dès que s est > 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAIN-A.N. MILGRAM. Differential operators on Riemannian manifolds. Rend. Circ. Mat. Palermo, 2 (1952), p.1-61.

[2] A. CAVALLUCCI. Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche (à paraître aux Annali di Mat. pura e appl.).

[3] A. FRIEDMAN. Classes of solutions of linear systems of partial differential equation of parabolic type. Duke Math. J. 24 (1957), p. 433-442.

[4] M. GEVREY. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Ecole Norm. Sup. Paris, 35 (1918), p. 129-190.

[5] T. KOTAKE M.S. NARASIMHAN. Fractional powers of a linear elliptic operator, Bull. Soc. Math. France, t. 90 (1962), p. 449-471.

[6] E. HOLMGREN. Sur l'équation de la propagation de la chaleur, Arkiv. for Math. Ast. och. Fysik, t. 4, n° 18, (1909), p. 1-28.

[7] L. HORMANDER. Linear partial differential operators, Springer Berlin 1963.

[8] G. KOTHE. Dualität in der Funktionen-theorie. J. reine angew, Math., 191 (1953), p. 30-49.

[9] J. LERAY Y. OHYA. Système linéaires, hyperboliques non stricts. Seminaire Collège de France 1964, I, pp. 20-71.

[10] J.L. LIONS. Equations différentielles opérationnelles. Springer, Grundlehren der Math. Wiss., t. III, 1961.

[11] J.L. LIONS. E. MAGENES. Problèmes aux limites non homogènes, (VII). Annali di Mat. pura appl., t. 63 (1963), p. 201-224.

[12] J.L. LIONS. E. MAGENES. Sur certains aspects des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs paraboliques. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, vol. 18 (1964), p. 303-344.

[13] J.L. LIONS. E. MAGENES. Remarques sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques. C.R. Acad. Sc. Paris, 251 (1960), p. 2118-2120.

[14] J.L. LIONS. E. MAGENES. Espace de fonction et distribution du type de Gevrey et problèmes aux limites paraboliques (à paraître aux Annali di Mat. pura e appl.).

[15] J.L. LIONS. E. MAGENES. Espaces du type de Gevrey et problèmes aux limites pour diverses classes d'équations d'évolution. (à paraître).

[16] S. MANDELBROJT. Séries adhérentes, régularisation des suites. Applications. Gauthier Villars, Paris (1952).

[17] C.B. MORREY. L. NIRENBERG. On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations. Comm. pure appl. math., 10 (1957), p. 271-290.

[18] C. ROUMIEU. Sur quelques extensions de la notion de distributions, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., t. 77 (1960), p. 47-121.

[19] L. SCHWARTZ. Théorie des distributions, I et II, Hermann, Paris, 1950-51.

[20] L. SCHWARTZ. Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. Journal d'Analyse Math., vol. IV, 1954-55, p. 88-148.

[21] L. SCHWARTZ. Théorie des distributions à valeurs vectorielles, I, II. Annales Institut Fourier, t. VII (1957), 1-141 ; t. VIII (1958) p. 1-209.

[22] J. SEBASTIANO e SILVA. Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni, Rend. di Mat. et sur appl., vol. 14 (1955), p. 309-410.

[23] G. TALENTI. Un problema di Cauchy. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, vol. 18 (1964), p. 165-186.

[24] G. TALENTI. Osservazioni sulla nota : Un problema di Cauchy. à paraître aux Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1964).