Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Leray
Yujiro Ohya

Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1964), p. 20-71
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964___1_20_0>

SYSTÈMES LINÉAIRES, HYPERBOLIQUES NON STRICTS

par

Jean LERAY et Yujiro OHYA

Introduction

1. HISTORIQUE.- Les systèmes strictement hyperboliques se résolvent dans des espaces de fonction ayant un nombre donné, fini, de dérivées (Petrowsky [10], Leray [5], [6], Gårding [1]). Une équation à caractéristiques multiples ne peut plus être résolue dans de tels espaces (Yamaguti [12] ; Mme Lax [4] ; Hörmander [3], ch. V, qui réserve le terme "hyperbolique" au strictement hyperbolique). Mais elle peut l'être dans des espaces de fonctions indéfiniment différentiables : les espaces de Gevrey $\gamma^{(\alpha)}$ (Hörmander [3], théorème 5.7.3, traite l'équation linéaire à coefficients constants ; Ohya [9] traite l'équation linéaire à coefficients variables, dont le <u>polynome caractéristique est un produit de polynomes strictement hyperboliques ; le domaine d'influence existe</u>. Ce domaine peut s'étudier comme dans le cas strictement hyperbolique, [5], ch. VI).

Nous allons étendre ce résultat d'Ohya au système linéaire ; nous compléterons ses conclusions en employant une famille plus large de classes de Gevrey : elle s'étend de la classe des fonctions analytiques à celle des fonctions ayant un nombre fini de dérivées bornées ou de carrés sommables.

Notre méthode peut s'appliquer au système non linéaire, grâce à un théorème de L. Waelbroeck [7] sur la composition des fonctions.

2. SOMMAIRE.- Nous résolvons le problème de Cauchy, hyperbolique non strict, par approximations successives ; ces approximations s'obtiennent en résolvant des problèmes de Cauchy strictement hyperboliques ; pour prouver leur convergence il faut employer les normes de toutes leurs dérivées.

A cet effet, suivant une suggestion de L. Waelbroeck, nous employons des séries formelles ; la preuve de la convergence se réduit à la résoltuion d'un problème de Cauchy pour des séries formelles ; ce problème se résout en s'aidant du théorème de Cauchy-Kowaleski (problème de Cauchy analytique).

Le problème posé se trouve néanmoins résolu dans des classes de Gevrey non quasi-analytiques : elles contiennent des fonctions à supports compacts ; le domaine d'influence existe, ce qui, pour nous, caractérise l'hyperbolique.

Notre raisonnement diffère beaucoup de celui d'Ohya ; cependant, il est né de son étude.

On trouvera l'énoncé de nos conclusions aux n° 23, 24, 25 et 26, à la fin de l'article.

§ 1. Norme formelle

3. NOTATIONS.- $X = \underline{\underline{R}}^{\ell}$. Etant donnée une fonction $f : X \to \underline{\underline{C}}$, nous notons :

$$|f,X|_p = [\int_X |f(x)|^p \, dx]^{1/p} \; ; \; |f,X|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \; ;$$

$L_p(X)$ l'espace de Banach des f tels que $|f,X|_p < \infty$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Choisissons des coordonnées $(x_1,\ldots,x_\ell)$ sur X ; notons :

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} ,$$

$$D^\sigma f = D_1^{\sigma_1} \ldots D_\ell^{\sigma_\ell} f \quad \text{où} \quad \sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell), \; |\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_\ell \; ;$$

$$|D^m f,X|_p = \sum_{|\sigma| \leq m} \frac{1}{\sigma !} |D^\sigma f,X|_p \, , \quad \text{où} \quad \sigma ! = \sigma_1 ! \ldots \sigma_\ell ! \; ;$$

$L_p^m(X)$ l'espace de Banach des f telles que $|D^m f,X|_p < \infty$; c'est l'espace de Sobolev.

Bien entendu, $|D^{\sigma}f,X|_p = \infty$ si $D^{\sigma}f \notin L_p(X)$.

4. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS.- Nous nommons <u>norme formelle</u> de la fonction $f : X \to \underline{\underline{C}}$ la série formelle de la variable ρ, à coefficients $\geqslant 0$ et $\leqslant +\infty$:

$$(4.1) \qquad |D^{\infty}f,X,\rho|_p = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s\,!} \sup_{\sigma} |D^{\sigma}f,X|_p \quad , \text{ où } \quad |\sigma| = s\ .$$

Notons $[D^{\sigma},f]$ le commutateur de D^{σ} et f, c'est-à-dire l'opérateur tel que

$$[D^{\sigma},f]g = D^{\sigma}(fg) - f\,D^{\sigma}g\ , \quad \text{où} \quad g : X \to \underline{\underline{C}}\ ;$$

définissons la série formelle

$$(4.2) \qquad \big|[D^{\infty},f]g,X,\rho\big|_p = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\sigma} \big|[D^{\sigma},f]g,X\big|_p\ .$$

Nous allons établir les propriétés suivantes, où $\sum_s \frac{\rho^s}{s!} F_s \ll \sum_s \frac{\rho^s}{s!} G_s$ signifie $F_s \leqslant G_s \ \forall s$.

<u>Formule du produit</u>.- Si $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, alors

$$(4.3) \qquad |D^{\infty}(fg),X,\rho|_p \ll |D^{\infty}f,X,\rho|_q \; |D^{\infty}g,X,\rho|_r\ .$$

<u>Formule du commutateur</u>.- Si $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, alors

$$(4.4) \qquad |[D^{\infty},f]g,X,\rho|_p \ll \big[\,|D^{\infty}f,X,\rho|_q - |f,X|_q\big].|D^{\infty}g,X,\rho|_r\ .$$

Signalons qu'il est aisé d'appliquer (4.6) à (4.4), puisque toute série formelle $F(\rho) \gg 0$ vérifie évidemment

$$(4.5) \qquad F(\rho) - F(0) \ll \rho\,\frac{\partial F(\rho)}{\partial\rho}\ .$$

Formules de la dérivée.-

(4.6) $$\frac{\partial}{\partial \rho} \left|D^{\infty} f, X, \rho\right|_p \ll \sum_j \left|D^{\infty} D_j f, X, \rho\right|_p ;$$

(4.7) $$\left|D^{\infty} D_j f, X, \rho\right|_p \ll \frac{\partial}{\partial \rho} \left|D^{\infty} f, X, \rho\right|_p .$$

5. PREUVE DE LA FORMULE DU PRODUIT.- Définissons la série formelle en $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_\ell)$:

(5.1) $$\left|D^{\infty} f, X ; \xi\right|_p = \sum_{\sigma} \frac{\xi^{\sigma}}{\sigma !} \left|D^{\sigma} f, X\right|_p ,$$

où
$$\xi^{\sigma} = \xi_1^{\sigma_1} \ldots \xi_\ell^{\sigma_\ell} .$$

Nous avons

(5.2) $$\left|D^{\infty}(fg), X ; \xi\right|_p \ll \left|D^{\infty} f, X ; \xi\right|_q \cdot \left|D^{\infty} g, X ; \xi\right|_r$$

($\ll$ signifie $\leqslant$ pour les coefficients homologues).

Preuve de (5.2).- D'après Leibniz

$$\frac{1}{\sigma !} D^{\sigma}(fg) = \sum_{\lambda,\mu} \frac{1}{\lambda !}(D^{\lambda} f) \frac{1}{\mu !}(D^{\mu} g), \quad \text{où} \quad \lambda + \mu = \sigma ;$$

d'après Hölder

$$\left|(D^{\lambda} f).(D^{\mu} g), X\right|_p \leqslant \left|D^{\lambda} f, X\right|_q \left|D^{\mu} g, X\right|_r ;$$

donc

$$\left|D^{\infty}(fg), X ; \xi\right|_p \ll \sum_{\lambda,\mu} \frac{\xi^{\lambda}}{\lambda !} \left|D^{\lambda} f, X\right|_q \frac{\xi^{\mu}}{\mu !} \left|D^{\mu} g, X\right|_r ,$$

ce qui prouve (5.2).

Lemme 5.- Soient $\varphi_\sigma(\xi) = \sum_\sigma \frac{\xi^\sigma}{\sigma\,!}\varphi\sigma$, $\psi(\xi)$, $\theta(\xi)$ des séries formelles vérifiant

(5.3) $\theta(\xi) \ll \varphi_\sigma(\xi)\,\psi(\xi)$ $(0 \leqslant \varphi\sigma \leqslant +\infty$, etc.) ;

définissons comme suit des séries formelles $\Phi(\rho)$, $\Psi(\rho)$, $\Theta(\rho)$:

(5.4) $\Phi(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_\sigma \varphi_\sigma$, où $|\sigma| = s$.

On a

(5.5) $$\Theta(\rho) \ll \Phi(\rho)\Psi(\rho) .$$

Preuve.- Notons $\rho = \xi_1 + \ldots + \xi_\ell$; la formule du binôme donne, pour $|\sigma| = s$:

$$\frac{\rho^s}{s!} = \sum_\sigma \frac{\xi^\sigma}{\sigma!}$$

La définition (5.4) de $\Phi(\rho)$ peut donc s'énoncer*) comme suit : $\Phi(\rho)$ est la plus petite série formelle en $\rho = \xi_1 + \ldots + \xi_\ell$ qui majore $\varphi(\xi)$, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\varphi(\xi) \ll \Phi(\rho) .$$

Donc

$$\theta(\xi) \ll \varphi(\xi).\psi(\xi) \ll \Phi(\rho).\Psi(\rho)$$

et, par suite

$$\Theta(\rho) \ll \Phi(\rho).\Psi(\rho).$$

Preuve de la formule du produit (4.3). On applique le lemme à (5.2).

---

*) Cet énoncé est emprunté à L. Gårding [14].

6. PREUVE DE LA FORMULE DU COMMUTATEUR.- Le calcul établissant (5.2) donne

$$\left|[D^{\infty},f]g,X\;;\;\xi\right|_p \ll \left[\,\left|D^{\infty} f,X\;;\;\xi\right|_q - \left|\;f,X\right|_q\right].\left|D^{\infty} g,X,\;\xi\right|_r \;.$$

On applique le lemme 5.

7. PREUVE DES FORMULES DE LA DÉRIVÉE.- Preuve de (4.6).- Aux deux membres, les coefficients respectifs de $\frac{\rho^s}{s!}$ sont

$$\sup_{\sigma'} \left|D^{\sigma'} f,X\right|_p \leqslant \sum_i \sup_{\sigma} \left|D^{\sigma} D_i f,X\right|_p \;, \qquad \text{où} \quad |\sigma'|-1 = |\sigma| = s \;.$$

Preuve de (4.7).- Aux deux membres, les coefficients respectifs de $\frac{\rho^s}{s!}$ sont

$$\sup_{\sigma} \left|D^{\sigma} D_i f,X\right|_p \leqslant \sup_{\sigma'} \left|D^{\sigma'} f,X\right|_p \;, \quad \text{où} \quad |\sigma'|-1 = |\sigma| = s \;.$$

§ 2. Quasi-norme formelle.

8. NOTATIONS.- Soient $(x_0, x_1, \ldots, x_\ell)$ des coordonnées de $\underline{\underline{R}}^{\ell+1}$; soit Y la bande de $\underline{\underline{R}}^{\ell+1}$ d'équation

$$Y\;:\; 0 \leqslant x_0 \leqslant |Y| \;;$$

soit S_t l'hyperplan de cette bande d'équation

$$S_t\;:\; x_0 = t \;, \qquad \text{où} \qquad 0 \leqslant t \leqslant |Y| \;.$$

Etant donnée une fonction

$$f : Y \to \underline{\underline{C}} \;,$$

nous notons $\left|f,S_t\right|_p$ la norme de sa restriction à S_t et $D^{\sigma} f$ ses dérivées, où $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell)$; $|\sigma|$ désigne $\sigma_0 + \ldots + \sigma_\ell$; $(\sigma) \leqslant (r,s)$ signifie : $\sigma_0 \leqslant r$, $|\sigma| \leqslant r+s$.

Pour $\sigma = (j,0,\dots,0)$, D^σ est noté D_o^j.

9. DEFINITION.- Etant donnée une fonction

$$f : Y \to \underline{\underline{C}} \ ,$$

un nombre p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ et un entier $n \geqslant 0$, nous nommons <u>quasi-norme formelle</u> de f la série formelle, dont les coefficients sont des fonctions de t à valeurs $\geqslant 0$ et $\leqslant \infty$:

$$(9.1) \quad |D^{n,\infty} f, S_t, \rho|_p = \sum_\gamma \frac{1}{\gamma!} |D^\infty D^\gamma f, S_t, \rho|_p \ , \quad \text{où} \quad |\gamma| \leqslant n \ ,$$

$$= \sum_{\gamma,s} \frac{1}{\gamma!} \frac{\rho^s}{s!} \sup_\sigma |D^{\gamma+\sigma} f, S_t|_p \quad \text{où} \ |\gamma| \leqslant n, \ 0 \leqslant s, \quad \sigma = (0,s).$$

Nous emploierons la <u>norme formelle</u>

$$(9.2) \qquad |D^{n,\infty} f, Y, \rho|_\infty = \sum_{\gamma,s} \frac{1}{\gamma!} \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\sigma, x} |D^\gamma D^\sigma f|$$

$$\text{où} \ |\gamma| \leqslant n, \ 0 \leqslant s, \ \sigma = (0,s), \ x \in Y \ ;$$

autrement dit

$$(9.3) \qquad |D^{n,\infty} f, Y, \rho|_\infty = \sup_t |D^{n,\infty} f, S_t, \rho|_\infty \quad \text{où} \quad 0 \leqslant t \leqslant |Y| \ ,$$

en convenant que

$$\sup_t \sum_s \rho^s \Phi_s(t) = \sum_s \rho^s \sup_t \Phi_s(t) .$$

Soit $a(x,D)$ un opérateur différentiel ; ses quasi-norme et norme formelles

$$|D^{n,\infty} a, S_t, \rho|_p \quad \text{et} \quad |D^{n,\infty} a, Y, \rho|_\infty$$

sont les sommes de celles de ses coefficients ; nous notons

(9.4) $\left|[D^{n,\infty},a]f,S_t,\rho\right|_p = \sum_{\gamma,s} \frac{1}{\gamma!}\frac{\rho^s}{s!} \sup_{\sigma} \left|[D^{\gamma}D^{\sigma},a]f,S_t\right|_p$

où $0 \leqslant |\gamma| \leqslant n$, $0 \leqslant s$, $\sigma = (0,s)$

10. PROPRIÉTÉS.- On a les formules suivantes :

Formule du produit.- Si $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, alors

(10.1) $|D^{n,\infty}(fg),S_t,\rho|_p \ll |D^{n,\infty}f,S_t,\rho|_q \; |D^{n,\infty}g,S_t,\rho|_r$.

Preuve.- D'après la formule de Leibniz

$$|D^{n,\infty}(fg),\ S_t,\rho|_p \ll \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\beta!} |D^{\infty}(D^{\alpha}f)(D^{\beta}g),S_t,\rho|_p$$

pour $|\alpha+\beta| \leqslant n$; donc, a fortiori, pour $|\alpha| \leqslant n$, $|\beta| \leqslant n$; il suffit alors d'appliquer au second membre la formule du produit (4.3).

Formule de la dérivée.- De (4.6) et (4.7) résultent les formules, où $j \neq 0$:

(10.2) $\frac{\partial}{\partial\rho} |D^{n,\infty}f,S_t,\rho|_p \ll \sum_{j=1}^{\ell} |D^{n,\infty}D_jf,S_t,\rho|_p$;

(10.3) $|D^{n,\infty}D_jf,S_t,\rho|_p \ll \frac{\partial}{\partial\rho} |D^{n,\infty}f,S_t,\rho|_p$ $(j > 0)$.

Le n° 11 va prouver la formule suivante, que les § 3 et 4 emploieront :

Formule du commutateur.- Soit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$; soit $a(x,D)$ un opérateur normal[1] d'ordre m ; on a, si $n \geqslant 1$

(10.4) $\left|[D^{n,\infty},a]f,S_t,\rho\right|_p \ll c(m,n)\,|D^{n,\infty}a,S_t,\rho|_q \,(1+\rho\frac{\partial}{\partial\rho})\,|D^{m+n-1,\infty}f,S_t,\rho|_r$,

où $c(m,n)$ ne dépend que de ℓ, m et n .

---

1) Le coefficient de D_0^m (qui est nommé premier coefficient) vaut 1 .

11. PREUVE DE LA FORMULE DU COMMUTATEUR.- On a

$$[D^{\gamma} D^{\sigma}, a]f = D^{\sigma}[D^{\gamma}, a]f + [D^{\sigma}, a]D^{\gamma} f \ ;$$

d'où, vu les définitions (9.1) et (9.4) :

$$\left|[D^{n,\infty}, a]f, S_t, \rho\right|_p \ll \sum_{\gamma} D^{0,\infty} b_{\gamma} f, S_t, \rho\Big|_p + \sum_{\gamma} \frac{1}{\gamma !}\left|[D^{0,\infty}, a]D^{\gamma} f, S_t, \rho\right|_p \ ,$$

où

$$|\gamma| \leqslant n \ ; \ b_{\gamma} = \frac{1}{\gamma !}[D^{\gamma}, a] \ ; \quad \text{ordre } (b_{\gamma}) \leqslant m + n - 1 \ ;$$

les coefficients de b_{γ} sont des dérivées de ceux de a d'ordres $\leqslant n$. Donc, vu la formule du produit (4.3) :

$$\left|D^{0,\infty} b_{\gamma} f, S_t, \rho\right|_p \ll c(m,n)\left|D^{n,\infty} a, S_t, \rho\right|_q \left|D^{m+n-1} f, S_t, \rho\right|_r$$

Pour établir la formule du commutateur (10.4), il suffit donc de prouver que

$$(11.1) \quad \left|[D^{0,\infty}, a]D^{\gamma} f, S_t, \rho\right|_p \ll c(m,n)\left|D^{n,\infty} a, S_t, \rho\right|_q \left(1 + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right)\left|D^{m+n-1,\infty} f, S_t, \rho\right|_r$$

si $|\gamma| \leqslant n$. Il suffit de le prouver quand a est monome :

$$a(x,D) = a_{\alpha}(x)D^{\alpha} \ , \quad \text{où} \quad |\alpha| \leqslant m.$$

Quand $|\alpha| \leqslant m-1$, la formule (4.4), où l'on remplace X par S_t et où l'on majore $-|f,X|_q$ par 0, donne

$$\left|[D^{0,\infty}, a]D^{\gamma} f, S_t, \rho\right|_p \ll c\left|D^{n,\infty} a, S_t, \rho\right|_q \left|D^{m+n-1,\infty} f, S_t, \rho\right|_r$$

et prouve donc (11.1).

Quand $(\alpha) = (m,0)$, alors $a_{\alpha} = 1$, puisque a est normal ; donc, vu la définition (9.4),

$$\left|[D^{0,\infty}, a]D^{\gamma} f, S_t, \rho\right|_p = 0 \ .$$

/

Supposons enfin $(\alpha) \leqslant (m-1,1)$, c'est-à-dire $a(x,D) = a_\alpha(x) D_i D^\beta$ où $1 \leqslant i \leqslant \ell$, $|\beta| \leqslant m-1$; remarquons que les formules (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) donnent

$$\left|[D^\infty, f] D_i g, X, \rho\right|_p \ll \sum_{j=1} \left|D^\infty D_j f, X, \rho\right|_q \quad \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left|D^\infty g, X, \rho\right|_r \quad ;$$

d'où en remplaçant f,g,X par $a_\alpha, D^{\beta+\gamma} f, S_t$:

$$\left|[D^{0,\infty}, a] D^\gamma f, S_t, \rho\right|_p \ll c\left|D^{1,\infty} a, S_t, \rho\right|_q \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left|D^{m+n-1} f, S_t, \rho\right|_r \quad ,$$

ce qui achève la preuve de (11.1), donc de la formule du commutateur.

§ 3. Approximations successives

12. L'ÉQUATION STRICTEMENT HYPERBOLIQUE a les propriétés que voici (voir [1], [5], [6]) :

sur la bande Y, soit un opérateur $a(x,D)$ d'ordre m, normal et régulièrement hyperbolique[2)] pour les hyperplans S_t ;

on suppose donné un entier $n \geqslant 1$ tel que le premier terme $\left|D^n a, Y\right|_\infty$ de la norme formelle $\left|D^{n,\infty} a, Y, \rho\right|_\infty$ soit fini ;

---

2) Soit $g(x,p)$ le polynome caractéristique de a, c'est-à-dire la partie principale du polynome $a(x,p)$ de p. On suppose qu'il a les propriétés suivantes pour $p_1, \ldots, p_\ell$ réels :

$g(x,p)$ a toutes ses racines p_0 finies, réelles (hyperbolicité) et distinctes (stricte hyperbolicité) ;

tout polynome $g(\infty, p)$, qui est une limite pour $|x| \to \infty$ de $g(x,p)$, a lui aussi ses racines p_0 finies et distinctes (hyperbolicité régulière).

alors l'opérateur a se minore comme suit : si $|D^{m+n} f, S_t|_2$ est une fonction sommable de t, alors

(12.1) $$|D^{m+n-1} f, S_t|_2 \leqslant c \int_0^t |D^n af, S_{t'}|_2 \, dt' + c\,|D^{m+n-1} f, S_o|_2 \;;$$

les nombres c ne dépendent que de $|D^n a, Y|_\infty$.

Cette minoration implique évidemment le

Théorème d'unicité.- Le problème de Cauchy d'inconnue u

(12.2) $$au = v \;,\quad D^{m-1}u \,|\, S_o \text{ donné}^{3)}$$

a au plus une solution telle que $|D^m u, S_t|_2$ soit fonction sommable de t.

La fin de ce n°12 va montrer que la minoration (12.1) de a permet de majorer comme suit la solution (12.2) du problème de Cauchy (12.2) :

Lemme 12.- On a

(12.3) $$|D^{m+n-1,\infty}u,\, S_t, \rho|_2 \ll \varphi(t, \rho) \;,$$

en notant $\varphi(t, \rho)$ la série formelle que définit le problème de Cauchy

(12.4) $$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} - C_1(\rho)\left(1 + \rho\dfrac{\partial}{\partial \rho}\right)\right]\varphi(t, \rho) = \psi(t, \rho) \\[2ex] \varphi(0, \rho) = \theta(\rho) \;, \end{cases}$$

où C_1, ψ et θ sont des séries formelles en ρ telles que

(12.5) $$\begin{cases} c_o|D^{n,\infty} a, Y, \rho|_\infty \ll C_1(\rho) \\[2ex] c_o|D^{n,\infty} v, S_t, \rho|_2 \ll \psi(t, \rho) \;,\quad c_o\,|D^{m+n-1,\infty} u, S_o, \rho|_2 \ll \theta(\rho) \end{cases}$$

les c_o étant des nombres dépendant de $|D^n a, Y|_\infty$.

---

3) c'est-à-dire : $u|S_o, \ldots, D_o^{m-1}u|S_o$ donnés.

Note 12.1.- Il est immédiat de calculer $D^{m+n-1}\, u|S_o$, donc de majorer $|D^{m+n-1,\infty} u,S_o,\rho|_2$ en fonction des données. Par exemple, si

$$D^{m-1}\, u|S_o = 0 \quad \text{et} \quad D^{n-1} v|S_o = 0, \quad \text{alors} \quad D^{m+n-1} u|S_o = 0$$

et l'on peut prendre $\theta(\rho) = 0$.

Note 12.2.- La résolution de (12.4) est élémentaire : les coefficients $\varphi_s(t)$ de $\varphi(t,\rho) = \sum_s \frac{\rho^s}{s!}\varphi_s(t)$ s'obtiennent par des quadratures portant sur des fonctions $\geqslant 0$; ces formules gardent un sens quand les coefficients des données C_1, ψ, θ ne sont pas sommables[4].

Théorème d'existence.- Le problème de Cauchy (12.2) possède une solution u, telle que $|D^{m+n-1}u,S_t|_2$ est une fonction bornée de t, quand les premiers termes

$$|D^n v,S_t|_2 \ , \ |D^{m+n-1}u,S_o|_2$$

des séries formelles figurant dans (12.5) sont respectivement sommables et finis; c'est-à-dire, quand $\varphi(t,0)$ est une fonction bornée de t. Cette solution vérifie (12.1); c'est-à-dire :

$$(12.6) \qquad |D^{m+n-1}u,S_t|_2 \leqslant c \int_0^t |D^n v,S_{t'}|_2\, dt' + c\,|D^{m+n-1}u,S_o|_2 \ .$$

Preuve du lemme 12.- Supposons les r premiers termes de la série formelle $\varphi(t,\rho)$ bornés ; c'est-à-dire les r premiers termes des séries formelles

$$|D^{n,\infty}v,S_t,\rho|_2 \ , \ |D^{m+n-1}u,S_o,\rho|_2 \ \ |D^{n,\infty}a,Y,\rho|_\infty$$

respectivement sommables et finis ; on sait que les r premiers termes de

4) Nous pourrions aisément nous limiter au cas où elles le sont.

$|D^{m+n-1}u, S_t, \rho|_2$ sont alors bornés. Soit σ tel que $(\sigma) \leqslant (0,r)$.

Puisque

$$a\, D^{\sigma} u = -[D^{\sigma}, a]u + D^{\sigma} v,$$

on a d'après (12.6) :

$$|D^{m+n-1}\, D^{\sigma} u, S_t|_2 \leqslant c \int_0^t |D^n[D^{\sigma}, a]u, S_{t'}|_2\, dt' + c \int_0^t |D^n D^{\sigma} v, S_{t'}|_2\, dt'$$

$$+ |D^{m+n-1}\, D^{\sigma} u, S_0|_2 \quad ,$$

les c étant indépendants de r ; chacun des termes de cette relation est une fonction bornée de t. Remplaçons le premier membre par $|D^{\gamma+\sigma} u, S_t|_2$ et appliquons $\sum\limits_{\gamma, s} \frac{1}{\gamma!} \frac{\rho^s}{s!} \sup\limits_{\sigma}$, où $|\gamma| \leqslant n$, $|\sigma| = s \leqslant r$; il vient, en modifiant les c qui restent indépendants des r :

$$|D^{m+n-1,\infty} u, S_t, \rho|_2 \ll c \int_0^t |[D^{n,\infty}, a]u, S_{t'}, \rho|_2\, dt' + c \int_0^t |D^{n,\infty} v, S_{t'}, \rho|_2\, dt'$$

$$+ |D^{m+n-1,\infty} u, S_0, \rho|_2 \qquad \text{mod. } \rho^r .$$

Majorons le second membre par la formule du commutateur (10.4) ; il vient :

$$|D^{m+n-1,\infty} u, S_t, \rho|_2 \ll c\, |D^{n,\infty} a, Y|_{\infty} (1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}) \int_0^t |D^{m+n-1,\infty} u, S_{t'}, \rho|_2\, dt'$$

$$+ c \int_0^t |D^{n,\infty} v, S_{t'}, \rho|_2\, dt' + |D^{m+n-1,\infty} u, S_0, \rho|_2 \ \text{mod. } \rho^r \ .$$

L'intégration de cette inégalité est classique ; elle donne ceci, en prenant dans (12.4) et (12.5) des c_0 assez grands, mais indépendants de r : on a

$$(12.7) \qquad |D^{m+n-1}u, S_t, \rho|_2 \ll \varphi(t, \rho) \quad \text{mod } \rho^r$$

pour $0 \leqslant t \leqslant T_r$ $(T_r \leqslant |Y|)$, si pour ces valeurs de t les coefficients de

ρ^j $(j=0,\dots, r-1)$ dans φ sont des fonctions bornées de t.

Or la définition de $\varphi(t, \rho)$, par (12.4) et la Note 12.2, montre que si le coefficient de ρ^{r-1} dans φ vaut ∞ pour $t = T$, alors tous les coefficients de ρ^s $(s \geqslant r-1)$ valent ∞ pour $T \leqslant t \leqslant |Y|$. Donc (12.7) implique (12.3), c'est-à-dire le lemme 12.

13. ÉQUATION DÉCOMPOSABLE EN ÉQUATIONS STRICTEMENT HYPERBOLIQUES.- Sur la bande Y, soit

$$a = a_1 \dots a_p$$

un opérateur d'ordre m, produit de p opérateurs normaux, régulièrement hyperboliques pour les hyperplans S_t ; soient $m_1,\dots, m_p$ leurs ordres :

$$m = m_1 + \dots + m_p .$$

Posons-nous sur Y le problème de Cauchy d'inconnue u :

$$(13.1) \qquad au = v \quad , \quad D^{m-1} u|S_0 = 0$$

quand on se donne un entier $n \geqslant p$ tel que :

$$(13.2) \qquad D^{n-p} v|S_0 = 0 ,$$

ce qui implique $D^{m+n-p} u|S_0 = 0$;

$$(13.3) \qquad |D^{m_1+\dots+ m_j-j+n} a_{j+1} , Y|_\infty < \infty \qquad (0 \leqslant j < p)$$

Soient C_1, C_2 et ψ des séries formelles en ρ telles que

$$(13.4) \quad \begin{cases} c_0|D^{m_1+\dots+ m_j-j+n,\infty} a_{j+1} , Y, \rho |_\infty \ll C_1(\rho) \quad \text{pour } j = 0,\dots,p-1, \\ c_0[1 + |D^{n-p+q,\infty} a,Y, \rho|_\infty]^q \ll C_2(\rho) \\ c_0|D^{n,\infty} v,S_t, \rho|_2 \ll \psi(t, \rho) \quad , \end{cases}$$

les c_0 étant des nombres dépendant de $|D^{m_1+\dots+m_j-j+n} a_{j+1}, Y|_\infty$.

Soit $\varphi(t, \rho)$ la série formelle en ρ que définit le problème de Cauchy

$$(13.5)\quad \begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - c_1(\rho)(1 + \rho\frac{\partial}{\partial\rho})]^p \ \varphi(t, \rho) = \psi(t, \rho), \\ \\ [\frac{\partial}{\partial t} - c_1(\rho)(1 + \rho\frac{\partial}{\partial\rho})]^j \ \varphi(t, \rho) = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,\ j = 0, \dots, p-1. \end{cases}$$

<u>Lemme</u> 13.1.- Si $|D^n v, S_t|_2$ est une fonction sommable de t, en particulier si $\varphi(t,0)$ <u>est une fonction bornée de</u> t pour $0 \leqslant t \leqslant |Y|$, alors le problème de Cauchy (13.1) possède une et une seule solution telle que $|D^{m+n-p} u, S_t|_2$ soit une fonction bornée de t. Cette solution vérifie :

$$(13.6)\quad |D^{m+n-p,\infty} u, S_t, \rho|_2 \ll \varphi(t, \rho) \ ;$$

et aussi

$$(13.7)\quad |D^{m+n-p+q,\infty} u, S_t, \rho|_2 \ll c_2(\rho)(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\rho})^q \varphi(t, \rho) \ ,$$

si q satisfait les conditions $0 < q < p$, $D^{n-p+q} v|S_0 = 0$.

<u>La note</u> 12.2 s'applique au problème (13.5).

<u>Preuve</u>.- Notons $v_0 = v$ et envisageons les problèmes de Cauchy d'inconnues v_j $(j = 1, \dots, p)$:

$$a_j v_j = v_{j-1} \ , \quad D^{m_j-1} v_j|S_0 = 0 \ .$$

Le n°12 et une récurrence sur j montre qu'ils définissent sans ambiguité des v_j tels que $|D^{m_1+\dots+m_j-j} v_j, S_t|_2$ est une fonction bornée de t. On a :

$$D^{m_1+\dots+m_j+n-p} v_j|S_0 = 0$$

et, vu le lemme 12 :

$$(13.8)\quad |D^{m_1+\dots+m_j+n-j,\infty} v_j, S_t, \rho|_2 \ll \psi_j(t, \rho)$$

les ψ_j étant les séries formelles en ρ que définissent les problèmes de Cauchy :

$$(13.9)_j \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - c_1(\rho)(1 + \rho\frac{\partial}{\partial \rho})\right]\psi_j(t,\rho) = \psi_{j-1}(t,\rho), \quad \psi_j(0,\rho) = 0$$

où $\psi_0 = \psi$, $j = 1,\dots,p$. Vu le n°12, $u = v_p$ est la solution unique du problème (13.1) ; (13.8) donne (13.6), car ψ_p est la solution φ du problème (13.5).

<u>La preuve de</u> (13.7) est la suivante : il s'agit de prouver que

$$(13.10) \qquad |D^{\infty}D^{\gamma}u, S_t, \rho|_2 \ll c_2(\rho)(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho})^q \ \varphi(t,\rho) ,$$

pour tout γ tel que

$$|\gamma| \leqslant m + n - p + q \quad , \quad \text{où} \quad q < p \ .$$

Nous le prouverons en montrant ceci :

1°) l'équation $a\,u = v$ implique une relation

$$(13.11) \qquad D^{\gamma}u = e_{\gamma}(x,D)u + f_{\gamma}(x,D)D_0^{n-p}\,v ,$$

où e_{γ} et f_{γ} sont des opérateurs différentiels ayant les propriétés que voici :

$$\text{ordre }(e_{\gamma}) \leqslant (m+n-p,q) \ , \quad \text{ordre }(f_{\gamma}) \leqslant q$$

les coefficients de e_{γ} et f_{γ} sont des polynomes en les dérivées d'ordres $\leqslant n - p + q$ des coefficients de a ; ces polynomes sont de degré q.

2°) on a

$$(13.12) \qquad |D^{\infty}e_{\gamma}(x,D)u, S_t, \rho|_2 \ll c_2(\rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})^q\,\varphi(t,\rho) \ ;$$

3°) on a de même :

$$(13.13)\qquad |D^{\infty} f_{\gamma}(x,D) D_0^{n-p} v, S_t, \rho|_2 \ll c_2(\rho)(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho})^q \varphi(t,\rho) .$$

La preuve de (13.7) sera alors achevée.

Preuve de (13.11).- Cette relation est évidente si $(\gamma) \leqslant (m + n - p, q)$: on prend $e_{\gamma} u = D^{\gamma} u$; $f_{\gamma} = 0$. Il suffit donc de le prouver quand

$$D^{\gamma} = D_0^{m+n-p} D^{\beta} , \qquad |\beta| = q > 1 ,$$

en la supposant vraie pour $|\beta| < q$.

Appliquons $D_0^{n-p} D^{\beta}$ à l'équation $a\, u = v$; nous obtenons

$$D^{\gamma} u = g(x,D)u + \sum_{j=1}^{q-1} h_j(x,D)\, D_0^{m+n-p+j} u + D^{\beta} D_0^{n-p} v ,$$

où

$$\text{ordre } (g) \leqslant (m+n-p,\ q), \quad \text{ordre } (h_j) \leqslant (0,\ q-j).$$

Remplaçons dans la relation précédente les $D_0^{m+n-p+j} u$ par leurs expressions (13.11) : nous obtenons (13.11) pour la valeur donnée de γ .

Preuve de (13.12).- La formule du produit (4.3), de la dérivée (4.7) et la définition (9.1) de la quasi-norme formelle donnent

$$|D^{\infty} e_{\gamma} u, S_t, \rho|_2 \ll c_2(\rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})^q\ |D^{m+n-p,\infty} u, S_t, \rho|_2 \quad ;$$

on majore le second membre par (13.6).

Preuve de (13.13).-On prouve de même (13.13), en employant la formule

$$(13.14)\qquad c_0 |D^{\infty} D_0^{n-p+j} v, S_t, \rho|_2 \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j\ \varphi(t,\rho), \quad \text{pour} \quad j \leqslant q ,$$

dont voici la preuve. Puisque $D_0^{n-p+q} v|S_0 = 0$, on a

$$D_o^{n-p+j}\, v(x,t) = \int_0^t \frac{(t-t')^{p-j-1}}{(p-j-1)!}\, D_o^n\, v(x,t')\, dt' \quad ;$$

donc

$$|D^\infty D_o^{n-p+j}\, v, S_{t'}, \rho|_2 \ll \int_0^t \frac{(t-t')^{p-j-1}}{(p-j-1)!}\, |D^\infty D_o^n\, v, S_{t'}, \rho|_2 \; dt' \quad ;$$

c'est-à-dire, vu la définition (13.4) de $\psi = \psi_o$:

$$(13.15) \qquad c_o |D^\infty D_o^{n-p+j}\, v, S_{t'}, \rho|_2 \ll \int_0^t \frac{(t-t')^{p-j-1}}{(p-j-1)!}\, \psi_o(t', \rho)\, dt' \quad .$$

Or, puisque $\psi_o(t, \rho) \gg 0$, l'équation $(13.9)_1$ donne

$$\psi_1(t, \rho) \gg 0 \;, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \gg \psi_o \;;$$

l'équation $(13.9)_2$ donne alors

$$\psi_2(t, \rho) \gg 0 \;, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \gg \psi_1 \quad ;$$

d'où, en appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ à $(13.9)_2$: $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \gg \frac{\partial \psi_1}{\partial t}$; finalement :

$$(13.16) \qquad \frac{\partial^j \psi_p}{\partial t^j} \gg \frac{\partial^{j-1} \psi_{p-1}}{\partial t^{j-1}} \gg \ldots \gg \psi_{p-j} \gg 0 \quad \text{pour} \quad j \leqslant p \;.$$

D'où, puisque d'après (13.9) $\psi_j(0, \rho) = 0$ si $j > 0$:

$$\int_0^t \frac{(t-t')^{p-j-1}}{(p-j-1)!}\, \psi_o(t', \rho) dt' \ll \int_0^t \frac{(t-t')^{p-j-1}}{(p-j-1)!}\, \frac{\partial \psi_1(t', \rho)}{\partial t'}\, dt' =$$

$$\int_0^t \frac{(t-t')^{p-j-2}}{(p-j-2)!}\, \psi_1(t', \rho) dt' \ll \ldots \ll \psi_{p-j}(t, \rho) \ll \frac{\partial^j \psi_p}{\partial t^j} = \frac{\partial^j \varphi(t, \rho)}{\partial t^j} .$$

En portant cette inégalité dans (13.15), on obtient (13.14), ce qui achève la preuve de (13.7) et celle du lemme 13.1.

Notons que (13.16) résulte de l'inégalité $\psi_o(t, \rho) \gg 0$ et des relations $(13.9)_j$, où l'on peut remplacer la condition $\psi_j(0, \rho) = 0$ par $\psi_j(0, \rho) \gg 0$; on peut donc énoncer le lemme suivant, où

$$L_1 = C_1(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}) :$$

<u>Lemme</u> 13.2.- Supposons $C_1 \gg 0$,

$$[\frac{\partial}{\partial t} - L_1]^p \varphi(t, \rho) \gg 0 ,$$

$$[\frac{\partial}{\partial t} - L_1]^j \varphi(t, \rho) \gg 0 \quad \text{pour} \quad t = 0 , j = 0,1,\dots, p-1 .$$

Alors

$$0 \ll \varphi,\dots, 0 \ll \frac{\partial^p \varphi(t, \rho)}{\partial t^p} .$$

14. LE SYSTÈME DONT LA PARTIE PRINCIPALE EST DIAGONALE.- Sur la bande Y, soient des opérateurs différentiels $a(x,D)$ et $b_\mu^\nu(x,D)$ $(\mu, \nu = 1,2,\dots,N)$ du type suivant :

$a(x,D) = a_1(x,D)\dots a_p(x,D)$ est le produit de p opérateurs normaux, régulièrement hyperboliques pour les hyperplans S_t ;

ordre $(a_i) = m_i$; ordre $(a) = m = m_1 +\dots+ m_p$;

ordre $(b_\mu^\nu) = m + n^\mu - n^\nu - p + q$, où n^{ν} et q sont des entiers tels que[5)]

$$0 \leqslant q < p \leqslant n^{\nu} .$$

Posons-nous, sur Y, <u>le problème de Cauchy</u> d'inconnue $u^{\nu}(x)$.

$$(14.1) \quad \begin{cases} a(x,D)u^{\nu}(x) = \sum_{\mu} b^{\nu}_{\mu}(x,D)u^{\mu}(x) + v^{\nu}(x) \\ D^{m-1}\, u^{\nu} \,|\, S_0 = 0 \end{cases}$$

en supposant

$$(14.2) \quad D^{n^{\nu}-p+q}\, v^{\nu} \,|\, S_0 = 0 \quad \text{ce qui entraîne} \quad D^{m+n^{\nu}-p+q}\, u^{\nu} \,|\, S_0 = 0 .$$

<u>Notons</u> $c_1(\rho)$, $c_2(\rho)$, $c_3(\rho)$, $\psi(t,\rho)$ des séries formelles en ρ telles qu'on ait :

---

5) et même tels que

$$0 \leqslant q \leqslant p \leqslant n^{\nu} ,$$

si b^{ν}_{μ} ne contient pas

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m+n^{\mu}-n^{\nu}} .$$

On retrouve ainsi un théorème de L.A. Lednev [13] [14], par un prodédé dû à G. Talenti.

Signalons que la Note [11] de G. Talenti complète certains de nos résultats ; elle emploie des méthodes analogues aux nôtres, puisque son opérateur

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m}$$

est une puissance de l'opérateur strictement hyperbolique $\frac{\partial}{\partial t}$.

$$(14.3)\quad \begin{cases} c_o \left| D^{m_1+\ldots+m_j-j+n^\nu,\infty} a_{j+1}\ ,\ Y, \rho \right|_\infty \ll c_1(\rho) \\ c_o[1 + \left| D^{n^\nu -p+q,\infty} a, Y, \rho \right|_\infty]^q \ll c_2(\rho) \\ c_o \left| D^{n^\nu,\infty} b^\nu_\mu , Y, \rho \right|_\infty \ll c_3(\rho) \\ c_o \left| D^{n^\nu,\infty} v^\nu, S_t, \rho \right|_2 \ll \psi(t,\rho)\ , \end{cases}$$

les c_o étant des nombres dépendant de $\left|D^{m_1+\ldots+m_j-j+n^\nu} a_{j+1}, Y\right|_\infty$; nous poserons[6] :

$$(14.4)\quad \begin{cases} c_1(\rho)(1 + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}) = L_1(\rho, \rho\frac{\partial}{\partial\rho}) \\ c_2 c_3(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\rho})^q = L_q(\rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\rho})\ ; \end{cases}$$

L_1 et L_q sont donc des opérateurs différentiels d'ordres 1 et q .

15. RÉSOLUTION DE (14.1) PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

Définition de ces approximations.- Cette définition supposera seulement ceci : le premier terme de chacune des séries formelles (14.3) est fini ou sommable. Rappelons que t varie de 0 à $|Y|$.

Vu le lemme 13.1, le problème de Cauchy

$$(15.1)_o\qquad a(x,D)u^\nu_o(x) = v^\nu(x),\quad D^{m-1} u^\nu_o \mid S_o = 0$$

possède une solution unique u^ν_o telle que $\left|D^{m+n^\nu-p} u^\nu_o, S_t\right|_2$ est une fonction bornée de t ; (13.6) et (13.7), où l'on fait $n = n^\nu$, la majorent.

Soit un entier $k > 0$; supposons u^ν_{k-1} défini pour tout ν et

---

6) Si $p = q$, on pose :

$$c_2 c_3(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\rho})^{p-1}(1 + \frac{\partial}{\partial\rho}) = L_p(\rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\rho})\ .$$

$|D^{m+n^\nu -p+q} u^\nu_{k-1}, S_t|_2$ fonction sommable de t ; vu le lemme 13.1, le problème de Cauchy

$$(15.1)_k \qquad a(x,D)u^\nu_k(x) = \sum_\mu b^\nu_\mu(x,D)u^\mu_{k-1}(x) \quad , \quad D^{m-1} u^\nu_k|S_0 = 0$$

possède une solution unique u^ν_k telle que $|D^{m+n^\nu -p} u^\nu_k, S_t|_2$ est une fonction bornée de t ; (13.6) et (13.7) la majorent;en effet :

$$|D^{n^\nu} b^\nu_\mu u^\mu_{k-1}, S_t|_2 \text{ est sommable et } \quad D^{n^\nu -p+q} b^\nu_\mu u^\mu |S_0 = 0 ,$$

vu l'hypothèse précédente, complétée par le théorème du produit, et le lemme que voici :

<u>Lemme</u> 15.1.- On a $D^{m+n^\nu -2p+2q} u^\nu_{k-1}|S_0 = 0$, si u^ν_k est défini.

<u>Preuve</u>.- Si $k = 1$, cela résulte de (14.2) et $(15.1)_0$. Soit $k \geqslant 2$; supposons prouvé que

$$D^{m+n^\mu -2p+2q} u^\mu_{k-2}|S_0 = 0 ;$$

puisque ordre $(b^\nu_\mu) \leqslant m + n^\mu - n^\nu - p + q$, on a

$$D^{n^\nu -p+q}(b^\nu_\mu u^\mu_{k-2})|S_0 = 0 ,$$

donc, vu $(15.1)_k$ et puisque $q < p$:

$$D^{m+n^\nu -2p+2q} u^\nu_{k-1}|S_0 = 0 .$$

<u>Définitions de séries formelles</u>.- Soient $\varphi_k(t, \rho)$ des séries formelles vérifiant les inégalités

$$(15.2)_0 \qquad \begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - L_1]^p \varphi_0(t, \rho) \gg \psi(t, \rho) \\ [\frac{\partial}{\partial t} - L_1]^j \varphi_0(t, \rho) = 0 \quad \text{pour } t = 0, \quad j = 0,\dots, p-1 ; \end{cases}$$

$$(15.2)_k \qquad \begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - L_1]^p \varphi_k(t, \rho) \gg L_q\, \varphi_{k-1}(t, \rho) \\ [\frac{\partial}{\partial t} - L_1]^j \varphi_k(t, \rho) = 0 \quad \text{pour } t = 0,\ j = 0,\dots, p-1 \end{cases}$$

où $k = 1,2,\ldots$. Soit

$$\varphi(t,\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t,\rho) .$$

La note 12.2 s'applique à (15.2) ; les coefficients des séries formelles φ, φ_k peuvent prendre la valeur $+\infty$; ils sont $\geqslant 0$, car, vu le lemme 13.2 :

$$(15.3) \qquad \frac{\partial^j \varphi_k}{\partial t^j} \gg 0 , \quad \frac{\partial^j \varphi}{\partial t^j} \gg 0 \quad \text{pour } j = 0,\ldots, p .$$

<u>Lemme</u> 15.2.- Pour tous les k tels que $\varphi_k(t,0)$ est une fonction bornée de t, $u_k^\nu(x)$ existe et vérifie[7)]

$$(15.4)_k \qquad |D^{m+n^\nu-p,\infty} u_k^\nu, S_t, \rho|_2 \ll \varphi_k(t,\rho)$$

$$(15.5)_k \qquad |D^{m+n^\nu-p+q,\infty} u_k^\nu, S_t, \rho|_2 \ll c_2(\rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^q \varphi_k(t,\rho).$$

<u>Preuve</u>.- Pour $k = 0$, ce lemme est le lemme 13.1. Supposons-le établi pour $0,1,\ldots, k-1$: u_{k-1}^ν existe et vérifie $(15.7)_{k-1}$; or nous supposons $\varphi_k(t,0)$ bornée ; donc le second membre de $(15.2)_k$ est sommable en t pour $\rho = 0$; donc celui de $(15.5)_{k-1}$; donc

$$|D^{m+n^\nu-p+q} u_{k-1}^\nu, S_t|_2 ;$$

donc u_k^ν existe ; le lemme 13.1 donne $(15.4)_k$ et $(15.5)_k$ puisque, vu

---

7) Si $p = q$, alors $(15.5)_k$ s'écrit :

$$|D^{m+n^\nu-1,\infty} u_k^\nu, S_t, \rho|_2 \ll c_2\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{p-1} \varphi_k(t,\rho) .$$

$(15.5)_{k-1}$[8] et la formule du produit (10.1) ; on a :

$$c_o \left| D^{n^\nu} b^\nu_\mu u^\mu_{k-1}, S_t, \rho \right|_2 \ll L_q \; \varphi_{k-1}(t, \rho) \quad .$$

Complétons le lemme précédent par trois remarques évidentes :

$\sum\limits_k \varphi_k(t,0)$, qui est d'après (15.2) une série de fonctions croissantes $\geqslant 0$, ne peut converger qu'uniformément (à l'intérieur de son intervalle de convergence) ;

si u^ν_k existe quel que soit k et si la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| D^{m+n^\nu - p} u^\nu_k , S_t \right|_2$$

converge uniformément, alors le problème de Cauchy (14.1) possède la solution

$$u^\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u^\nu_k(x) \; ;$$

l'émission[9] du support de v contient les supports de $u^\nu_o, \ldots, u^\nu_k, \ldots, u^\nu$.

Nous obtenons la conclusion suivante :

<u>Proposition</u> 15.- Si $\varphi(t,0)$ est une fonction bornée de t pour $0 \leqslant t \leqslant |Y|$, alors le problème de Cauchy (14.1) possède une solution $u^\nu(x)$ telle que :

(15.6) $\quad \left| D^{m+n^\nu -p, \infty} u^\nu , S_t, \rho \right|_2 \ll \varphi(t, \rho)$,

(15.7) $\quad \left| D^{m+n^\nu -p+q, \infty} u^\nu , S_t, \rho \right|_2 \ll c_2(\rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^q \varphi(t, \rho)$;

---

8) ... la formule de la dérivée (10.3), si $p = q, \ldots$

9) ... ou domaine d'influence.

le support de u^{ν} appartient à l'émission de celui de v.

16. REMARQUE : SYSTÈME STRICTEMENT HYPERBOLIQUE.- Si $q = 0$ la conclusion précédente se précise comme suit : (15.3) permet de calculer $\varphi_k(t,0)$ $(k=0,1,\dots)$ à partir de $\psi(t,0)$, qui est sommable par hypothèse,

$$\sum_k \varphi_k(t,0) = \varphi(t,0)$$

est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - c_1(t,0)]^p \varphi(t,0) = c_0 \ \varphi(t,0) + \psi(t,0) \\ [\frac{\partial}{\partial t} - c_1(t,0)]^j \varphi(t,0) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\dots, p-1 \ . \end{cases}$$

On complète la définition de $\varphi(t, \rho)$ arbitrairement ; par exemple en prenant tous les coefficients des séries formelles $\varphi_k(t, \rho)$, égaux à $+\infty$, à l'exception du premier, qui est $\varphi_k(t,0)$.

La conclusion du n°15 est alors celle-ci :

<u>Proposition</u> 16.- Supposons $q = 0$ et le premier terme des séries formelles (14.3) fini ou sommable. Alors le problème de Cauchy (14.1) possède une solution $u^{\nu}(x)$ vérifiant l'inégalité

$$|D^{m+n^{\nu}-p} u^{\nu}, S_t|_2 \leqslant \varphi(t,0) \ ,$$

dont le second membre est borné. Le support de u^{ν} appartient à l'émission de celui de v.

Quand $q = 0$, le système (14.1) est <u>strictement hyperbolique</u> ; la proposition 18 est un théorème d'existence classique.

17. DES PROBLÈMES DE CAUCHY FORMELS vont nous permettre de choisir commodément des φ_k vérifiant (15.2).

Définissons deux séries formelles en ρ, $\Theta(t, \rho)$ et $\Omega(t, \rho)$ par les deux problèmes de Cauchy formels :

$$(17.1) \quad \frac{\partial}{\partial t}\Theta(t, \rho) = \rho\, c_1(\rho)\frac{\partial}{\partial \rho}\Theta(t, \rho), \qquad \Theta(0, \rho) = \rho \quad ;$$

$$(17.2) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \rho\, c_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + c_1, \quad \Omega(0, \rho) = 0 .$$

La résolution de ces problèmes est élémentaire : les coefficients successifs de ρ se calculent par quadratures ; ces coefficients sont des exponentielles-polynomes ; on a :

$$(17.3) \qquad \Theta(t,0) = 0 \;; \quad \rho \ll \Theta(t, \rho) \;, \quad 0 \ll \frac{\partial^j}{\partial t^j}\Theta(t, \rho) \quad \text{pour tout } j \;;$$

$$(17.4) \qquad \Omega(t,0) = t c_1(0) \;; \; 0 \ll \frac{\partial^j}{\partial t^j}\Omega(t, \rho) \quad \text{pour tout } j .$$

La propriété de Θ et Ω que nous emploierons est la suivante : soit $\Phi(t,\theta)$ une série formelle en θ, à coefficients fonctions de t ; définissons :

$$(17.5) \qquad \varphi(t, \rho) = e^{\Omega(t, \rho)}\,\Phi(t, \Theta(t, \rho)) ,$$

ce qui a un sens car $\Theta(t,0) = 0$; on a évidemment, vu la définition (14.4) de L_1 :

$$(17.6) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - L_1\right]^j \varphi(t, \rho) = e^{\Omega(t, \rho)}\left[\frac{\partial^j}{\partial t^j}\Phi(t,\theta)\right]_{\theta = \Theta(t, \rho)}$$

Notons $M_q(t, \rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta})$ l'opérateur différentiel[10] d'ordre q, à coefficients séries formelles en ρ, tel que tout Φ vérifie :

10) ..., ne contenant pas $(\frac{\partial}{\partial \theta})^p$, si $p = q$,...

$$(17.7)\quad L_q[e^{\Omega(t,\rho)}\Phi(t,\Theta(t,\rho))] = e^{\Omega(t,\rho)}[M_q(t,\rho,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial\theta})\Phi(t,\theta)]_{\theta=\Theta(t,\rho)};$$

les coefficients de M_q sont linéaires en ceux de L_q, polynomiaux en les dérivées de Θ et Ω ; ils sont $\gg 0$.

<u>Choisissons</u> les φ_k comme suit :

$$\varphi_k(t,\rho) = e^{\Omega(t,\rho)}\,\Phi_k(t,\Theta(t,\rho)),$$

les $\Phi_k(t,\theta)$ étant définis par les problèmes de Cauchy formels, dont la résolution est élémentaire :

$$(17.8)_o\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^p}{\partial t^p}\Phi_o(t,\theta) = \psi(t,\theta), \\[2ex] \dfrac{\partial^j}{\partial t^j}\Phi_o(t,\theta) = 0 \quad \text{pour}\quad t=0,\ j=0,\dots,p-1\ ; \end{cases}$$

$$(17.8)_k\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^p}{\partial t^p}\Phi_k(t,\theta) = M_q(t,\theta,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial\theta})\,\Phi_{k-1}(t,\theta) \\[2ex] \dfrac{\partial^j}{\partial t^j}\Phi_k(t,\theta) = 0 \quad \text{pour}\quad t=0,\ j=0,\dots,p-1, \end{cases}$$

où $k = 1,2,\dots$. Soit

$$(17.9)\qquad \Phi(t,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k(t,\theta).$$

La note 12.2 s'applique à (17.8) ; les coefficients des séries formelles Φ, Φ_k peuvent prendre la valeur $+\infty$; ils sont évidemment ≥ 0 ; plus précisément :

$$(17.10)\quad \frac{\partial^j}{\partial t^j}\Phi_k(t,\theta)\gg 0,\quad \frac{\partial^j}{\partial t^j}\Phi(t,\theta)\gg 0\quad \text{pour}\quad j=0,\dots,p.$$

De (17.6), où $\Omega \gg 0$, et de $(17.8)_o$, où l'on fait $\theta = \Theta \gg \rho$, résulte que φ_o vérifie $(15.2)_o$. De (17.6), (17.7) et $(17.8)_k$, où l'on fait $\theta = \Theta \gg \rho$, résulte que φ_k vérifie $(15.2)_k$.

On a

$$(17.11) \quad \varphi(t, \rho) = e^{\Omega(t, \rho)} \Phi(t, \Theta(t, \rho)) ;$$

en particulier, vu (13.3) et (13.4) :

$$\varphi(t,0) = e^{tC_1(0)} \Phi(t,0) .$$

La proposition 15 prouve donc ceci :

<u>Proposition</u> 17.- Si $\Phi(t,0)$ est une fonction bornée de t pour $0 \leq t \leq |Y|$, alors le problème de Cauchy (14.1) possède une solution $u^\nu(x)$, qui satisfait (15.6) et (15.7) et dont le support appartient à l'émission de celui de v.

18. $\Phi(t,\theta)$ PEUT ÊTRE CARACTERISÉ PAR UN PROBLÈME DE CAUCHY FORMEL, dont la solution n'est pas élémentaire, comme l'était celle des problèmes (17.1), (17.2), (17.8) :

<u>Proposition</u> 18.1.- Soit un opérateur $M_q(t, \rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \rho})$, d'ordre $q \leq p$ ne contenant pas $(\frac{\partial}{\partial \rho})^p$, dont les coefficients sont des séries formelles $\gg 0$ en ρ, ayant elles-mêmes pour coefficients des fonctions bornées de t $(0 \leq t \leq |Y|)$. Soit $\psi(t, \rho)$ une série formelle $\gg 0$, à coefficients fonctions sommables de t. Définissons Φ_k et Φ par (17.8) et (17.9), où nous remplaçons θ par ρ.

1°) Si les coefficients de $\frac{\partial^j}{\partial t^j} \Phi(t, \rho)$ $(j = 0,\dots, q)$ sont des fonctions sommables de t, alors $\Phi(t, \rho)$ est une solution du problème de Cauchy formel :

$$(18.1)\qquad \frac{\partial^p}{\partial t^p}\Phi(t,\rho) = M_q\,\Phi(t,\rho) + \psi(t,\rho)\ ,\ \frac{\partial^j \Phi}{\partial t^j} = 0 \quad \text{pour } t=0,\ j=0,\dots,p-1.$$

2°) On a

$$(18.2)\qquad \frac{\partial^j}{\partial t^j}\Phi(t,\rho) \ll \frac{\partial^j}{\partial t^j}\Psi(t,\rho) \quad \text{pour } j=0,\dots,p\ ,$$

quelle que soit la série formelle $\Psi(t,\rho)$ vérifient les inégalités :

$$(18.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^p}{\partial t^p}\Psi(t,\rho) \ll M_q\,\Psi(t,\rho) + \psi(t,\rho)\ , \\[2ex] \dfrac{\partial^j}{\partial t^j}\Psi(t,\rho) \gg 0 \quad \text{pour } j=0,\dots,p-1\ . \end{cases}$$

<u>Note</u> : Autrement dit : Φ est la plus petite des solutions de (18.3).

<u>Preuve de</u> 1°).- Vu (17.10), les coefficients de la série formelle

$$\sum_k \frac{\partial^j \Phi_k}{\partial t^j} \quad (j=0,\dots,q)$$

sont des séries de fonctions croissantes $\geqslant 0$; elles convergent donc uniformément, sauf peut-être au voisinage de $t = |Y|$; (18.1) résulte donc de (17.8).

<u>Preuve de</u> 2°).- Notons

$$\Delta_{\gamma}(t,\rho) = \Psi(t,\rho) - \sum_{k=0}^{K-1}\Phi_k(t,\rho) \quad \text{si } K>0$$

$$\Delta_o(t,\rho) = \Psi(t,\rho)\ .$$

Les relations (18.1) et (17.8) donnent, si $K > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^p}{\partial t^p}\Delta_K(t,\rho) \gg M_q\,\Delta_{K-1} \\[2ex] \dfrac{\partial^j \Delta_K}{\partial t^j} \gg 0 \quad \text{pour } t=0,\ j=0,\dots,p-1\ ; \end{cases}$$

d'autre part, vu (18.3),

$$\frac{\partial^j \Delta_o}{\partial t^j} \gg 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\ldots, p, \quad M_q \Delta_o \gg 0 \ .$$

D'où

$$\frac{\partial^j \Delta_K}{\partial t^j} \gg 0 \quad (j = 0,\ldots, p) \ ,$$

successivement pour $K = 1, 2,\ldots$; d'où (18.2).

En résumé, le § 3 a réduit <u>le problème de Cauchy</u> (14.1) à la majoration de la solution minimum du <u>problème de Cauchy formel</u> (18.1), c'est-à-dire à la recherche <u>d'une solution des inégalités</u> (18.3).

§ 4. <u>Résolution du problème de Cauchy formel</u>

Il s'agit de montrer que le problème (18.1) possède une solution à coefficients finis, sous des hypothèses à préciser. Il suffit de construire une solution des inégalités (18.3) ; nous le ferons à l'aide du théorème de Cauchy-Kowalewski et des opérateurs que voici :

19. OPÉRATEURS SUR LES SÉRIES FORMELLES.- Soit une suite de nombres > 0 :

$$\lambda = (\lambda_o = 1, \lambda_1,\ldots,\lambda_s,\ldots) \ ;$$

nous ferons opérer λ comme suit sur une série formelle $\Phi(\rho)$:

si

$$\Phi(\rho) = \sum_s \frac{\rho^s}{s!} \Phi_s \ ,$$

alors

$$\lambda \Phi(\rho) = \sum_s \lambda_s \frac{\rho^s}{s!} \Phi_s \ .$$

Le produit des deux opérateurs $\lambda' = (\ldots, \lambda'_s,\ldots)$, $\lambda'' = (\ldots, \lambda''_s,\ldots)$ est évidemment $\lambda'\lambda'' = (\dots, \lambda'_s\lambda''_s, \dots)$; si $\lambda = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_1^s, \dots)$ alors $\lambda\Phi(\rho) = \Phi(\lambda_1 \rho)$; il nous suffira donc de nous limiter au cas où $\lambda_1 = 1$.

Evidemment

$$(19.2) \qquad \lambda(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\Phi) = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\lambda\,\Phi)$$

Si Φ et $\Psi \gg 0$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que

$$(19.3) \qquad \lambda(\Phi\,\Psi) \ll (\lambda\,\Phi)(\lambda\,\Psi)$$

est que

$$(19.4) \qquad \lambda_{r+s} \leqslant \lambda_r\lambda_s \ .$$

(Il suffit de le prouver quand $\Phi(\rho) = \rho^r$, $\Psi(\rho) = \rho^s$; c'est alors évident)

Nous supposerons désormais (19.4), qui implique $\lambda_{r+1} \leqslant \lambda_r$, donc :

$$(19.5) \qquad 1 = \lambda_0 = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \dots \geqslant \lambda_s \geqslant \dots .$$

D'où, si $\Phi \gg 0$:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\lambda\,\Phi) \ll \lambda(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}) \ .$$

L'inégalité en sens opposé que voici est celle que nous aurons à employer : soit $\Phi \gg 0$; pour que

$$(19.6) \qquad \lambda(\frac{\partial}{\partial\rho})^j\Phi \ll (\frac{\partial}{\partial\rho})^j(\eta + \varepsilon\rho\frac{\partial}{\partial\rho})^r(\lambda\,\Phi), \quad \text{si} \quad j \leqslant q \ ,$$

(q, ε et η : constantes), il faut et suffit que

$$(19.7) \qquad \lambda_{s-q} \leqslant (\eta + \varepsilon s)^r\lambda_s \ , \quad \text{quel que soit} \quad s \ .$$

(Il suffit de le prouver quand $\Phi(\rho) = \rho^s$; c'est alors immédiat, vu (19.2) et (19.5)).

Pour satisfaire (19.7), il suffit de choisir $(s!)^{\delta}\lambda_s$ croissant, δ étant un nombre tel que $0 \leqslant q\,\delta \leqslant r$;

$$(19.8)\quad \begin{cases} \text{si } q\,\delta = r\,, \text{ on prend } \varepsilon = 1\,,\ \eta = 0\,; \\ \text{si } 0 < q\,\delta < r, \text{ on prend } \varepsilon > 0 \text{ et } \eta = \varepsilon^{p'}\,, \\ p' \text{ étant le nombre } < 0 \text{ tel que } \dfrac{r}{q\,\delta} + \dfrac{1}{p'} = 1\,; \\ \text{si } \delta = 0, \text{ on prend } \eta = 1,\ \varepsilon = 0\,. \end{cases}$$

<u>Preuve</u>.- Si $(s!)^{\delta}\lambda_s$ est croissant, alors (19.7) est vérifié quand

$$\frac{s!^{\delta}}{(s-q)!^{\delta}} \leqslant (\eta + \varepsilon s)^r\,,\quad \text{quel que soit } s\,;$$

puisque

$$\frac{s!}{(s-q)!} \leqslant s^q\,,$$

il suffit d'avoir

$$s^{q\,\delta} \leqslant (\eta + \varepsilon\, s)^r\,,\quad \text{quel que soit } s.$$

Il est nécessaire que

$$0 \leqslant q\delta \leqslant r\,.$$

Notons $p = \dfrac{q\,\delta}{r}$. Si $p = 1$, on prend évidemment $\eta = 0$, $\varepsilon = 1$. Si $0 < p < 1$, la concavité de s^p montre qu'on peut prendre

$$\eta + \varepsilon\, s = s_0^p + (s - s_0)\,\frac{d(s_0^p)}{ds_0}\,,\quad \text{quel que soit } s_0 > 0\,;$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon = p\, s_0^{p-1}\,,\qquad \eta = (1-p)s_0^p\,;$$

il suffit donc de prendre

$$\varepsilon = s_0^{p-1}\,,\qquad \eta = s_0^p = \varepsilon^{p'}\,.$$

Nous satisferons (19.4), (19.5) et (19.7) en prenant

(19.9) $$\lambda_s = (s!)^{-\delta} \quad ,$$

δ étant tel que $0 \leqslant q\,\delta \leqslant r$.

Résumons ce qui précède :

<u>Lemme</u> 19.- Etant donnée une série formelle

$$\Phi(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \Phi_s$$

et un nombre δ tel que $0 \leqslant q\,\delta \leqslant r$, nous notons

(19.10) $$\lambda\Phi(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{(s!)^{1+\delta}} \Phi_s \quad .$$

Nous avons alors (19.2), (19.3) et (19.6), où ε et η sont des constantes définies par (19.8).

20. CLASSE DE GEVREY FORMELLE.- <u>Définition</u>.- Etant donnés un entier $p \geqslant 0$ et un nombre $\alpha \geqslant 1$, nous nommons classe de Gevrey formelle $\Gamma^{p,(\alpha)}(|Y|)$ l'ensemble des séries formelles en ρ , à coefficients fonctions de t $(0 \leqslant t \leqslant |Y|)$,

(20.1) $$\Phi(t, \rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \Phi_s(t) \quad ,$$

vérifiant la condition suivante :

(20.2) $$\lambda \frac{\partial^j}{\partial t^j} \Phi(t, \rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{(s!)^{\alpha}} \frac{d^j}{dt^j} \Phi_s(t) \qquad (j = 0, \ldots, p)$$

sont des fonctions de ρ holomorphes à l'origine, uniformément par rapport à t : il existe un voisinage de $\rho = 0$, indépendant de t, où elles ont une borne, indépendante de t.

Cette condition peut donc s'énoncer :

$$(20.3) \qquad \sup_{s,t} \frac{1}{[1+s]^{\alpha}} \left| \frac{d^j \Phi_s(t)}{dt^j} \right|^{\frac{1}{s}} < \infty .$$

<u>Définition</u>.- $\Gamma^{(\alpha)}$ est l'ensemble des $\Phi(\rho) \in \Gamma^{p,(\alpha)}$.

Décrivons les propriétés de $\Gamma^{p,(\alpha)}$:

<u>Lemme</u> 20.1.- $\Gamma^{p,(\alpha)}$ est une algèbre, stable pour $\frac{\partial}{\partial \rho}$.

<u>Preuve</u> : (19.3), puis (19.2).

Voici un lemme qui sera appliqué à la série formelle composée (17.5) :

<u>Lemme</u> 20.2.- Les hypothèses

$$0 \ll \Phi(t, \rho) \in \Gamma^{p,(\alpha)} , \quad 0 \ll \Theta(t, \rho) \in \Gamma^{p,(\alpha)} , \quad \Theta(t,0) = 0$$

impliquent

$$\Phi(t, \Theta(t, \rho)) \in \Gamma^{p,(\alpha)} .$$

<u>Preuve</u>.- Par hypothèse :

$$\Theta(t, \rho) = \rho\, \psi(t, \rho) \; ; \; \lambda\, \Phi(t, \rho) = \varphi(t, \rho) \quad \text{et} \quad \lambda\, \psi(t, \rho) = \psi(t, \rho)$$

sont des fonctions de ρ holomorphes à l'origine. Vu (19.3)

$$\lambda [\Theta(t, \rho)]^s \ll [\psi(t, \rho)]^s \lambda \rho^s ;$$

d'où, vu (19.3)

$$\lambda[\Phi(t, \Theta(t, \rho))] = \sum_s \frac{\lambda[\Theta(t, \rho)]^s}{s!} \Phi_s(t) \ll$$

$$\sum_s \frac{(\lambda \rho^s)}{s!} [\psi(t, \rho)]^s \Phi_s(t) = \varphi(t, \rho\, \psi(t, \rho)) ;$$

or $\varphi(t, \rho\, \psi(t, \rho))$ est holomorphe en ρ , à l'origine, uniformément par rapport à t ; donc $\lambda[\Phi(t, \Theta(t, \rho))]$ aussi : le lemme est prouvé.

Voici un lemme que nous appliquerons aux problèmes de Cauchy (17.1) et (17.2) :

<u>Lemme</u> 20.3.- Soit $\Phi(t, \rho)$ la série formelle solution du problème de Cauchy

$$(20.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(t, \rho)}{\partial t} = [\rho\, C_1(\rho) \dfrac{\partial}{\partial \rho} + C_2(\rho)]\, \Phi(t, \rho) + C_3(\rho) \\[2ex] \Phi(0, \rho) = C_4(\rho) \end{cases}$$

où

$$0 \ll C_i(\rho) \in \Gamma^{(\alpha)} \quad ;$$

on a

$$0 \ll \Phi(t, \rho) \in \Gamma^{p,(\alpha)} \quad , \text{ quel que soit } p \text{ .}$$

<u>Preuve pour</u> $p = 0$.- Les coefficients de $\Phi(t, \rho)$ se calculent successivement, par quadratures : ce sont des exponentielles-polynomes $\geqslant 0$; donc (20.4) a une solution unique $\Phi(t, \rho)$; $\Phi(t, \rho) \gg 0$.

Notons $c_i(\rho) = \lambda C_i(\rho)$. Soit $\varphi(t, \rho)$ la solution du problème de Cauchy-Kowalewski, qui s'intègre par quadratures :

$$(20.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \rho) = [\rho\, c_1(\rho) \dfrac{\partial}{\partial \rho} + c_2(\rho)]\, \varphi(t, \rho) + c_3(\rho) \\[2ex] \varphi(0, \rho) = c_4(\rho) \ ; \end{cases}$$

ces quadratures montrent que $\varphi(t, \rho)$ est holomorphe dans un bicylindre : $|t| \leqslant |Y|$, $|\rho| <$ const.

Les formules (19.2) et (19.3) donnent

$$(20.6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\lambda\Phi(t,\rho) \ll [\rho c_1(\rho)\dfrac{\partial}{\partial\rho} + c_2(\rho)]\lambda\Phi(t,\rho) + c_3(\rho) \\ \lambda\Phi(0,\rho) = c_4(\rho). \end{cases}$$

La comparaison de (20.5) et (20.6) montre que les coefficients successifs de $\varphi(t,\rho) - \lambda\Phi(t,\rho)$ sont $\geqslant 0$; d'où

$$\lambda\Phi(t,\rho) \ll \varphi(t,\rho) ,$$

ce qui prouve que $\lambda\Phi(t,\rho)$ est une fonction de ρ holomorphe à l'origine, uniformément par rapport à t : le lemme est prouvé pour $p = 0$.

Preuve pour $p > 0$.- On déduit de (20.4) que $\dfrac{\partial^j\Phi}{\partial t^j}$ vérifie un problème de Cauchy du même type ; le raisonnement précédent prouve donc que $\lambda\dfrac{\partial^j\Phi}{\partial t^j}$ est une fonction de ρ holomorphe à l'origine.

Lemme 20.4.- Considérons le problème de Cauchy formel

$$(20.7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^p}{\partial t^p}\Phi(t,\rho) = M_q(t,\rho,\dfrac{\partial}{\partial t},\dfrac{\partial}{\partial\rho})\,\Phi(t,\rho) + \psi(t,\rho) \\ \dfrac{\partial^j}{\partial t^j}\Phi(t,\rho) = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0 , \quad j = 0,\dots, p-1 \end{cases}$$

où M_q est un opérateur différentiel d'ordre $q \leqslant p$; ne contenant pas $(\frac{\partial}{\partial t})^p$; par hypothèse $\psi(t,\rho)$ et les coefficients de M_q sont des séries formelles en $\rho \in \Gamma^{0,(\alpha)}(|Y|)$; elles sont $\gg 0$. Ce problème possède au moins une solution Φ telle que

$$0 \ll \Phi \in \Gamma^{p,(\alpha)}(|Z|) ,$$

si $|Z|$ est un nombre > 0 suffisamment petit et si

$$1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{p}{q} .$$

$|Z| = |Y|$, si $1 \leqslant \alpha < \frac{p}{q}$.

Preuve.- Vu la proposition 18.1 , il suffit de trouver $\Gamma^{p,(\alpha)}(|Z|)$ tel que

$$(20.8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^p \Phi(t,\rho)}{\partial t^p} \gg M_q(t,\rho\,,\dfrac{\partial}{\partial t}\,,\dfrac{\partial}{\partial\rho})\,\Phi\,(t,\rho) + \psi(t,\rho)\,, \\ \dfrac{\partial^j \Phi(t,\rho)}{\partial t^j} \gg 0 \quad \text{pour}\quad j = 0,\ldots, p-1\,. \end{cases}$$

Appliquons λ à (20.8), en notant :

$$\delta = \alpha - 1 \quad ;$$

$$\varphi(t,\rho) = \lambda\,\Phi(t,\rho) \quad ;$$

$c_1(\rho)$ une série formelle majorant $\lambda\,\psi(t,\rho)$ (c'est-à-dire : $\lambda\psi \ll c_1$ pour $0 \leqslant t \leqslant |Y|$) ; $m_q(\rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\rho})$ un opérateur différentiel dont les coefficients majorent les transformés par λ de ceux de $M_q(t,\rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\rho})$. Pour que (20.8) ait lieu, il suffit, vu (19.3) et (19.6), qu'on ait [11]

$$(20.9)\quad \frac{\partial^p}{\partial t^p}\,\varphi(t,\rho) \gg m_q(\rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\rho})(\eta + \varepsilon\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho})^{p-q}\,\varphi(t,\rho) + c_1(\rho)\,,$$

$$(20.10)\qquad \frac{\partial^j}{\partial t^j}\,\varphi(t,\rho) \gg 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\ldots, p\,.$$

Rappelons que (19.6) exige $q\,\delta \leqslant p-q$, c'est-à-dire $q\,\alpha \leqslant p$.

Pour réaliser (20.10) et la condition $\Phi \in \Gamma^{p,(\alpha)}(|Z|)$, il suffit de choisir $\varphi(t,\rho)$ holomorphe en (t,ρ) dans le bicylindre

$$|t| \leqslant |Z| \quad , \quad |\rho| < \text{const.}$$

ses coefficients de Taylor étant $\geqslant 0$. Par hypothèse m_q et c_1 sont holomorphes au voisinage de $\rho = 0$.

---

11) Rappelons que si $p = q$, alors $\delta = 0$, $\alpha = 1$, $\eta = 1$, $\varepsilon = 0$.

Nous prendrons

$\varphi(t,\rho) = \varphi[\tau]$, où $\tau = t + \rho/\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \text{const.} > 0$,

$\varphi[\tau]$ étant défini par le problème de Cauchy, à données holomorphes $\gg 0$:

$$\frac{d^p \varphi[\tau]}{d\tau^p} = m_q\left(\varepsilon_0\tau, \frac{d}{d\tau}, \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{d}{d\tau}\right)\left(\eta + \varepsilon\tau\frac{d}{d\tau}\right)^{p-q}\varphi[\tau] + c_1(\varepsilon_0\tau)$$

$$\frac{d^j\varphi}{d\tau^j} = 0 \quad \text{pour} \quad \tau = 0, \quad j = 0,\ldots, p-1 ;$$

nous choisissons ε_0 assez petit pour que $m_q(\varepsilon_0\tau,\ldots)$, $c_1(\varepsilon_0\tau)$ soient holomorphes pour $|\tau| < 2|Y|$. Puisque $q \leqslant p$, le théorème de Cauchy-Kowalewski montre que $\varphi[\tau]$ est holomorphe pour $|\tau| < 2|Z|$, $|Z|$ étant suffisamment petit ; évidemment $\varphi[\tau] \gg 0$ (c'est-à-dire à ses coefficients de Taylor $\geqslant 0$) et (20.9) est vérifié pour $|t| \leqslant |Z|$, $\rho < \varepsilon_0|Z|$.

Supposons $q\alpha < p$, c'est-à-dire $q\delta < p-q$; vu (19.8), nous pouvons prendre ε voisin de 0 ; nous le prenons assez petit pour que $\varphi[\tau]$ soit holomorphe[12] pour $|\tau| < 2|Y|$: on peut donc prendre $|Z| = |Y|$.

21. APPLICATION AU PROBLÈME DE CAUCHY (14.1).- Supposons que les seconds membres $c_i(\rho)$ et $\psi(t,\rho)$ de (14.3) vérifient :

(21.1) $$c_i(\rho) \in \Gamma^{(\alpha)}, \quad \psi(t,\rho) \in \Gamma^{0,(\alpha)}(|Y|) .$$

Alors, d'après le lemme 20.3, les fonctions Θ et Ω, que définit le n°17, vérifient

$$\Theta(t,\rho), \Omega(t,\rho) \in \Gamma^{p,(\alpha)}(|Y|) .$$

Donc, vu les lemmes 20.1 et 20.2 :

12) Car les solutions d'une équation différentielle ordinaire et <u>normale</u> sont holomorphes dans le même domaine que ses coefficients.

la fonction φ que définit (17.11), vérifie

$$\varphi(t, \rho) \in \Gamma^{p,(\alpha)}(|Z|), \quad \text{si} \quad \Phi(t, \rho) \in \Gamma^{p,(\alpha)}(|Z|) ;$$

les coefficients de l'opérateur M_q, que définit la proposition 18.1, appartiennent à $\Gamma^{0,(\alpha)}(|Y|)$.

Donc, vu le lemme 20.4, les inégalités (18.4) [et même les égalités en résultant par substitution de $=$ à $\ll$] possèdent une solution $\in \Gamma^{p,(\alpha)}(|Z|)$.

Donc, vu la proposition 18.1, la fonction $\Phi(t, \rho)$ que définit le n°17 vérifie $\Phi(t, \rho) \in \Gamma^{p,(\alpha)}(|Z|)$, quand on ne fait varier t que de 0 à $|Z|$.

La proposition 17 prouve donc ceci :

<u>Proposition</u> 21.- Faisons les hypothèses (21.1) et supposons $1 \leq \alpha \leq \frac{p}{q}$; dans une bande suffisamment étroite

$$Z : 0 \leq x_0 \leq |Z| ,$$

le problème de Cauchy (14.1) possède une solution $u^\nu(x)$ telle que

$$\left| D^{m+n^\nu -p+q,\infty} u^\nu , S_t, \rho \right|_2 \in \Gamma^{0,(\alpha)}(|Z|) .$$

$$Z = Y, \quad \text{si l'on a} \quad 1 \leq \alpha < \frac{p}{q} .$$

Le support de u^ν appartient à l'émission de celui des données.

La conclusion des § 3 et 4 est <u>le théorème d'existence</u> que constitue la proposition ci-dessus.

§ 5. Fin de l'étude du système dont la partie principale est diagonale

Explicitons la proposition 21, qui est un théorème d'existence, et le théorème d'unicité qui en résulte.

22. CLASSES DE GEVREY.- Définition.- Soit $\alpha \geq 1$, $p \geq 1$; $\gamma_p^{(\alpha)}(S_0)$ désignera l'ensemble des fonctions

$$f : S_0 \to \underline{\underline{C}}$$

telles que

$$\sup_{\sigma} \frac{1}{[1+|\sigma|]^{\alpha}} [|D^{\sigma} f, S_t|_p]^{\frac{1}{|\sigma|}} < \infty \quad , \quad \text{où} \quad \sigma_0 = 0 \ ;$$

c'est la classe de Gevrey classique si $p = \infty$.

Y étant la bande $0 \leqslant x_0 \leqslant |Y|$, $\gamma_p^{n,(\alpha)}(Y)$. désignera l'ensemble des fonctions

$$f : Y \to \underline{\underline{C}}$$

telles que

$$\sup_{\beta, \sigma, t} \frac{1}{[1+|\sigma|]^{\alpha}} [|D^{\beta+\sigma} f, S_t|_p]^{\frac{1}{|\sigma|}} < \infty ,$$

$$\text{où} \quad |\beta| \leqslant n, \ \sigma_0 = 0 \ , \ 0 \leqslant t \leqslant |Y| \ .$$

Evidemment, vu (20.3), on a :

Lemme 22.- $f \in \gamma_p^{n,(\alpha)}(Y)$ équivaut à

$$|D^{n,\infty} f, Y, S_t, \rho|_p \in \Gamma^{p,(\alpha)}$$

Note.- Nous appliquerons la définition de $\gamma^{(\alpha)}$ avec $\alpha = \infty$, en convenant que dans ce cas

$$\frac{1}{[1+|\sigma|]^{\alpha}} = 1 \quad \text{si} \quad |\sigma| = 0\ , \quad \frac{1}{[1+|\sigma|]^{\alpha}} \cdots = 0 \quad \text{si} \quad |\sigma| > 0.$$

$\gamma_p^{(\infty)}(S_0)$ est donc l'espace $L_p(S_0)$ des fonctions sur S_0 dont la puissance $p^{\text{ième}}$ est sommable ; $\gamma_p^{n,(\infty)}(Y)$ est l'espace $L^n_{\infty,p}(Y)$ des fonctions sur Y dont les quasi-normes[13] $|D^n f, S_t|_p$ sont fonctions bornées de t $(0 \leqslant t \leqslant |Y|)$.

Propriétés des classes de Gevrey γ .- (Voir : Gevrey [2]). Evidemment : ces classes croissent avec α ;

si $\beta_0 = 0$, D^{β} les applique en elles-mêmes.

Les formules du produit (10.1) et (18.3), les lemmes 20.1 et 22 prouvent ceci :

$\gamma_{\infty}^{(\alpha)}(S_0)$ est une algèbre et $\gamma_p^{(\alpha)}(S_0)$ un module sur cette algèbre ;
$\gamma_{\infty}^{n,(\alpha)}(Y)$ - - - - $\gamma_p^{n,(\alpha)}(Y)$ - - - -

Pour $\alpha = 1$, ces classes sont des classes de fonctions analytiques en $(x_1, \ldots, x_{\ell})$; pour $\alpha > 1$, ce sont des classes de fonctions non quasi-analytiques : on peut décomposer l'unité en une somme de fonctions leur appartenant et ayant des supports arbitrairement petits (Voir Mandelbrojt [8]).

En composant deux fonctions de l'algèbre $\gamma_{\infty}^{\alpha}(S_0)$ ou $\gamma_{\infty}^{n,(\alpha)}(Y)$ on obtient une fonction de cette classe (Voir : Gevrey [2] ; ou un résultat plus précis de Leray-Waelbroeck [7]).

En particulier : cette algèbre contient l'inverse et un de ses éléments, quand cet inverse est une fonction bornée.

Note.- Cette dernière propriété prouve qu'il va être superflu de supposer normaux les opérateurs a et a_j , comme nous l'avions fait jusqu'ici.

---

13) Normes des restrictions à S_t de leurs dérivées d'ordres $\leqslant p$.

23. EXISTENCE.- Sur la bande Y, soient des opérateurs $a(x,D)$ et $b_\mu^\nu(x,D)(\mu,\nu=1,\dots N)$ du type suivant :

$a(x,D) = a_1(x,D)\dots a_p(x,D)$ est le produit de p opérateurs régulièrement hyperboliques pour les hyperplans S_t ;

ordre $(a_j) = m_j$; ordre $(a) = m = m_1 + \dots + m_p$;

ordre $(b_\mu^\nu) = m + n^\mu - n^\nu - p + q$, où $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant n^\nu$;

b_μ^ν ne contient pas $(\frac{\partial}{\partial t})^{m+n^\mu - n^\nu}$; notons $n = \sup\limits_\nu n^\nu$;

a_{j+1} a ses coefficients $\in \gamma_\infty^{m_1+\dots+m_j-j+n,(\alpha)}(Y)$;

a - - $\in \gamma_\infty^{n-p+q,(\alpha)}(Y)$;

b_μ^ν - - $\gamma_\infty^{n^\nu,(\alpha)}(Y)$, où $1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{p}{q}$.

On considère le problème de Cauchy d'inconnue u^ν :

$$(23.1)\quad \begin{cases} a(x,D)u^\nu(x) = \sum\limits_\mu b_\mu^\nu(x,D)u^\mu(x) + v^\nu(x) \\ D^{m-1}u^\nu|S_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

THÉORÈME D'EXISTENCE.- Supposons

$$v^\nu \in \gamma_2^{n^\nu,(\alpha)}(Y)\ ,\quad D_0^j u^\nu|S_0 \in \gamma_2^{(\alpha)}(S_0) \quad (j = 0,\dots, m-1)\ .$$

Alors le problème de Cauchy (23.1) possède une solution

$$u^\nu \in \gamma_2^{m+n^\nu-p+q,(\alpha)}(Z)\ ,$$

qui est définie dans une bande suffisamment étroite

$$Z : 0 \leqslant x_0 \leqslant Z \quad ,$$

<u>et dont le support est dans l'émission de celui de</u> v <u>et</u> $D^{m-1}u|S_0$.

$Z = Y'$, <u>si</u> $1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{p}{q}$.

<u>Note</u> 23.1.- Faisons sur a une hypothèse plus stricte : a a ses coefficients $\in \gamma_{\infty}^{n,(\alpha)}(Y)$; on peut alors préciser comme suit le théorème :

$$u^{\nu} \in \gamma_{2}^{m+n^{\nu},(\alpha)}(Z).$$

<u>Note</u> 23.2.- Supposons $q = 0$: c'est le cas strictement hyperbolique. On peut choisir $\alpha = \infty$; il suffit de supposer $|D^{n^{\nu}} v^{\nu}, S_t|_2$ sommable ; $|D^{m+n^{\nu}-p+q} u^{\nu}, S_t|_2$ est borné ; $|D^{m+n^{\nu}} u^{\nu}, S_t|_2$ aussi, sous l'hypothèse de la note 23.1.

<u>Preuve du théorème quand</u>

(23.2) $$D^{m-1} u^{\nu} | S_0 = 0 \quad , \quad D^{n^{\nu}-p+q} v^{\nu} | S_0 = 0 .$$

Le problème (23.1) est identique au problème (14.1) ; le lemme 22 montre que le théorème équivaut à la proposition 21.

<u>Fin de la preuve du théorème</u>.- En appliquant D_0^j $(j = 0,\dots,n^{\nu}-p+q)$ à l'équation $a\,u^{\nu} = \sum_{\mu} b_{\mu}^{\nu} u^{\mu} + v^{\nu}$, on constate que (23.1) permet de calculer $D^{m+n^{\nu}-p+q} u^{\nu} | S_0$ et que

(23.3) $$D^{m+n^{\nu}-p+q} u^{\nu} | S_0 \in \gamma_2^{(\alpha)}(S_0) .$$

On construit w^{ν} $\gamma^{m+n^{\nu}-p+q,(\alpha)}(Y)$ tel que $D^{m+n^{\nu}-p+q} w^{\nu} | S_0$ ait les valeurs (23.3). $u^{\nu} - w^{\nu}$ est défini par un problème du type (23.1), vérifiant (23.2) : on est ramené au cas précédent.

<u>Preuve de la note</u> 23.1.- En appliquant $D_0^{n^{\nu}-p+q+1},\dots, D_0^{n^{\nu}}$ à l'équation $a\,u^{\nu} = \sum_{\mu} b_{\mu}^{\nu} u^{\mu} + v^{\nu}$ on constate que le premier terme des relations ainsi

obtenues vérifie :

$$D_0^{m+n^\nu-p+q+1} u^\nu \in \gamma_2^{0,(\alpha)}(Z), \ldots, D^{m+n^\nu} u^\nu \in \gamma_2^{0,(\alpha)}(Z) ;$$

donc

$$u^\nu \in \gamma_2^{m+n^\nu,(\alpha)}(Z) .$$

Preuve de la note 23.2.- $q = 0$; le système est strictement hyperbolique ; on applique la proposition 16.

24. UNICITÉ.- Le problème adjoint à (23.1) a au plus une solution, sous les hypothèses qu'énonce le n°23, quand

$$1 \leqslant \alpha < \frac{p}{q} .$$

Plus précisément, notons $\bar{a}(x,D)$ l'adjoint de $a(x,D)$; si

$$a(x,D)f = \sum_\beta a_\beta(x) D^\beta f ,$$

alors

$$\bar{a}(x,D) = \sum_\beta (-1)^\beta D^\beta (a_\beta f).$$

THÉORÈME D'UNICITÉ.- Supposons $1 \leqslant \alpha < p/q$. Soient $w_\mu(x)$ des distributions, définies au voisinage d'un point de S_0, vérifiant sur leur domaine de définition

$$\bar{a}(x,D) w_\mu(x) = \sum_\nu \bar{b}_\mu^\nu(x,D) w_\nu(x) ,$$

et s'annulant hors de Y. Alors

$$w_\mu = 0 \text{ au voisinage de } S_0$$

Note. Ce voisinage contient tous les points ayant, dans Y, une émission rétrograde intérieure au domaine de définition de w.

Preuve (Holmgren).- Permutons les deux bords de Y : w est définie au voisinage d'un point de $S_{|Y|}$. Prenons $\alpha > 1$ et $v^\nu \in \gamma_2^{n^\nu,(\alpha)}(Y)$, v ayant un support dont l'émission est intérieure au domaine de définition de w ; soit u^ν la solution du problème de Cauchy (23.1), on choisit

$$D^{m-1} u^\nu | S_0 = 0 \quad ;$$

on a

$$0 = \int_Y \sum_{\mu,\nu} u^\mu [\bar{a} w_\mu - \bar{b}_\mu^\nu w_\nu] dx = \int_Y \sum_{\mu,\nu} w_\nu [a u^\nu - b_\mu^\nu u^\mu] dx = \int_Y \sum_\nu w_\nu v^\nu dx.$$

Cela suffit à prouver que $w_\nu = 0$ près de $S_{|Y|}$.

§ 6. Système hyperbolique quelconque

Les théorèmes précédents s'appliquent aisément à un système hyperbolique quelconque : par exemple comme ceci :

25. EXISTENCE.- Sur une bande de $\underline{\underline{R}}^{\ell+1}$:

$$Y : 0 \leq x_0 \leq |Y| \quad ,$$

donnons-nous des opérateurs différentiels $a_\mu^\nu(x,D)$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, N)$ tels que :

$$\text{ordre } (a_\mu^\nu) = m^\mu - n^\nu \qquad (a_\mu^\nu = 0 \text{ si } m^\mu < n^\nu)$$

et que, modulo les opérateurs d'ordre inférieur à

$$m = \sum_\mu (m^\mu - n^\mu) \ ,$$

on ait[14)]

$$\text{dét. } (a_\mu^\nu) \equiv a_1(x,D) \ldots a_p(x,D) \ ,$$

---

14) Nous convenons que le déterminant de a_μ^ν, non commutatifs, est

$$\text{dét}(a_\mu^\nu) = \sum_\pi \pm a^1_{\pi(1)} \cdots a^N_{\pi(N)} \ ,$$

pour toutes les permutations π paires (+) et impaires (-).

les opérateurs différentiels a_j étant régulièrement hyperboliques sur Y pour les hyperplans $S_t : x_o = t$. Leurs ordres m_j vérifient donc

$$m = m_1 + \ldots + m_p \ .$$

Notons

$$\bar{n} = \sup_{\nu} n^{\nu} \ , \quad \underline{n} = \inf_{\nu} n^{\nu} \ .$$

Nous considérons <u>le problème de Cauchy</u> d'inconnue $u^{\mu}(x)$:

$$(25.1) \qquad \begin{cases} \sum_{\mu} a^{\nu}_{\mu}(x,D) u^{\mu}(x) = v^{\nu}(x) \\ D^{m^{\mu} - \underline{n}} u^{\mu} |S_o \quad \text{donné} \end{cases}$$

en supposant les données de Cauchy $(25.1)_2$ <u>compatibles</u> avec le système $(25.1)_1$; autrement dit : les restrictions à S_o des équations qu'on obtient en appliquant D_o^j $(j = 0, \ldots, n^{\nu} - \underline{n})$ à l'équation $\sum_{\mu} a^{\nu}_{\mu} u^{\mu} = v^{\nu}$ doivent être vérifiées par ces données de Cauchy.

Voici les hypothèses que nous faisons sur les a^{ν}_{μ} et a_j : nous notons r le plus grand entier $\leqslant p$ tel que tous les commutateurs

$$[a^{\lambda}_{\mu}, a^{\nu}_{\pi}] = a^{\lambda}_{\mu} a^{\nu}_{\pi} - a^{\nu}_{\pi} a^{\lambda}_{\mu}$$

vérifient :

$$\text{ordre } [a^{\lambda}_{\mu}, a^{\nu}_{\pi}] \leqslant \text{ordre } (a^{\lambda}_{\mu}) + \text{ordre } (a^{\nu}_{\pi}) - r$$

et que

$$\text{ordre } [\text{dét.}(a^{\nu}_{\mu}) - a_1(x,D) \ldots a_p(x,D)] \leqslant m - r \ ;$$

si $r = 1$, la première de ces deux conditions est vérifiée :

si $r = 0$, elles le sont toutes les deux et la considération des a_j est superflue, mais nous supposons que $(\frac{\partial}{\partial t})^m$ a pour coefficient dans dét.(a^ν_μ) une fonction bornée ainsi que son inverse.

Nous ajoutons un même entier à tous les entiers m^μ et n^ν de façon que $p \leqslant \underline{n}$ et nous avons donc

$$0 \leqslant r \leqslant p \leqslant \underline{n} \leqslant n^\nu \leqslant \bar{n}\ , \quad \underline{n} \leqslant m^\mu\ , \quad p \leqslant m\ .$$

Nous envisageons des classes de Gevrey (n°22), dont l'indice α est un nombre tel que

$$(25.2) \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{p}{p-r}\ ;$$

nous supposons :

a^ν_μ a des coefficients $\in \gamma_\infty^{m+\bar{n}-m^\mu+n^\nu,(\alpha)}(Y)$

a_{j+1} - - $\in \gamma_\infty^{m_1+\dots+m_j-j+\bar{n},(\alpha)}(Y)$

a - - $\in \gamma_\infty^{\bar{n},(\alpha)}(Y)$,

où $a(x,D) = a_1(x,D)\dots a_p(x,D)$.

THÉORÈME D'EXISTENCE.- Supposons

$$(25.3) \qquad v^\nu \in \gamma_2^{n^\nu,(\alpha)}(Y)\ , \quad D^{m^\mu-\underline{n}}u^\mu|S_0 \in \gamma_2^{(\alpha)}(S_0)\ .$$

Alors, dans une bande suffisamment étroite

$$Z : 0 \leqslant x_0 \leqslant |Z|$$

le problème de Cauchy (25.1) possède une solution

$$(25.4) \qquad u^\mu \in \gamma_2^{m^\mu,(\alpha)}(Z)\ ,$$

dont le support est dans l'émission de celui des données v^ν, $D^{m^\mu-\underline{n}}u^\mu|S_0$.

$$Z = Y \quad \underline{\text{si}} \quad 1 \leqslant \alpha < \frac{p}{p-r}\ .$$

Note.- Si $r = p$, ce problème (25.1) est strictement hyperbolique : $Y = Z$; on peut choisir $\alpha = \infty$ et remplir l'hypothèse $(25.3)_1$ par l'hypothèse plus générale :

$|D^{n^\nu} v^\nu, S_t|_2$ est une fonction sommable de t ;

la conclusion (25.4) s'énonce :

$|D^{m^\mu} u^\mu, S_t|_2$ est une fonction bornée de t $(0 \leq t \leq |Y|)$.

Note.- On peut compléter comme suit ce théorème : si les coefficients de a^ν_μ sont dans la classe de Gevrey $\gamma^{(\alpha)}_\infty(Y)$ et si $v^\nu \in \gamma^{(\alpha)}_2(Y)$, alors $u^\mu \in \gamma^{(\alpha)}_2(Y)$; voir Y. Ohya, [9], proposition 2.4.

Preuve quand les données de Cauchy sont $D^{m^\mu - \underline{n}} u^\mu|S_0 = 0$.- Notons $A^\mu_\nu(x,D)$ le mineur de $a^\nu_\mu(x,D)$ dans $\text{dét.}(a^\nu_\mu)$; évidemment :

ordre $(A^\mu_\nu) \leq m - m^\mu + n^\nu$;

ordre $(\text{dét.}(a^\nu_\mu) - \sum_\lambda a^\nu_\lambda A^\lambda_\nu) \leq m - r$;

les coefficients de $\sum_\lambda a^\nu_\lambda A^\lambda_\nu$ et de $\text{dét.}(a^\nu_\mu) \in \gamma^{\bar{n},(\alpha)}_\infty(Y)$; si $\mu \neq \nu$, ordre $(\sum_\lambda a^\nu_\lambda A^\lambda_\mu) \leq m + n^\mu - n^\nu - r$; les coefficients de

$$\sum_\lambda a^\nu_\lambda A^\lambda_\mu \in \gamma^{\bar{n}+n^\nu - n^\mu,(\alpha)}_\infty(Y) \subset \gamma^{n^\nu,(\alpha)}_\infty(Y) .$$

Soit U^ν la solution du problème, traité au n°23 et auquel s'applique la note 23.1 :

$$(25.5)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda,\mu} a^\nu_\lambda(x,D) A^\lambda_\mu(x,D) U^\mu(x) = v^\nu(x) \\ D^{m-1} U^\mu|S_0 = 0 ; \end{cases}$$

on a :

$$U^\nu \in \gamma_2^{m+n^\nu,(\alpha)}(Z) .$$

La condition de compatibilité de (25.1) s'écrit :

$$D^{n^\nu - \underline{n}} V^\nu \,|\, S_0 = 0 ;$$

portée dans (25.5), elle donne

$$D^{m+n^\nu - \underline{n}} U^\nu \,|\, S_0 = 0 .$$

Le problème (25.1) admet donc la solution :

$$u^\mu = \sum_\nu A^\mu_\nu U^\nu .$$

Fin de la preuve du théorème.- Soient w^μ des fonctions $\in \gamma_2^{m^\mu,(\alpha)}(Z)$ vérifiant les données de Cauchy : $u^\mu - w^\mu$ vérifie un problème du type (25.1), à données de Cauchy nulles.

26. UNICITÉ.- Le problème adjoint à (25.1) a au plus une solution, sous les hypothèses qu'énonce le n°25, quand

$$1 \leqslant \alpha < \frac{p}{p-r} .$$

Plus précisément : notons $\bar{a}^\nu_\mu$ l'adjoint de a^ν_μ ; on a :

THÉORÈME D'UNICITÉ.- Supposons

$$1 \leqslant \alpha < \frac{p}{p-r} .$$

Soient $w_\nu(x)$ des distributions, définies au voisinage d'un point de S_0, vérifiant sur leur domaine de définition

$$\sum_\nu \bar{a}^\nu_\mu(x,D)\, w_\nu(x) = 0$$

et s'annulant hors de Y. Alors

$$w_\nu = 0 \text{ au voisinage de } S_0 .$$

Preuve.- Le raisonnement de Holmgren, que cite le n° 24.

27. NÉCESSITÉ DES HYPOTHÈSES.- C. Pucci et G. Talenti nous ont signalé un cas de non-unicité dû à E. de GIORGI [15], d'où résulte ceci :

Les théorèmes d'unicité et par suite les théorèmes d'existence qui précèdent deviennent faux quand on prend $\alpha > \frac{p}{q}$, au lieu de prendre $\alpha \leqslant \frac{p}{q}$.

En effet : cet exemple dépend d'un paramètre $\alpha > 2$;

$$\frac{p}{q} = 2 \quad (m = p = 8,\ q = 4) ;$$

les coefficients des opérations sont indéfiniment différentiables et appartiennent à $\gamma_{\infty}^{n,(\alpha)}(Y)$, quel que soit n.

[1] L. GÅRDING, Cauchy's problem for hyperbolic equations, Lecture Notes, University of Chicago, 1957 ;

-- Energy inequalities for hyperbolic systems ; Colloque international de Bombay, 1964.

[2] M. GEVREY, Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Annales Ecole norm. sup., t. 35 (1917), p. 129-189

[3] L. HORMANDER, Linear partial differential operators, Springer (1963).

[4] A. LAX, On Cauchy's problem for partial differential equations with multiples caracteristics, Comm. pure appl. math., t. 9 (1956), p. 135-169.

[5] J. LERAY, Hyperbolic differential equations, Institute for adv. study, Princeton, 1953.

[6] J. LERAY, La théorie de Gårding des équations hyperboliques linéaires, CIME (Centro internazionale matematico estivo), Varenna, 1956.

[7] J. LERAY et L. WAELBROECK, Normes des fonctions composées (préliminaires à l'étude des systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts) ; article ci-dessous, p.

[8] S. MANDELBROJT, Séries adhérentes, régularisations des suites, applications, Gauthier-Villars (1952). Leçons professées au Collège de France et au Rice Institute.

[9] Y. OHYA, Le problème de Cauchy pour les équations à caractéristiques multiples, Journal of the Math. Soc. of Japan, t. 16, p. 268-286, 1964.

[10] I. PETROWSKY, Uber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differential-gleichungen, Rev. math. (Mat. Sbornik), Moscou, N.S. 2, 1937, p. 814-868 ; id. N.S. 39, 1956, p. 267-272.

[11] G. TALENTI, C.R. Acad. Sciences, t. 259 (1964), pp. 1932-33, Sur le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles.

[12] M. YAMAGUTI, Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, t. 32 (1959), p. 121-151

[13] Pour le théorème de N.A. Lednev, voir : N.A. Lednev - Nouvelles méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles, Mat. Sbornik, t. 22, 1948, p. 205-266.

[14] L. GÅRDING, Une variante de la méthode des séries majorantes (Congrès scandinave, 1964).

Pour le contre-exemple, voir :

[15] E. DE GIORGI, Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy ; Università di Roma, Rendiconti di Matematica, t. 14, 1955, p. 382-387.