Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

A. Douady

Variétés d'application

Séminaire Jean Leray, nº 4 (1964-1965), p. 15-25
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_15_0>

VARIÉTÉS D'APPLICATION

par

A. DOUADY

On fait choix d'un corps de base qui est $\underline{\underline{R}}$ ou $\underline{\underline{C}}$. Lorsqu'on parlera d'espaces de Banach, d'applications analytiques ou de variétés analytiques sans préciser, il s'agira d'espaces de Banach, etc. sur le corps de base choisi.

1. Applications de classe $\mathcal{C}^s$:

Soit $s = r + \alpha$ un nombre réel $\geqslant 0$, avec $r \in \underline{\underline{N}}$ et $0 \leqslant \alpha < 1$. Si E est un espace de Banach sur $\underline{\underline{R}}$ et F un espace de Banach, on note $\mathcal{P}^k(E,F)$ l'espace de Banach des applications $\underline{\underline{R}}$-polynomiales homogènes de degré k continues de E dans F. Si $f \in \mathcal{P}^k(E,F)$ et $t \in E$, on note pour $i \leqslant k$ $D_t^i f$ l'élément de $\mathcal{P}^{h-i}(E,F)$ défini par $f(t+u) = \Sigma\, D_t^i f(u)$.

Soit A une partie compacte de E. Si $\underline{\underline{f}} = (f_o,\ldots,f_r)$ est une suite où f_k est une application de A dans $\mathcal{P}^k(E,F)$, posons

$$\eta_k(x,t) = f_k(x+t) - \sum_{0 \leqslant i \leqslant r-k} D_t^i f_{k+i}(x) \quad \text{pour } x \in A \text{ et } x+t \in A .$$

Avec Whitney, on note $\mathcal{C}^s(A,F)$ l'espace vectoriel des suites $\underline{\underline{f}} = (f_o,\ldots,f_r)$ où f_k est une application de A dans $\mathcal{P}^k(E,F)$ telles que la fonction θ définie sur $A \times A$ par

$$\theta(x,y) = \frac{\|\eta_k(x,y-x)\|}{\|y-x\|^{s-k}} \qquad \text{pour } x \neq y$$

et $\theta(x,x) = 0$ soit continue.

Pour $\underline{\underline{f}} = (f_o,\ldots,f_r) \in \mathcal{C}^s(A,F)$ on pose

$$\underline{\underline{f}}(x) = f_o(x) \in F \qquad \text{et} \qquad \underline{\underline{f}}_x = (f_o(x),\ldots,f_r(x)) \; ;$$

ainsi $\underline{\underline{f}}_x$ sera considéré comme un <u>jet</u> à l'ordre r de E dans F en x .

Pour $\rho > 0$, on pose

$$\|\underline{\underline{f}}\|_{s,\rho} = \sum_k \rho^k \sup \|f_k(x)\| + M \sum_k \rho^s \sup_{0 \leqslant t \leqslant \rho} \frac{\|\eta_k(x,t)\|}{\|t\|^{s-k}} .$$

Ces normes jouissent des propriétés suivantes :

(i) La topologie définie sur $\mathscr{C}^s(A,F)$ par la norme $\| \ \|_{s,\rho}$ ne dépend pas de ρ ni de M, ni du choix des normes sur E et F, et en fait un espace de Banach. (En fait, $\| \ \|_{s,\rho}$ s'obtient à partir de $\| \ \|_{s,1}$ en remplaçant la norme E par une norme proportionnelle).

(ii) Soient F, F', F'' trois espaces de Banach, $\mu : F' \times F'' \to F$ une application bilinéaire continue. On définit $\mu_* : \mathscr{C}^s(A,F') \times \mathscr{C}^s(A,F'') \longrightarrow \mathscr{C}^s(A,F)$ par $\mu_*(\underline{\underline{f}}', \underline{\underline{f}}'') = \underline{\underline{f}}$ si

$$f_k(x,t) = \sum_{i+j=k} \mu(f'_i(x,t), f''_j(x,t)) \quad \text{pour} \quad x \in A \quad \text{et} \quad t \in E .$$

Pour tout s, on peut choisir M de façon que, quels que soient F, F', F'', μ et ρ, on ait

$$\|\mu_*(f',f'')\|_{s,\rho} \leqslant \|\mu\| \ \|f'\|_{s,\rho} \|f''\|_{s,\rho} .$$

Dans la suite, on supposera toujours M choisi de cette façon.

(iii) Pour tout $\underline{\underline{f}} \in \mathscr{C}^s(A,F)$, pour tout $x \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\rho > 0$ et un voisinage fermé A' de x dans A tels que $\|(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{f}}(x))|_{A'}\|_{s,\rho} < \varepsilon$, où $\underline{\underline{f}}(x)$ désigne l'élément constant

$$(\underline{\underline{f}}(x), 0, \ldots, 0) \in \mathscr{C}^s(A,F).$$

THÉORÈME 1 (Whitney). Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\underline{\underline{R}}$, F un espace de Banach, A et B deux parties compactes de E telles que $B \subset A$. Alors pour tout s la restriction $\mathscr{C}^s(A,F) \to \mathscr{C}^s(B,F)$ est un épimorphisme direct.

La démonstration de ce théorème ne sera pas donnée ici. Elle a fait l'objet d'un exposé de Malgrange dans son séminaire de l'I.H.E.S. à Bures et se trouve dans la thèse de Glaeser*.

2. Fonctorialité.

Soient E et E' deux espaces de Banach sur $\underline{\underline{R}}$, F un espace de Banach, A et A' des parties compactes de E et E' respectivement. Si $\underline{\underline{f}} \in \mathscr{C}^s(A,F)$ et si $\underline{\underline{g}} \in \mathscr{C}^s(A',E)$ et vérifie $g(A') \subset A$, on définit $\underline{\underline{f}} \circ \underline{\underline{g}} \in \mathscr{C}^s(A',F)$ par $(\underline{\underline{f}} \circ \underline{\underline{g}})_x = \underline{\underline{f}}_{g(x)} \circ \underline{\underline{g}}_x$ (composition des jets) pour tout $x \in A'$. Pour $\underline{\underline{g}}$ fixé, l'application $\underline{\underline{g}}^* : \mathscr{C}^s(A,F) \to \mathscr{C}^s(A',F)$ définie par $\underline{\underline{g}}^*(\underline{\underline{f}}) = \underline{\underline{f}} \circ \underline{\underline{g}}$ est linéaire continue.

Si U est un ouvert de F, on note $\mathscr{C}^s(A,U)$ l'ouvert de $\mathscr{C}^s(A,F)$ formé des $\underline{\underline{f}} \in \mathscr{C}^s(A,F)$ telles que $\underline{\underline{f}}(A) \subset U$. Si h est une application analytique de U dans un espace de Banach F' et $\underline{\underline{f}} \in \mathscr{C}^s(A,U)$, on définit également $h \circ \underline{\underline{f}} \in \mathscr{C}^s(A,F')$ par composition des jets.

PROPOSITION 1. Soient E un espace de Banach sur $\underline{\underline{R}}$, F et F' deux espaces de Banach, A une partie compacte de E, et h une application analytique d'un ouvert U de F dans F'. Alors pour tout s l'application

$$h_* : \mathscr{C}^s(A,U) \longrightarrow \mathscr{C}^s(A,F')$$

définie par $h_*(\underline{\underline{f}}) = h \circ \underline{\underline{f}}$ est analytique.

(*) Cette démonstration n'est écrite que pour $F = \underline{\underline{R}}$, mais s'étend sans changement au cas où F est un espace de Banach quelconque. Par contre le principe de la démonstration repose sur un quadrillage de E qui suppose E de dimension finie. J'ignore si le théorème est vrai sans cette hypothèse.

Démonstration : Soit $y \in U$, et soit $\tilde{R} = \tilde{R}(y)$ un nombre > 0 , inférieur au rayon de convergence strict de h en y , et tel que h soit représentée par son développement sur la boule de centre y et de rayon $\tilde{R}$. Notons $B_\rho(y,R)$ la boule de $\mathscr{C}^s(A,F)$ ayant pour centre l'élément constant $\underline{y} = (y,0,\dots,0)$, et de rayon $\tilde{R}$ pour la norme $\| \quad \|_{s,\rho}$. Montrons d'abord que h est analytique sur $B_\rho(y,\tilde{R})$. Soit

$$h(y+u) = \sum p_k(u) = \sum \tilde{p}_k(u,\dots,u)$$

le développement de h en y. Considérons la série $S(\underline{\underline{f}}) = \sum \tilde{p}_{k_*}(\underline{\underline{f}},\dots,\underline{\underline{f}})$, où $\tilde{p}_{k_*}$ est l'application k-linéaire de $\mathscr{C}^s(A,F) \times \dots \times \mathscr{C}^s(A,F)$ dans $\mathscr{C}^s(A,F')$ induite par $\tilde{p}_k$. Il résulte de la propriété (ii) que le rayon de convergence strict de la série S est supérieur à celui de h en y , et on vérifie immédiatement que sa somme est $h_*(\underline{y} + \underline{\underline{f}})$ pour $\| f \| < \tilde{R}$.

Soit maintenant $\underline{\underline{f}} \in \mathscr{C}^s(A,U)$ un élément quelconque. D'après la propriété (iii), pour tout $x \in A$, il existe un voisinage A' de x dans A et un $\rho_x > 0$ tels que

$$\left\| (\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{f}}(x))\big|_{A'} \right\|_{\alpha,\rho} < \tilde{R}(\underline{\underline{f}}(x)) \;;$$

comme A est compact, on peut trouver une famille finie (x_i) de points de A, des voisinages A'_i des x_i dont les intérieurs recouvrent A et un $\rho > 0$ tels que cette relation soit satisfaite pour tout i. L'application

$$h_* : \prod \mathscr{C}^s(A'_i,U) \to \prod \mathscr{C}^s(A'_i,F')$$

est alors analytique sur $\prod B(\underline{\underline{f}}(x_i),\tilde{R}_i)$, qui est un voisinage de $(\underline{\underline{f}}\big|_{A_i})$. Mais $\mathscr{C}^s(A,F)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $\prod \mathscr{C}^s(A'_i,F)$ par $g \mapsto (g|_{A'_i})$; et de même pour $\mathscr{C}^s(A,F')$. Il en résulte que

$$h_* : \mathcal{C}^s(A,U) \to \mathcal{C}^s(A,F')$$

est analytique au voisinage de $\mathbf{f}$, et la proposition est démontrée.

3. Variétés d'applications.

Soient M une variété de dimension finie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^s$, A une partie compacte de M , et X une variété analytique banachique. On note $\mathcal{C}^s(A,X)$ l'ensemble des applications $\mathbf{f}$ qui à chaque point x de A font correspondre un jet à l'ordre r de M dans X en x , et telles que, pour tout fermé A' de A contenu dans le domaine d'une carte φ de M et tel que $\mathbf{f}(A')$ soit contenu dans le domaine d'une carte $\psi : U \to U'$ de X , l'expression de $\mathbf{f}$ dans les cartes φ, ψ soit un élément de $\mathcal{C}^s(\varphi(A'),U')$.

Nous nous proposons de montrer que $\mathcal{C}^s(A,X)$ est muni naturellement d'une structure de variété analytique banachique.

Dans le cas particulier où A est contenu dans le domaine d'une carte de M et où X admet un atlas à une carte, on peut identifier A à un compact d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et X à un ouvert d'un espace de Banach F , ainsi $\mathcal{C}^s(A,X)$ s'identifie à un ouvert de l'espace de Banach $\mathcal{C}^s(A,F)$, et il résulte du n°2 que la structure de variété analytique banachique ainsi définie sur $\mathcal{C}^s(A,X)$ ne dépend pas des cartes choisies. Cette structure sera appelée la structure canonique.

THÉORÈME 2. *Soient* M *une variété de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^s$, A *une partie compacte de* M , *et* X *une variété analytique banachique. Alors il existe une structure de variété analytique banachique et une seule sur*

$\mathcal{C}^s(A,X)$ telle que, pour tout fermé A' de A contenu dans le domaine d'une carte de M et tout ouvert U de X qui soit le domaine d'une carte, l'ensemble $\Omega = \mathcal{C}^s(A,A';X,U)$ des $\underline{\underline{f}} \in \mathcal{C}^s(A,X)$ tels que $\underline{\underline{f}}(A') \subset U$ soit ouvert dans $\mathcal{C}^s(A,X)$ et que la restriction $\rho : \Omega \to \mathcal{C}^s(A',U)$ soit analytique, $\mathcal{C}^s(A',U)$ étant muni de sa structure canonique.

LEMME 1. Soient $U_1,\dots,U_n$ des domaines de cartes de X, et $V_1,\dots,V_n$ des domaines de cartes de M, et soit A un compact contenu dans $V_1 \cup \dots \cup V_n$. Il existe alors des fermés $A_1,\dots,A_n$ de A tels que $A_i \subset A \cap V_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et que, pour tout fermé A' de A, l'ensemble

$$W = \mathcal{C}^s(A',(A'_i)\ ;\ X,(U_i))$$

des $\underline{\underline{f}} \in \mathcal{C}^s(A',X)$ tels que $f(A'_i) \subset U_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ où $A'_i = A_i \cap A'$ s'identifie par $\underline{\underline{f}} \mapsto (\underline{\underline{f}}|_{A'_i})$ à une sous-variété directe de $\prod \mathcal{C}^s(A'_i,U_i)$.

Démonstration par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 1$, supposons le résultat acquis pour $n-1$. On peut trouver deux fermés A^* et A_n de A dont les intérieurs (dans A) recouvrent A et tels que

$$A^* \subset V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} \quad \text{et} \quad A_n \subset V_n .$$

Par hypothèse de récurrence, il existe des fermés $A_1,\dots,A_{n-1}$ de A^* tels que $A_i \subset A^* \cap V_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et que, pour tout fermé A'^* de A^*,

$$W^* = \mathcal{C}^s(A'^*,(A'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}\ ;\ X,(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1})$$

soit une sous-variété directe de

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \mathcal{C}^s(A'_i,U_i) .$$

Soit A' un fermé de A, posons $B_i = A'_i \cap A'_n$. pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $B = \bigcup B_i$. L'ensemble $S = \mathscr{C}^s(B,(B_i) ; X,(U_i \cap U_n))$ est une sous-variété directe de $\prod \mathscr{C}^s(B_i, U_i \cap U_n)$, mais c'est aussi un ouvert de $\mathscr{C}^s(B,U_n)$ et les deux structures de variété ainsi obtenues sur S coïncident. De même l'ensemble W' des $\underline{\underline{f}} \in W^*$ tels que $\underline{\underline{f}}(B) \subset U_n$ est ouvert dans W^*. L'application de restriction $W' \to S$ est analytique car elle est induite par $\prod \rho_i$, où

$$\rho_i : \mathscr{C}^s(A_i, U_i) \to \mathscr{C}^s(B_i, U_i)$$

est la restriction. L'application de restriction

$$\mathscr{C}^s(A'_n, U_n) \to \mathscr{C}^s(B, U_n)$$

est une submersion directe d'après le Théorème 1. Il en résulte que

$$W = W' \times_{\mathscr{C}^s(B,U_n)} \mathscr{C}^s(A'_n, U_n)$$

est une sous-variété directe de $W' \times \mathscr{C}^s(A'_n, U_n)$, ce qui démontre le lemme.

<u>Démonstration du Théorème</u>. Avec les notations du lemme, pour tout fermé A' de A contenu dans le domaine d'une carte de M et tout ouvert U de X qui soit le domaine d'une carte, $W \cap \Omega$ est ouvert dans W et la restriction $W \cap \Omega \to \mathscr{C}^s(A', U)$ est analytique. On en déduit que si $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(A_1^1, \ldots, A_{n_1}^1)$ sont deux suites de fermés de A vérifiant les conditions du lemme, en posant

$$W = \mathscr{C}^s(A, A_i) ; X, (U_i)) \quad \text{et} \quad W^1 = \mathscr{C}^s(A, (A_j^1) ; X, (U_j^1)) ,$$

l'ensemble $W \cap W_1$ est ouvert dans W et W_1 pour les topologies sous-jacentes à leurs structures de variété respectives, et que les structures de variété induites sur $W \cap W_1$ par celles de W et de W_1 coïncident. Or les ensembles de la forme W recouvrent $\mathscr{C}^s(A,X)$. La structure de variété obtenue sur $\mathscr{C}^s(A,X)$ en recollant les structures des W répond à la question, et c'est évidemment la seule ; le théorème est démontré.

4. Description de l'espace tangent à $\mathscr{C}^s(A,X)$.

Soit M une variété de dimension finie sur $\underline{\underline{R}}$ de classe $\mathscr{C}^s$, et A une partie compacte de M. Soit $\mathscr{E}$ un ensemble muni d'une projection p sur A. Une structure de fibré vectoriel de classe $\mathscr{C}^s$ sur $\mathscr{E}$ est donnée par :

- une famille (A_i) de parties fermées de A dont les intérieurs recouvrent A,

- pour chaque i une bijection φ_i de $p^{-1}(A_i)$ sur le produit de A_i par un espace de Banach E_i,

- pour chaque couple (i,j) un élément $\gamma_{i,j}$ de $\mathscr{C}^s(A_i \cap A_j, \mathscr{L}(E_i,E_j))$;

ces données étant soumises aux conditions suivantes :

(i) pour $x \in A_i \cap A_j$ et $y \in p^{-1}(x)$, $\varphi_j(y) = \gamma_{i,j}(x) . \varphi_i(y)$,

(ii) $\gamma_{i,k}|A_i \cap A_j \cap A_k = \gamma_{j,k}|A_i \cap A_j \cap A_k \cdot \gamma_{i,j}|A_i \cap A_j \cap A_k$

(la relation induite par (ii) sur les applications sous-jacentes aux $\gamma_{i,j}$ est une conséquence de (i)).

Pour tout fermé A' de A, on pose $A'_i = A' \cap A_i$ et on note $\Gamma^s(A', \mathscr{E})$ l'ensemble des familles (f_i) telles que

$$f_i \in \mathscr{C}^s(A'_i, E_i) \qquad \text{et} \qquad f_j|_{A_i \cap A_j} = \gamma_{i,j} \cdot f_i|_{A_i \cap A_j} \;.$$

Si $\underline{\underline{f}} \in \Gamma^s(A', \mathscr{E})$, il existe une section de $\mathscr{E}$ au-dessus de A' et une seule f telle que $\varphi_i(f(x)) = (x, f_i(x))$ pour tout i .

Si X est une variété analytique et si $\mathscr{F}$ est un fibré vectoriel analytique sur X , on définit de façon évidente un fibré $f^*(\mathscr{F})$ de classe $\mathscr{C}^s$ sur A pour tout $f \in \mathscr{C}^s(A,X)$. Il résulte de la construction faite au n°3 de la structure de variété sur $\mathscr{C}^s(A,X)$ que

$$T_f \mathscr{C}^s(A,X) = \Gamma^s(A, f^*(TX))$$

où TX désigne le fibré tangent de X .

Le théorème de Whitney s'étend aux fibrés de classe $\mathscr{C}^s$ de la façon suivante : pour tout fermé B de A , la restriction $\Gamma^s(A, \mathscr{E}) \to \Gamma^s(B, \mathscr{E})$ est un épimorphisme direct. En effet, soit (A_i) une famille de fermés de A dont les intérieurs recouvrent A , définissant la structure de fibré de $\mathscr{E}$, et contenus dans des domaines de cartes de M . Posons $B_i = B \cap A_i$. D'après le Théorème 1, il existe une section linéaire continue

$$\sigma_i : \Gamma^s(B_i, \mathscr{E}) \to \Gamma^s(A_i, \mathscr{E})$$

de l'application de restriction. Si (φ_i) est une partition de l'unité sur A , de classe $\mathscr{C}^s$, subordonnée au recouvrement de A par les intérieurs des A_i , on obtient une section linéaire continue

$$\sigma : \Gamma^s(B, \mathscr{E}) \to \Gamma^s(A, \mathscr{E})$$

de l'application de restriction en posant $\sigma(f) = \sum \varphi_i \cdot \sigma_i(f|_{B_i})$.
Il en résulte que si X est une variété analytique, la restriction $\mathscr{C}^s(A,X) \to \mathscr{C}^s(B,X)$ est une submersion directe.

5. Variétés de plongements.

Soient M une variété de dimension finie sur $\underline{\underline{R}}$ et de classe $\mathscr{C}^s$, $s \geqslant 1$, A une partie compacte de M, et X une variété analytique séparée. On note $\mathscr{P}\ell^s(A,X)$ la partie de $\mathscr{C}^s(A,X)$ formée des $\underline{\underline{f}}$ dont l'application sous-jacente est injective et tels que pour tout $x \in A$, l'application linéaire

$$f_1(x) : T_x M \longrightarrow T_{\underline{\underline{f}}(x)} X$$

soit injective.

PROPOSITION 2. L'ensemble $\mathscr{P}\ell^s(A,X)$ est ouvert dans $\mathscr{C}^s(A,X)$.

Démonstration. Supposons d'abord $M = E$ espace vectoriel sur $\underline{\underline{R}}$ et $X = F$ espace de Banach. Pour $u \in \mathscr{L}(E,F)$, posons

$$c(u) = \inf_{\|t\|=1} \|u(t)\|,$$

et pour

$$\underline{\underline{f}} = (f_0, f_1, \ldots) \in \mathscr{C}^s(A,F),$$

posons

$$c(\underline{\underline{f}}) = \inf_{x \in A} c(f_1(x)) .$$

Si $\underline{\underline{f}} \in \mathscr{P}\ell^s(A,F)$, $c(\underline{\underline{f}}) > 0$. Il existe un $a > 0$ tel que

$$\|\eta(x,t)\| = \|f_0(x+t) - f_0(x) - f_1(x,t)\| \leqslant \frac{1}{4} c(\underline{\underline{f}}) \|t\| \quad \text{pour } \|t\| \leqslant a.$$

Si $\underline{\underline{h}} \in \mathscr{C}^s(A,F)$ et $\|\underline{\underline{h}}\|_{s,1} \leqslant \frac{1}{4} c(\underline{\underline{f}})$, on a en posant $\underline{\underline{g}} = \underline{\underline{f}} + \underline{\underline{h}}$, les inégalités

$$c(\underline{\underline{g}}) \geqslant \frac{3}{4} c(\underline{\underline{f}}) \quad \text{et} \quad \|g_0(x+t) - g_0(x)\| \leqslant \frac{1}{4} c(\underline{\underline{f}}) \|t\| \text{ pour } \|t\| \leqslant a .$$

Ceci entraîne que $g_1(x) \in \mathscr{L}(E,F)$ est une injection de E dans F pour tout x et que $g_0(y) \neq g_0(x)$ si $\|y-x\| \leqslant a$. Si de plus

$$\|\underline{\underline{h}}\| < \frac{1}{2} \sup_{\|y-x\| \geqslant a} \|f_0(y) - f_0(x)\| ,$$

g_0 sera injective et on aura $\underline{\underline{g}} \in \mathcal{P}\ell^s(A,F)$. L'ensemble $\mathcal{P}\ell^s(A,F)$ est donc un voisinage de $\underline{\underline{f}}$, ce qui démontre la proposition dans le cas particulier étudié. Dans le cas général, si $\underline{\underline{f}} \in \mathcal{P}\ell^s(A,X)$ soit (A_i) une famille finie de fermés de A contenus dans des domaines de cartes de M , dont les images par $\underline{\underline{f}}$ soient contenus dans des domaines U_i de cartes de X , et dont les intérieurs recouvrent A . Soit (A_i') une famille de fermés de A telle que A_i' soit contenu dans l'intérieur de A_i pour tout i et que $A = \bigcup A_i'$. Si $\underline{\underline{g}} \in \mathcal{C}^s(A,(A_i) ; X,(U_i))$, pour que $\underline{\underline{g}} \in \mathcal{P}\ell^s(A,X)$, il faut et il suffit que $\underline{\underline{g}}|_{A_i} \in \mathcal{P}\ell^s(A_i,U_i)$ et que $\underline{\underline{g}}(A_i') \cap \underline{\underline{g}}(X - \mathring{A}_i) = \emptyset$. Ces conditions définissent un voisinage de $\underline{\underline{f}}$, et la proposition est démontrée.

Si M est une variété analytique compacte (donc de dimension finie) et $s \geqslant 1$, l'ensemble $\mathcal{D}iff^s(M)$ des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^s$ de M est ouvert dans $\mathcal{C}^s(M,M)$, c'est en effet l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}\ell^s(M,M)$ induisant une permutation de l'ensemble des composantes connexes de M . L'espace tangent à $\mathcal{D}iff^s(M)$ en I (application identique) est l'espace de Banach des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^s$ sur M.

Une amère déception nous attend ici : la loi de composition sur $\mathcal{D}iff^s(M)$ est continue, mais n'est pas différentiable, et $\mathcal{D}iff^s(M)$ n'est pas un groupe de Lie banachique. On peut d'ailleurs trouver, si $\dim(M) > 0$, des difféomorphismes de M arbitrairement voisins de I pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas obtenus par intégration d'un champ de vecteurs.