Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

I. Segal

La variété des solutions d'une équation hyperbolique, non linéaire d'ordre 2

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1964-1965), p. 1-80
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___3_1_0>

LA VARIÉTÉ DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION HYPERBOLIQUE, NON LINÉAIRE D'ORDRE 2

par

I. SEGAL

(MIT, Cambridge, Mass. USA)

I

Je voudrais parler de quelques résultats concernant l'extension des théories mathématiques de la mécanique rationnelle et des équations hyperboliques à la théorie physique des champs quantifiés. Comme il est bien connu, cette théorie était en proie à beaucoup de difficultés concernant sa signification précise, et tombait dans le mépris, dont elle ne fut délivrée que temporairement et partiellement par le programme de renormalisation. La difficulté de donner une signification exacte aux symboles et opérations de la théorie a conduit à la formation des écoles axiomatiques. Ces écoles ont contribué beaucoup à la clarification logique du sujet, mais elles ont souffert de deux problèmes fondamentaux, qui sont restés sans solution : i) l'absence d'exemples non-triviaux ; ii) l'absence de formulation d'une équation dynamique spécifique.

Je voudrais prendre ici une approche différente, qui accentue le constructif plutôt que l'axiomatique, quoique nous traitions aussi la formulation dans un cadre axiomatique d'une équation spécifique dynamique. Ceci conduit à une large classe d'exemples concrets de systèmes satisfaisant les postulats fondamentaux de la théorie des champs quantifiés, quoique pas dans la forme précise qui est traitée par les écoles axiomatiques. En d'autres termes, nous construirons une classe des champs d'opérateurs, - qu'on appelle souvent "champs quantifiés",- satisfaisant : i) les relations de commutation canoniques ; ii) une équation donnée aux dérivées partielles non-linéaire ; iii) l'invariance par le groupe de Lorentz.

Notre but est donc principalement de traiter à fond une situation mathématique plutôt particulière, associée à une équation aux dérivées partielles non-linéaire, donnée. D'un autre côté, beaucoup des idées, méthodes et résultats sont d'une application et d'un intérêt mathématique plus général. En fait, l'idée sous-jacente du travail est l'extension de l'analyse classique au cas de variétés de dimension infinie, - comprenant la théorie de l'intégration et la théorie des fonctions holomorphes - et particulièrement le traitement de la théorie des fonctions dans la variété des solutions d'une équation aux dérivées partielles. Une telle variété de solutions a, comme nous le verrons, une structure mathématique relativement riche, comparable à celle qui est associée à une variété algébrique. En analogie encore avec le cas d'une variété algébrique, on peut définir implicitement la variété des solutions d'une façon très simple : il suffit d'écrire une équation, par exemple:

$$\Box \phi = m^2 \phi + F(\phi) ,$$

F étant une fonction arbitraire donnée. Comme dans le cas de la géométrie algébrique, la question de l'existence ou de l'unicité des solutions au sens strict, ou dans divers sens généralisés, est seulement préliminaire à une théorie avancée substantielle. De plus, de telles variétés sont parmi les sous-variétés les plus simples d'un espace affine, ou d'un espace fonctionnel général, qui ont une structure analytique non-triviale.

Pourtant, les analogues, en dimension finie, de ces développements ne sont pas toujours bien établis quand ils existent. Un cas simple qui explique ceci ainsi que l'application de la théorie à d'autres parties des mathématiques est celui de la "représentation de Poisson" développé par A. Weil (dans Acta Math., 1964). C'est une spécialisation au cas fini (en même temps qu'une extension aux corps les plus généraux) d'une représentation du groupe infini symplectique qui a d'abord été faite en vue de la théorie des champs quantifiés, et qui est donc finalement appliquée à la théorie des nombres.

Pour plus de clarté, nous commencerons par traiter le cas des équations linéaires et de la théorie des champs quantifiés linéaires en respectant la façon usuelle dont le mathématicien prépare une théorie non-linéaire, et en interprétant mathématiquement dans ce cas très simple ce que les physiciens appellent la "quantification".

Ordinairement, les physiciens commencent par considérer une équation aux dérivées partielles particulière ; c'est essentiel de leur point de vue ; mais du point de vue mathématique, ce n'est pas l'ordre logique. En l'occurence ce qui est quantifié est essentiellement une représentation linéaire d'un groupe, plutôt qu'une équation ou un Hamiltonien ou un Lagrangien. Pour le voir, considérez l'équation relativiste la plus simple

$$(1) \qquad \Box \phi = m^2 \phi .$$

Par analogie avec l'emploi que fait Heisenberg de sa relation de commutation $pq - qp = h/i$ en mécanique quantique non-relativiste des systèmes finis, le postulat purement formel est que la fonction "classique" ϕ , c'est-à-dire une fonction à valeurs complexes, satisfaisant à l'équation (1) doit être remplacée par une fonction $\tilde{\phi}$ dont les valeurs sont des opérateurs satisfaisant aux relations de commutation "canoniques" :

$$[\tilde{\phi}(\vec{x}, t), \dot{\tilde{\phi}}(\vec{x}', t)] = iI\,\delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

(2)

$$[\tilde{\phi}(\vec{x}, t), \tilde{\phi}(\vec{x}', t)] = 0 = [\dot{\tilde{\phi}}(\vec{x}, t), \dot{\tilde{\phi}}(\vec{x}', t)]$$

(où le $\cdot$ signifie la différentiation par rapport au temps et où I est l'opérateur identité), ainsi qu'à l'équation différentielle

(3) $$\square\,\tilde{\phi} = m^2\,\tilde{\phi} \;;$$

si ces relations sont valables pour un temps t , elles sont valables pour tous les temps, donc il n'est pas nécessaire de spécifier t . En fait, elles sont valables aussi dans tous les repères de Lorentz ; donc ces conditions sont relativistes, comme l'équation originale. En outre, on peut écrire les relations de commutation plus généralement sous la forme

$$[\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)] = iID(x - y),$$

où D est la distribution définie par l'équation

(4) $$\square\, D = m^2\, D,$$

avec les données de Cauchy

$$D(\vec{x}, 0) = 0, \quad \dot{D}(\vec{x}, 0) = \delta(\vec{x}),$$

qu'on peut démontrer être invariante par le groupe de Poincaré (i.e. : groupe engendré par le groupe de Lorentz et par celui des translations). Cette fonction de "commutation" D était une fonction bien connue en mathématiques ; on peut la définir aussi comme la différence des solutions élémentaires avancée et retardée de l'équation aux dérivées partielles. Dans le cas des autres équations d'onde linéaires et d'ordre deux, tel que l'équation de Maxwell, la situation est fondamentalement semblable, mais plus compliquée algébriquement.

La question de l'existence d'opérateurs satisfaisant ces conditions, pourtant simples, a pris un long temps, avant d'être résolue d'une façon pouvant satisfaire un mathématicien contemporain. Les physiciens étaient satisfaits simplement parce qu'il n'y avait aucune intégrale infinie, - au moins aucune qu'ils ne pouvaient expliquer aisément, - dans les calculs usuels avec $\tilde{\phi}$ (qu'on appelle le champ libre). Mais nous savons maintenant que beaucoup des théorèmes du folklore physique, et même des théorèmes concernant ce champ quantique qui est le plus simple de tous, étaient complètement faux. Parmi ceux-ci se trouvait par exemple l'unicité essentielle du système, à l'équivalence unitaire près et l'unicité essentielle d'un état du système qui est invariant par le groupe de Poincaré.

D'un point de vue moderne adapté au traitement d'équations plus générales, on peut décrire la situation comme suit. Le groupe de Poincaré G agit d'une façon linéaire évidente sur l'espace $\underline{M}$ de toutes les solutions de l'équation (1). Pour être précis et pour avoir une classe invariante relativiste, nous prendrons les solutions de classe C^{∞} et à support compact dans l'espace.

Explicitons : soit L arbitraire dans G ,

$$U(L) : \phi(x) \rightarrow \phi(L^{-1}x) ,$$

fournit une représentation U de G dans $\underline{M}$. Cette représentation U laisse invariante la forme B anti-symétrique dont le noyau est, dans un sens formel, la distribution invariante $D(x - x')$, mais qu'on peut définir d'une façon simple, moins évidemment relativiste, par l'équation

$$B(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = \int (\phi^{(1)}(\vec{x}, t)\, \dot{\phi}^{(2)}(\vec{x}, t) - \dot{\phi}^{(1)}(\vec{x}, t)\, \phi^{(2)}(\vec{x}, t))\, d\vec{x} \quad .$$

On peut aussi caractériser cette forme comme la forme anti-symétrique unique invariante par le groupe de Poincaré, qui est continue dans toutes topologies raisonnables sur $\underline{M}$, comme il suit immédiatement de l'irréductibilité de la représentation U.

Le problème de construire des opérateurs de champs $\phi(x)$ satisfaisant aux relations de commutation canoniques équivaut formellement à la construction d'une application de $\underline{M}$ dans les opérateurs satisfaisant à de semblables relations. Cette application ne donnera pas une signification à $\tilde{\phi}(x)$, mais plutôt aux moyennes appropriées de la forme

$$\int \tilde{\phi}(x)\; f(x) dx ,$$

par une fonction lisse f, qui a une bonne raison mathématique ou physique d'exister effectivement. Cependant, cette application linéaire donne nécessairement des opérateurs non bornés, parce qu'il n'existe pas de solutions bornées des relations de commutation de Heisenberg ; et pour éviter des pathologies non pertinentes, il est désirable de remplacer l'application en question par une application qui lui équivaut formellement, mais qui utilise des opérateurs tels que

$$e^{i \int \tilde{\phi}(x)f(x)dx} ;$$

ces opérateurs devront satisfaire à des relations similaires à celles que H. Weyl a proposées, comme étant une amélioration mathématique des relations de Heisenberg.

<u>Définition</u> 1. Supposons que $(\underline{M}, B)$ soit un couple consistant en un espace linéaire topologique $\underline{M}$ et une forme distinguée non-dégénérée anti-symétrique B sur $\underline{M}$. Un <u>système de Weyl</u> (ou <u>système canonique</u>) sur $(\underline{M}, B)$ est un couple $(\underline{K}, W)$ consistant en un espace de Hilbert complexe $\underline{K}$, et en une application continue W de $\underline{M}$ dans le groupe des opérateurs unitaires sur $\underline{K}$, qui satisfait les relations

$$W(z)W(z') = e^{(i/2)B(z,z')} W(z + z') .$$

Si l'on a une telle application W, il est facile d'obtenir $\tilde{\phi}$ sous la forme

$$e^{i(\int \tilde{\phi}(x)f(x)dx)} = W(Pf) ,$$

où P est la projection des fonctions de classe C^{∞} et de support compact dans la variété $\underline{M}$ définie par l'équation

$$B(\phi,Pf) = \iint D(x - x')\phi(x)f(x')\,dx\,dx', \quad \phi \text{ arbitraire dans } \underline{M} ,$$

où l'on utilise le fait que B n'est pas dégénéré. De cette façon, la question se réduit à une question qui dépend seulement de l'espace $\underline{M}$ avec la forme privilégiée B et de la représentation donnée U de G par les transformations linéaires symplectiques sur $\underline{M}$, c'est-à-dire les transformations laissant invariante la forme B.

Mais, d'abord, considérons seulement la structure $(\underline{M},B)$. Existe-t-il un système canonique sur $(\underline{M},B)$? Ce résultat a été démontré d'une façon intuitive par V. Fock (Z. f. Phys. 1932), dans le cas spécial qu'on peut décrire en posant $\underline{M} = L_2(E_3)$ et $B(f,g) = \operatorname{Im} \int f\bar{g}\, d\vec{x}$. La représentation de Fock est d'une importance fondamentale, et a été rendue rigoureuse par le travail de J. Cook et d'autres, mais elle est adaptée au traitement de particules, plutôt que de champs ou d'ondes (spécifiquement, les nombres d'occupation sont diagonalisés dans la représentation de Fock, mais le champ est compliqué). On peut utiliser la représentation de Fock pour donner une réponse affirmative à la question posée dans le cas important spécial dans lequel $\underline{M}$ est un espace complexe de Hilbert (complet ou non), et B est la partie imaginaire du produit intérieur. Cependant, même dans ce cas, il est plus facile d'utiliser une représentation fournie par l'intégration fonctionnelle ; et on peut aussi adapter cette représentation au traitement des problèmes non-linéaires, comme nous le verrons plus tard.

THÉORÈME 1. <u>Supposons qu'il existe une forme symétrique positive définie continue</u> S <u>sur</u> $\underline{M}$ <u>telle que</u>

$$|B(x,y)|^2 \leq S(x,x)\ S(y,y) .$$

<u>Alors, il existe un système canonique sur</u> $(\underline{M},B)$.

Pour la démonstration soit m la distribution normale isotropique sur $\underline{M}$ relativement à la forme S. Alors la définition

$$W(z) : f(u) \to e^{(i/2)B(u,z)} f(u + z) \quad \text{sur} \quad L_2(\underline{M},m)$$

satisfait formellement les relations de Weyl. Tandis que ces opérateurs ne sont ni unitaires ni bornés dans l'espace de Hilbert $\underline{K} = L_2(\underline{M},m)$, parce que les translations par des vecteurs z dans $\underline{M}$ ne conservent pas la mesure, on peut les rendre unitaires, sans changer les relations de Weyl, en les multipliant par la racine-carrée de la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure transformée m_z par rapport à la mesure m originale (avec les interprétations usuelles dans la théorie de l'intégration fonctionnelle concernant les mesures faibles).

Quand $\underline{M}$ est de dimension finie, le système de Weyl sur $(\underline{M},B)$ est essentiellement unique : c'est une somme directe de copies de la représentation bien connue de Schrödinger (résultat classique de von Neumann). Cependant, quand $\underline{M}$ est de dimension infinie, il y a au moins une infinité continue de systèmes de Weyl irréductibles et inéquivalents. La question d'unicité est donc sérieuse. D'autre part, il reste à traiter l'équation du mouvement pour $\tilde{\phi}$, ce qui est équivalent à la question de l'action induite de la représentation U sur le système canonique. La représentation de Fock fournit une représentation irréductible spéciale qui donne aussi une réponse naturelle à cette question de l'action induite, quand $\underline{M}$ est un espace de Hilbert et U est unitaire ; mais cette hypothèse n'est pas toujours valable, et en tout cas la question reste de savoir si la représentation est unique ou même correcte.

Il se trouve qu'il y a un degré suffisant d'unicité, mais seulement dans une formulation un peu plus abstraite que celle de la mécanique quantique élémentaire. Pour chaque système canonique, on peut définir une algèbre de représentation $\underline{A}$, comme l'ensemble de tous les opérateurs de la forme

$$\int_{\underline{N}} W(z)\, d\mu(z) ,$$

où $\underline{N}$ est un sous-espace de dimension finie de $\underline{M}$, et μ une mesure finie régulière (c'est-à-dire de Radon) sur $\underline{N}$. Il y a de bonnes raisons mathématiques et physiques pour définir un état du système physique décrit par W comme une fonctionnelle linéaire positive normalisée et continue de manière appropriée. Spécifiquement, un état est une fonctionnelle linéaire E sur $\underline{A}$ telle que $\|E\| = 1$, pour la norme dans l'espace dual de $\underline{A}$, $\underline{A}$ étant normé par la borne des opérateurs, et telle que $E(T^* T) \geqslant 0$ pour tout $T \in \underline{A}$. ; en physique, on appelle $E(T)$ la valeur moyenne de T dans l'état E. D'ailleurs, il est nécessaire de supposer que $E(W(z))$ est une fonction continue de z, et que

$$E\left(\int_{\underline{N}} W(z)\, d\mu(z)\right) = \int_{\underline{N}} E(W(z))\, d\mu(z) ;$$

c'est une condition naturelle de régularité sur l'état E . Alors, cette algèbre $\underline{A}$, ainsi que l'ensemble des états réguliers, sont les objets invariants :

THÉORÈME 2. <u>Pour deux systèmes quelconques de Weyl sur</u> $(\underline{M},B)$, <u>soit</u> W <u>et</u> W' , <u>il y a un</u> $*$-<u>isomorphisme algébrique unique de</u> $\underline{A}$ <u>sur</u> $\underline{A}'$ <u>qui applique</u> $W(z)$ <u>dans</u> $W'(z)$, <u>pour tout</u> $z \in \underline{M}$, <u>et dont l'action contragrédiente applique les états réguliers du premier système dans ceux du deuxième système</u>.

Cela signifie d'abord qu'il y a l'unicité pour les grandeurs physiques essentielles, - les valeurs spectrales d'opérateurs, leur distribution de probabilité dans les états, etc. Un peu moins évident est le fait que cela fournit aussi un moyen d'étendre l'équation du mouvement au champ quantifié. En fait, si $L \in G$, la définition

$$W_L(z) = W(U(L)^{-1}z)$$

fournit un système canonique nouveau W_L . Par le Théorème 2 , il y a un automorphisme unique de l'algèbre $\underline{A}$ qui applique $W(z)$ dans $W_L(z)$, pour tout z dans $\underline{M}$. Cet automorphisme $\Theta(L)$ donne l'action de L sur les variables du champ ; son action contragrédiente donne le déplacement des états du champ quantique induit par la transformation L du groupe de Poincaré.

La classe des isomorphismes algébriques des algèbres $\underline{A}$ est essentiellement une algèbre abstraite ; en général elle n'admet pas de représentation privilégiée par des opérateurs sur un espace de Hilbert. C'est une C*-algèbre abstraite, ou une sous-algèbre dense d'une C*-algèbre abstraite. On peut caractériser de telles algèbres abstraitement, ce qui a été fait par Gelfand-Naimark, mais il ne semble pas aisé de donner une définition abstraite d'un système de Weyl, à cause de la difficulté de formuler abstraitement la continuité de $W(z)$ comme fonction de z , ce qui est essentiel, à cause de l'impossibilité de définir un état régulier pour une C*-algèbre arbitraire. Cependant, une représentation spéciale par des opérateurs dans un espace de Hilbert est associée à tous les états d'équilibre du système, c'est-à-dire aux états qui sont invariants par l'action induite du groupe de Poincaré. Cette représentation résulte de la correspondance bien connue entre les représentations et les états d'une algèbre d'opérateurs. Elle est commode pour définir la notion d'un état de vide. A tout état d'équilibre on peut associer "un système de Weyl invariant" relativement à U, au sens que voici :

Définition 2. Un système invariant de Weyl par rapport à la représentation symplectique U de G sur $(\underline{M}, B)$ est un triplet $(\underline{K}, W, \Gamma)$ où $(\underline{K}, W)$ est un système de Weyl et Γ est une représentation unitaire continue de G dans $\underline{K}$ telle que

$$\Gamma(L)\ W(z)\ \Gamma(L)^{-1} = W(U(L)\ z)\ ,$$

pour tout $z \in \underline{M}$ et $L \in G$.

En outre, à tout état d'équilibre correspond un vecteur privilégié $v \in \underline{K}$, tel que

$$\Gamma(L)v = v,\ L \in G\ ;\ E(W_{abs}(z)) = (W(z)\ v,v)\ ;$$

$$v \text{ est cyclique pour les } W(z) \text{ dans } \underline{K}\ .$$

La notation $W_{abs}(z)$ désigne un élément de l'algèbre abstraite C^*, tandis que $W(z)$ désigne l'opérateur correspondant dans l'espace concret de Hilbert $\underline{K}$ déterminé par l'état d'équilibre donné et par la correspondance citée entre les états et les représentations. Le système $(\underline{K}, W, \Gamma, v)$ est déterminé uniquement (à une équivalence unitaire près) par l'état E pour le système canonique abstrait sur $(\underline{M}, B)$; et réciproquement un tel système détermine un état unique d'équilibre.

Définition 3. Un état de vide pour le système canonique sur ($\underline{M}$, B) , relativement à une représentation donnée U est un état d'équilibre pour le groupe unitaire à un paramètre de déplacements dans le temps, $\Gamma(t)$, dans le système invariant de Weyl associé a un générateur non-négatif

THÉORÈME 3. Si la représentation U est équivalente à une représentation unitaire, il y a un état d'équilibre, en fait un continu de tels états.

Si U est une représentation unitaire continue de G, il y a un état de vide si et seulement si le générateur de déplacements dans le temps pour U (= "single-particle Hamiltonian") est non-négatif. L'état de vide est unique alors si ce générateur n'annule aucun vecteur non-nul.

Ici, l'équivalence à une représentation unitaire signifie qu'il y a une structure pré-Hilbertienne sur $\underline{M}$ qui est invariante par U et telle que la partie imaginaire du produit intérieur est la forme anti-symétrique donnée B . Il est probable que la réciproque est aussi valable, c'est-à-dire que si un état d'équilibre existe, ou au moins un état de vide, alors la représentation est équivalente à une représentation unitaire de ce type.

La représentation obtenue, quand il y a un état de vide et que la représentation donnée est unitaire, équivaut à celle de Fock, c'est-à-dire que la structure ($\underline{K}$, W, Γ,v) est complètement unitairement équivalente à la structure semblable associée avec la représentation de Fock. Mais on peut l'exprimer plus commodément en terme de fonctions holomorphes sur l'espace $\underline{M}$, relativement à la structure complexe pour laquelle la représentation U est unitaire. L'espace complexe de Hilbert pour cette représentation "holomorphe" consiste simplement en toutes les fonctions holomorphes qui sont suffisamment petites à l'infini, en sorte que la norme de Hilbert, qui s'exprime comme

$$\int_{\underline{M}} |f(z)|^2 \quad e^{-(1/4)\,\|z\|^2} \, dz$$

(définie en terme d'intégration fonctionnelle sur $\underline{M}$) est finie. L'action induite de G dans cet espace, ainsi que les opérateurs de champ, comme on dit, sont très simples dans cette représentation.

Maintenant revenons à la question de la "quantification" d'une équation linéaire donnée. Il est clair que ce qui est important est la formulation de la variété des solutions comme un espace invariant par un groupe avec une forme anti-symétrique invariante privilégiée, c'est-à-dire la formulation comme un espace invariant symplectique linéaire. Il est intéressant de noter que, en partant d'un formalisme différent et motivé par des équations quelque peu différentes, - les équations libres dans un espace-temps courbe, ou les équations de la relativité générale - A. Lichnerowicz est arrivé à des conclusions analogues, et a en fait étudié en détail et obtenu les noyaux des formes bilinéaires qui définissent la structure associée.

Dans le cas de l'espace-temps conventionnel, la formulation exigée $(\underline{M}, B, U)$, est obtenue facilement pour les équations linéaires plus générales, telles que

$$\Box\, \phi = m^2\phi + V(\vec{x})\phi \;,$$

où $V(\vec{x})$ est une fonction donnée sur l'espace ; dans ce cas, le groupe se réduit au groupe à un paramètre des déplacements dans le temps, ce qui ne change rien d'essentiel dans le traitement précédent. La distribution de commutation $D(x,x')$ ne dépend pas seulement de la différence $x-x'$, et la représentation de Fock ne s'applique pas ; en fait, dans le cas d'une équation dépendant du temps, il n'y a pas du tout de structure invariante d'espace de Hilbert. Néanmoins, on peut donner une quantification qui est simple algébriquement et appropriée physiquement ; il y a des opérateurs de champs satisfaisant effectivement aux relations canoniques de commutation et à l'équation de mouvement. Un mathématicien intéressé au cas non-linéaire cherche naturellement à explorer une structure symplectique sur la variété des solutions de l'équation non-linéaire en question.

Du point de vue classique aussi, il est naturel de considérer cette structure symplectique. On peut regarder la variété des solutions d'une équation telle que $\Box\, \phi = F(\phi)$, ou plus généralement, toutes les équations de la théorie des champs relativistes d'ordre deux, ou même l'équation abstraite très générale,

$$u'' + A(t)u' + B^2u = J_t(u)$$

(où $A(t)$ et B sont des opérateurs linéaires donnés et J_t est pour chaque t un opérateur non-linéaire donné), comme l'espace de phase d'un système continu. Il est naturel de se demander s'il existe une forme privilégiée analogue à la forme canonique dans le fibré cotangent d'une variété, ainsi qu'une mesure analogue à la mesure invariante de Liouville.

BIBLIOGRAPHIE

1. I. SEGAL, Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom, I, Mat.-fys. Medd., K. Danske Vidensk. Selsk. 31, n° 12 (1959), p.1-39, II, Canad. Jour. Math. n°13 (1961), p. 1-18, III, Illin. Jour. Math. n° 6 (1962), p. 500-523.

2. -- Differential operators in the manifold of solutions of a non-linear differential equation, Journ. de Math. 1965 (à paraître).

3. -- Quantization of non-linear systems, Jour. Math. Phys. 1960.

4. A. LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en relativité générale, Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci. n°10, P.U.F., Paris, 1961.

II

Dans la conférence précédente, nous avons indiqué comment la notion de système canonique symétrique (c.-à-d., système de Bose-Einstein) est associée naturellement à une variété linéaire symplectique. Une telle structure ne détermine les variables canoniques qu'essentiellement, comme éléments d'une algèbre abstraite d'opérateurs. (Avec plus de précision, les exponentielles complexes des variables canoniques sont les éléments d'une telle algèbre). Le concept de représentation, d'énergie positive, des variables canoniques, par des opérateurs dans un espace concret de Hilbert prend un sens bien défini quand on s'est donné la structure additionnelle d'une dynamique invariante, - c.-à.-d. donné un groupe à un paramètre de transformations linéaires symplectiques. C'est un système invariant canonique dont le générateur auto-adjoint correspondant aux déplacements dans le temps est non-négatif. Quand une telle représentation d'énergie positive existe, elle est unique à une équivalence unitaire près, à moins que la dynamique ne soit partiellement triviale. Cependant, cette représentation n'existe pas toujours ; par exemple, pour l'équation :

$$\Box \phi = -m^2\phi$$

avec une masse imaginaire, il n'y a pas de représentation d'énergie positive (autrement dit : il n'y a pas d'état de vide). En résumé, on obtient une construction mathématique générale pour ceux des problèmes de la théorie des champs linéaires symétriques qui sont essentiels physiquement.

La situation est similaire pour les champs linéaires antisymétriques. Les relations de Weyl (c'est-à-dire de commutation) sont remplacées par les relations de Clifford (ou d'anti-commutation). Celles-ci demandent une structure orthogonale au lieu d'une structure symplectique dans l'espace linéaire $\underline{M}$ donné. Pour une forme S bilinéaire donnée sur la variété $\underline{M}$, qui est symétrique et non-dégénérée, on peut définir un système de Clifford sur le couple $(\underline{M}, S)$ comme une application linéaire $z \to C(z)$ de $\underline{M}$ dans l'ensemble des opérateurs bornés auto-adjoints sur un espace complexe de Hilbert, $\underline{K}$, qui satisfont les relations :

$$C(z)\,C(z') + C(z')\,C(z) = S(z, z')\,I$$

pour z et z' arbitraires dans $\underline{M}$.

Quand $\underline{M}$ est de dimension finie paire, alors, comme il est bien connu, tout tel système $(C, \underline{K})$ est une somme directe de copies du système irréductible unique. Quand $\underline{M}$ est à dimension infinie, il y a au moins un continu de systèmes irréductibles de Clifford. Cependant, pour deux systèmes arbitraires de Clifford sur un couple $(\underline{M}, S)$ il y a un $*$-isomorphisme algébrique unique qui applique un système sur l'autre. En outre, on peut décrire les équations de mouvement par une représentation du groupe fondamental des symétries par les automorphismes de ce système, comme dans le cas symétrique. On peut introduire et traiter pareillement les concepts d'état d'équilibre et de vide.

En général, alors que les systèmes de Weyl et de Clifford sont très différents du point de vue technique, il y a une analogie extraordinaire entre les résultats finaux dans les deux cas. Pour cette raison, il est préférable de donner un traitement relativement plus détaillé du cas symétrique qu'un traitement sommaire des deux cas. En outre, le cas symétrique a l'avantage de posséder une analogie classique et d'être le cas qui s'applique au champ le mieux connu : celui de Maxwell.

Considérons maintenant le problème d'adapter au cas non-linéaire le procédé que nous avons précédemment appliqué au cas linéaire ; nous suivrons la méthode habituelle des mathématiciens. Les systèmes non-linéaires intéressants sont définis par une équation quasi-linéaire aux dérivées partielles, qui est en général du type :

(1) $$\partial u = p\,(u),$$

où ∂ est un opérateur linéaire différentiel donné et p une fonction régulière donnée.

Le premier problème est évidemment de définir l'ensemble $\underline{M}$ de toutes les solutions de l'équation (1), qu'on considèrera (par exemple, dans le cas le plus général, ce seront les germes des solutions locales) et de munir cet ensemble d'une structure appropriée de variété, en définissant son espace linéaire tangent , etc... Quand ce problème a été résolu, le deuxième problème qui se pose est de munir cette variété d'une structure symplectique appropriée. La solution de ce deuxième problème dépendra de propriétés un peu particulières à l'équation. Pour une équation quasi-relativiste, ce qui est notre principal objet, deux cas se présentent : ou bien il s'agit de l'équation du spin intégral et alors la structure symplectique est déterminée de façon locale, et est donc bien définie pour les germes des solutions. ou bien il s'agit de l'équation du spin demi-intégral, et alors la structure symplectique, quand elle existe, semble, en général, déterminée d'une façon non-locale.

Résoudre ce problème par une théorie générale des variétés différentiables semble impossible. Mais on peut procéder par analogie avec cette théorie. Il est clair que, de façon formelle, l'espace tangent à l'ensemble $\underline{M}$ en un point u doit être identifié à l'ensemble T_u des solutions de l'équation variationnelle d'ordre un :

$$\partial v = p'(u)\, v. \tag{2}$$

Cette définition donne un concept correspondant à celui de champ des vecteurs sur $\underline{M}$, et il est possible de composer de tels champs de vecteurs, et de former le commutateur de deux champs de vecteurs.

On peut clarifier la situation par la considération d'un champ non-linéaire scalaire sur un espace-temps de type "hyperbolique normal" :

$$\Box\, u = p(u) \quad , \tag{3}$$

où p est une fonction donnée régulière d'une variable réelle. Le cas dans lequel p est linéaire a été traité en détail par A.Lichnerowicz, en utilisant la théorie générale de J. Leray pour les équations hyperboliques, ainsi qu'une application de cette théorie qui a été faite antérieurement par Mme Choquet.

On traite de même l'équation (3) : l'espace T_u des vecteurs v tangents en u à la variété $\underline{M}$ des solutions locales de l'équation (3) , est défini par l'équation (2) avec $\partial = \Box$

Pour construire des solutions de l'équation homogène (2) , nous emploierons la fonction de commutation $D_u(x, x')$, qui est la distribution . Mais

voyez l'appendice sur ce point.

$$\square_x D_u(x, x') = p'(u)\, D_u(x, x') \quad ,$$

$$D_u(x, x')|_{t = t'} = 0, \ (\partial/\partial t)\, D_u(x, x')|_{t=t'} = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

relativement à un repère local convenable fixe (nous ne discutons pas la question de l'invariance de cette distribution). Le point essentiel ici est que, tandis que la définition de $D_u(x, x')$ n'est pas symétrique en x et x' , on peut néanmoins démontrer que cette distribution est symétrique, c'est-à-dire que $D_u(x, x') = - D_u(x', x)$. Ce résultat justifie le terme "fonction de commutation", parce qu'il signifie que les relations de commutation de la forme

$$[\tilde{\Phi}(x), \tilde{\Phi}(x')] = iD_u(x, x')\, I$$

pour le champ quantifié qu'on suppose associé à l'équation (2) sont d'accord avec les équations du mouvement et avec les conditions de Jacobi.

On nomme champ de vecteurs sur $\underline{M}$ une correspondance C^∞ (au sens différentiel de Frechet et convergence uniforme sur tout compact de l'espace-temps) associant à tout $u \in \underline{M}$ un élément $(X)_u \in T_u$.

Ce champ transforme une fonction $F(u)$, définie et régulière au voisinage[1] de $\underline{M}$, en la fonction de u, définie sur $\bar{M}$:

$$(X)_u \cdot F(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon X_u) - F(u)}{\varepsilon}$$

Nous considèrerons en particulier des champs de vecteurs sur $\underline{M}$ du type suivant :

$$(X_f)_u = \int D_u(x,x') \, f(x') \, dx' \quad ,$$

où f est une fonction arbitraire[2] C^∞ et de support compact, contenu dans un domaine que nous fixons une fois pour toutes. Il est évident que

$$(X_f)_u \in T_u \; .$$

On peut alors définir sur $\underline{M}$ une forme différentielle Ω de degré 2, ou plutôt l'analogue d'une telle forme, au sens que nous avons indiqué, de la façon suivante. Soient $v_i (i = 1,2)$ deux champs de vecteurs sur $\underline{M}$ du type

$$v_i = (X_{f_i})_u \quad ;$$

---

1. Ou même seulement sur $\bar{M}$: on la prolongera à un voisinage de $\underline{M}$; le résultat est indépendant de ce prolongement.

2. Tout vecteur tangent C^∞ est de ce type : voir Mme Choquet-Bruhat, C.R. 251 (1960), p.29-31. Mais nous prenons f indépendant de u ; nous considérons donc des champs de vecteurs d'un type particulier.

alors l'équation :

(5) $$\Omega_u(v_1, v_2) = \int D_u(x, x') f_1(x) f_2(x') dx dx'$$

définit la forme Ω . On peut démontrer facilement que Ω ne dépend que de v_1 et v_2 , et ne dépend pas du choix particulier des fonctions f_i . Cette forme Ω donne aisément la solution générale de l'équation variationnelle d'ordre un de l'équation (3) ; en effet l'équation (5) détermine $D_u(x, x')$ au moyen de Ω , et $D_u(x, x')$ détermine la solution générale de l'équation (2) (avec $\partial = \square$) d'une façon bien connue.

L'espace $\underline{M}$ est l'analogue, pour le système continu défini par l'équation (3), de l'espace de phase pour un système classique dynamique. Dans un tel espace, qui est la fibre cotangente de l'espace de configuration, il y a une forme différentielle importante invariante du degré deux,

$$\Sigma_i \, dp_i \wedge dq_i \quad ,$$

où les q_i sont les coordonnées locales de l'espace de configuration et les p_i les coordonnées contravariantes de l'espace cotangent au point en question. Il est donc naturel d'explorer l'analogie entre la forme Ω et cette forme classique. Rappelons les propriétés fondamentales de cette forme : elle est <u>fermée</u> ; elle est <u>non-dégénérée</u>.

La question de savoir si Ω à ces propriétés n'est pas définie très clairement du point de vue de la théorie des variétés différentiables, mais on peut la définir en terme de champs de vecteurs X_f .

Si $\Omega(X_f, X_g) = 0$ pour toutes les fonctions f, on voit facilement que $X_g = 0$. Le résultat cité de Mme Choquet-Bruhat montre que tout vecteur tangent est de la forme $(X_f)u$ pour au moins un f ; par suite Ω est non-dégénérée. On peut définir $d\,\Omega$ par l'équation :

$$d\,\Omega_u(X_1, X_2, X_3) = X_1\, \Omega_u(X_2, X_3) + \Omega_u(X_1, [X_2, X_3])$$

+ les termes obtenus par les permutations cycliques, où $X_i = X_{f_i}$ pour des fonctions régulières f_i ; nous employons la notation de Poisson :

$$[X_2, X_3]\, F(u) = X_2(X_3F) - X_3(X_2F) .$$

On peut démontrer que $d\,\Omega = 0$ dans ce sens, ainsi que les autres propriétés naturelles ; pour le calcul, voyez l'appendice. Cependant, il est difficile, pour le moment, en raison de son caractère local et de son manque de groupe d'invariance, de relier la théorie qui vient d'être indiquée, à la théorie des systèmes canoniquet et de leurs représentations indiquée dans notre première ______________________________ conférence. Donc, pour aller plus loin, nous allons considérer une classe limitée d'équations, et seulement dans l'espace-temps pseudo-euclidien. En outre, nous faisons d'abord la théorie dans un repère particulier, - en adoptant le point de vue que les considérations dynamiques sont plus fondamentales que les considérations d'invariance, au moins en ce qui concerne les idées essentielles de la théorie des champs quantifiés - et nous traitons ultérieurement les questions d'invariance relativiste.

On suppose donc que l'équation différentielle fondamentale est de la forme :

$$u' = Au + K(u) \quad , \tag{5A}$$

où A est un opérateur donné, dans un espace de Banach E , engendrant un groupe continu à un paramètre,

$$V(s) \; (-\infty < t < \infty) \quad ,$$

et K est une application continuement différentiable de $\underline{E}$ dans $\underline{E}$. Toutes les équations relativistes de la théorie des particules élémentaires ont cette forme pour des choix convenables de $\underline{E}$, A, et K . Mais il est préférable du point de vue physique et aussi mathématique de remplacer cette équation par sa forme intégrée (en employant le principe de Duhamel) :

$$u(t) = V(t - t_o)\, u_o + \int_{t_o}^{t} V(t - r)\, K(u(r))dr \quad ; \tag{6}$$

en utilisant cette forme, on évite les questions concernant les domaines des opérateurs non-bornés. D'un autre côté, si la solution $u(.)$ de l'équation (6) est dans le domaine de l'opérateur A^p à l'instant t_o , alors elle reste dans ce domaine à tous les instants où la solution existe, si l'application K a p dérivées continues, au sens de Fréchet et relativement à la topologie forte des opérateurs ; en particulier, dans le cas $p = 1$, le problème de Cauchy pour l'équation différentielle originale (5A) avec la donnée de Cauchy dans le domaine de A équivaut à l'équation correspondante (6) quand K est différentiable.

En général, cependant, l'équation (6) n'a pas de solution globale, pour u_o et t_o donnés, tandis qu'elle a toujours une solution locale dans un intervalle contenant t_o . Sous les conditions très générales, $u(t)$ dépend de u_o, t_o. et K , d'une façon régulière dans un intervalle de temps donné ; les valeurs pour lesquelles la solution existe dans cet intervalle forment un ensemble ouvert, etc... Un traitement, local par rapport au temps, de la variété des solutions de l'équation (6) est donc possible, mais ce traitement est un peu compliqué. Pour exposer les idées essentielles, nous supposons maintenant que l'opérateur non-linéaire K est tel, qu'il y a une solution globale de l'équation (6) pour toutes les valeurs u_o dans $\underline{E}$. Nous supposons en outre que $\underline{E}$ est un espace de Hilbert, le produit intérieur étant noté (x, y) pour deux éléments x et y de $\underline{B}$; et aussi que l'opérateur A a la propriété que

$$A^* = -A \quad ;$$

ces conditions sont satisfaites facilement pour les équations relativistes de la théorie des particules élémentaires, ainsi que la condition que K est de classe C^{∞} que nous supposons aussi; on sait qu'il y a une solution globale dans certains cas ; mais on l'ignore pour beaucoup de cas intéressants.

L'ensemble $\underline{M}$ de toutes les solutions $u(.)$ de l'équation (6) est alors une variété de Banach de classe C^{∞} , dont la structure est définie de façon unique par la condition que les applications $P_t : u(.) \to u(t)$, sont toutes des isomorphismes de classe C^{∞}, de $\underline{M}$ sur $\underline{E}$; cela résulte du fait que $u(t)$ est une fonction de classe C^{∞} de u_o , pour t fixe. On peut identifier rigoureusement l'espace $T_{u(.)}$ tangent à $\underline{M}$ à un point $u(.)$ avec l'espace des vecteurs tangents à $u(.)$. En fait, pour un vecteur v dans $T_{u(.)}$, on peut regarder l'image par l'application linéaire ∂P_t de $T_{u(.)}$ dans $T_{u(t)}$ (l'espace tangent de $\underline{E}$ au point $u(t)$) comme un vecteur dans $\underline{E}$ parce que la variété $\underline{E}$ est linéaire. On obtient donc un vecteur $v(t)$ pour chaque t, et on peut dire que : $v(.)$ est une solution de la forme intégrée de l'équation aux variations de la solution $u(.)$ de l'équation différentielle fondamentale, c'est-à-dire solution de l'équation

$$(8) \qquad v'(t) = Av(t) + (\partial_u K(u))_{u=u(t)}\, v(t) \ .$$

Réciproquement, toute solution de l'équation (8) est l'image d'un vecteur unique dans $T_{u(.)}$, par l'application indiquée ci-dessus.

On peut introduire maintenant la structure symplectique sur la variété des solutions d'une équation d'ordre 2, que nous supposons pour la simplicité être de la forme

$$(9) \qquad \Phi''(t) + B^2 \Phi(t) = J(\Phi(t)) \ ,$$

où B est un opérateur auto-adjoint strictement positif donné dans un espace réel $\underline{H}$ de Hilbert, et J un opérateur non-linéaire donné. Cette équation prend la forme (5A) en écrivant $u(t) = \{\Phi(t), \Phi'(t)\}$; $\underline{E}$ est la somme directe $[\underline{D}_B] \oplus \underline{H}$; $\underline{D}_B$ désigne le domaine de B dans $\underline{H}$; $[\underline{D}_B]$ désigne l'espace de Hilbert obtenu par la définition $(x,y)_B = (Bx,By)$ pour les vecteurs arbitraires x et y dans $\underline{D}_B$; dans (5A) K est l'opération :

$$\{x, y\} \to \{0, J(x)\}$$

pour l'élément arbitraire $\{x,y\}$ de $\underline{E}$. Pour que K soit lisse comme opérateur dans $\underline{E}$, il est nécessaire (et suffisant) que J soit lisse de façon correspondante comme application de $[\underline{D}_B]$ dans $\underline{H}$. C'est le cas par exemple pour l'équation

$$\Box \phi = m^2\phi + f(\phi) , \tag{10}$$

dans le norme de l'énergie, si f est lisse et n'a pas une croissance trop grande à l'infini.

Pour deux vecteurs tangents v_1 et v_2 au point $u(.)$ de la variété $\underline{M}$ des solutions de la forme intégrée de l'équation (9), on définit

$$\Omega_{u(.)}(v_1,v_2) = (\Phi_1(t), \Psi_2(t)) - (\Phi_2(t), \Psi_1(t)) , \tag{11}$$

où l'on suppose que le vecteur $v_i(.)$ tangent qui correspond au vecteur tangent v_i a la forme $[\Phi_i(t), \Psi_i(t)]$ $(i = 1,2)$, et les produits intérieurs indiqués sont dans l'espace $\underline{H}$. Le côté droit de l'équation (11) semble dépendre du temps, mais en vertu des équations satisfaites par les v_i, il est en fait indépendant du temps. L'équation (11) définit donc une forme différentielle Ω d'ordre 2 sur $\underline{M}$. C'est une forme aux coefficients constants relativement aux coordonnées fournies par les données de Cauchy à un temps particulier ; elle est donc fermée. Il est facile de déduire de la définition de Ω, qu'elle est non-dégénérée. Cette définition montre aussi que Ω est invariante par les transformations T_s induites par les déplacements dans le temps : T_s applique $u(.)$ dans $u_s(.)$, qui est définie par l'équation $u_s(t) = u(s + t)$. Donc : sur la variété des solutions, $\underline{M}$, une structure symplectique est définie par la forme Ω ; le groupe T_s à un paramètre est un groupe d'automorphismes du couple $(\underline{M}, \Omega)$; l'analogie avec la dynamique classique est évidente.

Donc, l'expression de Ω dans un repère de Lorentz fixe simplifie beaucoup son traitement. Cependant, pour une équation relativiste telle que (10), il reste à traiter l'action du groupe G de Poincaré complet. L'invariance de Ω et le fait que G est un groupe d'homéomorphismes de classe C^{∞}, ne sont pas des conséquences banales de l'invariance de l'équation (10) par le groupe de Lorentz. Il suffit pour le moment de traiter le cas le plus simple, en replaçant $\underline{M}$ par la variété $\underline{M}_o$ évidemment relativiste, de toutes les solutions de classe C^{∞} qui ont un support compact pour chaque temps fixe ; l'espace linéaire pour les paramètres locaux dans $\underline{M}_o$ (avec la topologie usuelle dans l'espace des fonctions de classe C^{∞} et du support compact) n'est pas un espace de Banach, mais il est néanmoins impossible d'obtenir des champs de vecteurs X_f, engendrant des groupes locaux à un paramètre d'homéomorphismes de $\underline{M}_o$. Alors, le groupe de transformations $(G, \underline{M}_o)$ est de classe C^{∞} (sur la variété produit $G \times \underline{M}_o$), et par un calcul infinitésimal on peut démontrer que la forme Ω est invariante, dans $\underline{M}_o$, par G.

On peut former les crochets de Poisson $[\ ]_\Omega$ entre les fonctions lisses sur $\underline{M}_o$, comme dans une variété symplectique quelconque, relativement à la forme Ω . Il est donc possible de donner une définition purement mathématique à l'énergie du champ classique que définit l'équation donnée : c'est la fonctionnelle lisse E sur $\underline{M}_o$ telle que $[F, E] = (d/dt)F$ pour une fonction lisse arbitraire F sur $\underline{M}_o$, où $(d/dt)F$ indique l'action infinitésimale de G pour les déplacements dans le temps. Par exemple, pour les équations de Maxwell, cette fonctionnelle, exprimée en fonctions du champ électromagnétique ϕ_{jk} $(j,k = 1, 2, 3, 4)$, vaut

$$E = (4\pi)^{-1} \int (\Sigma_{jk}\, \phi_{jk}^2)\, d\vec{x} ,$$

comme il est bien connu depuis longtemps par des raisonnements physiques. Le théorème classique de E. Noether sur la construction des invariants des champs est éclairé aussi par ce point de vue ; l'invariant associé à une transformation admissible des coordonnées est la fonctionnelle sur la variété des champs classiques dont le crochet de Poisson $[\ ]_\Omega$, engendre cette transformation.

Donc, cette structure est intéressante d'un point de vue purement classique. Elle a un défaut important : elle ne détermine pas une mesure invariante sur la variété, comme dans le cas de dimension finie, parce que la puissance infinie Ω^∞ n'a pas de signification mathématique. Cependant, on peut développer une analogie partielle à l'aide de la théorie de l'intégration dans les espaces fonctionnels, et on peut obtenir, en particulier, une classe des mesures finies invariantes par les déplacements dans le temps. Mais notre principale raison de nous intéresser à ces notions est le problème de la construction et de la représentation des champs quantiques ; revenons maintenant à ce problème.

BIBLIOGRAPHIE ADDITIONNELLE

[1] Y. CHOQUET-BRUHAT, C.R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 1956.

[2] J. LERAY, Hyperbolic partial differential equations, Princeton, 1951-52.

[3] A. LICHNEROWICZ, Théorie quantique des champs sur un espace-temps courbe. Cours de l'Ecole d'Eté de Physique théorique des Houches, 1963.

[4] I. SEGAL, Non-linear semi-groups, Annals of Math. 78 (1963), pp. 339-364.

[5] -- Explicit formal construction of non-linear quantum fields. Jour. Math. Phys. 5 (1964), pp. 269-282.

APPENDICE, PARTIE II

Preuve que $d\,\Omega = 0$; etc.

Nous considérons l'équation

(1) $$\Box\, \phi = p(\phi)$$

dans une région fixe R de l'espace-temps, où p est une fonction régulière donnée, et nous supposons que les solutions sont définies sur toute la région R, pour des données régulières arbitraires. La distribution de commutation sera notée $D_\phi(x,x')$; elle satisfait l'équation différentielle

$$\Box_x\, D_\phi(x,x') = p'(\phi(x))D_\phi(x,x')$$

avec les données de Cauchy

$$D_\phi(x,x') = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} D_\phi(x,x') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \,, \quad \text{pour} \quad t = t' \,,$$

en écrivant $x = (\vec{x},t)$.

Pour une fonction régulière arbitraire f qui s'annule hors de la région R, nous désignons par X_f le champ des vecteurs :

$$\phi \;\to\; D_\phi f \,,$$

où D_ϕ désigne l'opération :

$$f(x) \;\to\; \int D_\phi(x,x')f(x')d_4x' \,,$$

en supposant, pour exprimer en termes simples l'idée essentielle, que l'espace-temps est de dimension 4. Désignons par E^f_ϕ la transformation $X_f D_\phi$; c'est-à-dire, si h est une fonction régulière qui s'annule hors de la région R, alors $D_\phi h$ est une fonction de ϕ et x ; et on peut appliquer X_f à $D_\phi h$ considéré comme étant une fonction de ϕ , x étant fixé. Plus parti-

ERRATA

p. 19, avant-dernière ligne et 20, 2ème ligne, lire "spin entier" et "spin demi-entier".

culièrement, D_ϕ applique h dans $\int D_\phi(x,x')h(x')d_4x'$; alors, X_f déplace ϕ d'un déplacement infinitésimal, caractérisé par le vecteur tangent $D_\phi f$; donc E^f_ϕ est l'application

$$h \to \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int D_{\phi + \varepsilon D_\phi f}(x,x')h(x')d_4x' \Big|_{\varepsilon = 0} .$$

En désignant $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} D_{\phi+\varepsilon D_\phi f}(x,x') \Big|_{\varepsilon=0}$ par $E^f_\phi(x,x')$, E^f_ϕ est l'opérateur

$$k(x) \to \int_R E^f_\phi(x,x')k(x')d_4 x' .$$

Nous supprimons l'indice " ϕ " dans les notations E^f_ϕ , etc., quand c'est clair, dans ce qui va suivre.

Il résulte que

$$X_f\,\Omega(X_g,X_h) = X_f\left(\int D_\phi(x,x')g(x)h(x')d_4x\, d_4x' \right) ,$$

$$= X_f(D_\phi h,g) ,$$

où $(.,.)$ désigne le produit intérieur usuel dans $L_2(E_4)$;

$$= (E^f_\phi h,\, g) .$$

Alors, considérons $[X_g, X_h]$. Le produit $e^{aX_g}\, e^{bX_h}$ agit comme suit (à des termes près d'ordre au moins 2 en a ou en b) :

$$\phi \xrightarrow{X_h} \phi + bD_\phi h \xrightarrow{X_g} [\phi + bD_\phi h] + a\, D_{\phi+bD_\phi h}\, g = \phi + bD_\phi h + \varepsilon\, D_\phi g + ab\, E^h_\phi .$$

Il en résulte que

$$[X_g, X_h] = E^h_\phi\, g - E^g_\phi\, h .$$

Donc

$$\Omega(X_f, [X_g, X_h]) = (f,\, E^h_\phi g - E^g_\phi h) .$$

Ainsi

$$X_f\,\Omega(X_g,\ X_h) + X_h\,\Omega(X_f,\ X_g) + X_g\,\Omega(X_h,\ X_f) = K \tag{2}$$

en notant :

$$K = (E^f\ h,g) + (E^h\ g,f) + (E^g\ f,h)\ .$$

D'autre part :

$$\Omega(X_f,[X_g,X_h]) + \Omega(X_h,[X_f,X_g]) + \Omega(X_g,[X_h,X_f]) =$$

$$= (E^h\ g - E^g\ h,f) + (E^g\ f - E^f\ g,h) + (E^f\ h - E^h\ f,g) = \tag{3}$$

$$= (E^f h,g) + (E^h g,f) + (E^g f,h) - (E^f g,h) - (E^h f,g) - (E^g h,f)\ .$$

Or, $E^f(x,x') = -\ E^f(x',x)$, puisque $D_\emptyset(x,x')$ est antisymétrique ; donc

$$(E^f g,h) = -\ (g,E^f h)\ .$$

L'expression (3) vaut donc 2K .

Pour démontrer que $K = 0$, il est nécessaire d'expliciter $E^f(x,x')$.

En notant

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, D_{\emptyset + \varepsilon\psi}(x,x')\Big|_{\varepsilon=0} = H_\emptyset(x,x',\psi)\ ,$$

et en dérivant par rapport à $\emptyset$ l'équation différentielle pour $D_\emptyset$ et aussi ses données de Cauchy, on constate que $H_\emptyset(x,x',\psi)$ satisfait l'équation suivante :

$$\Big(\Box_x - p'(\emptyset(x))\Big)\, H(x,x',\psi) = p''(\emptyset(x))\psi(x) D_\emptyset(x,x')\ ,$$

et que cette fonction a des données de Cauchy nulles pour $t = t'$. Or la solution de l'équation

$$\left(\Box_x - p'(\phi(x))\right)L(x) = M(x)$$

avec les données de Cauchy nulles pour $t = t'$ est donnée par l'équation

$$L(x) = \int_{t'' \in [t',t]} D(x,x'')M(x'')\, d_4x'' \quad ,$$

comme on peut vérifier par un calcul aisé. En substituant $\phi = D_\phi f$, on obtient

$$E^f(x,x') = -\int_{t'' \in [t',t]} D(x,x'')D(x',x'')D(x'',x''')k(x'')f(x''')\, d_4x''\, d_4x'''$$

où $k(x) = p''(\phi(x))$.

Il s'ensuit que :

$$K = -\int_{t'' \in [t',t]} D(x,x'')D(x'x'')D(x'',x''')h(x')g(x)f(x''')k(x'')\, d_4x\, d_4x'\, d_4x''\, d_4x'''$$

+ les termes obtenus par permutations circulaires.

En changeant les variables d'intégration, les trois intégrales deviennent identiques, sauf les domaines d'intégrations ; ces domaines, qui sont orientés, sont définis par leurs projections sur l'axe des t'' ; ces projections sont les intervalles orientés $[t',t]$, $[t,t''']$, et $[t''',t']$; d'où $K = 0$.

Voici prouvé que $d\,\Omega = 0$.

On peut utiliser des calculs similaires pour démontrer les autres propriétés naturelles de la variété des solutions. Par exemple, il est clair, vu l'interprétation du champ de vecteurs X_f comme déplacement infinitésimal des données de Cauchy dans la région $S(f)$ où f ne s'annule pas, et vu la théorie classique des équations hyperboliques, que X_f et X_g doivent commuter, quand $S(f)$ et $S(g)$ sont disjoints. Plus précisément, on peut regarder

X_f comme une intégrale $\int X_{f(.,t)}\, dt$, en écrivant $f(x) = f(\vec{x},t)$; le champ $X_{f(.,t)}$ déplace la donnée de Cauchy seulement au temps t . En fait, on a le

COROLLAIRE. Si le support de f est hors du domaine d'influence du support de g et vice-versa, alors $[X_f, X_g] = 0$.

Nous avons déjà calculé le crochet $[X_f, X_g]$: il vaut $E^g f - E^f g$. En utilisant l'expression ci-dessus de E^f, on obtient l'équation

$$(E^f g)(x) = \int K(x,x',x'')f(x')g(x'')\, d_4x'\, d_4x'' ,$$

avec

$$K(x,x',x'') = -\int_{t''' \in [t'',t']} D(x,x''')D(x'x''')D(x'',x''')k(x''')\, d_4x'''$$

La fonction à intégrer ici est symétrique en x' et x'' ; d'où l'équation :

$$K(x,x',x'') - K(x,x'',x') = \int_{t''' \in [t',t'']} D(x,x''')D(x',x''')D(x'',x''')k(x''')\, d_4x''' .$$

Il est évident que cette expression s'annule si $t' = t''$. A ce point, nous devons utiliser le fait que la fonction de commutation $D_\emptyset(x,x')$ est indépendante de la décomposition en espace-temps, qui a servi à la construire ; cette indépendance résulte de la seconde définition de la fonction $D_\emptyset(x,x')$: elle est la différence des solutions élémentaires avancées et retardées, fournies par la théorie de J. Leray (v. particulièrement [4] dans la bibliographie de la Partie I) ; or ces solutions élémentaires se définissent sans effectuer de décomposition en espace-temps. Il en résulte que $K(x,x',x'') - K(x,x'',x')$ s'annule dans le cas où x' et x'' sont deux points arbitraires, dont l'un n'est pas dans le domaine d'influence de l'autre. Ainsi le noyau de l'expression intégrale de E^f_g est symétrique ; il résulte que $E^g_f - E^f_g = 0$.

III

Du point de vue d'un physicien pratique, la théorie classique des champs quantifiés n'est pas satisfaisante, parce qu'elle conduit à des intégrales infinies ; mais du point de vue théorique, et particulièrement du point de vue mathématique, ce qui est le moins satisfaisant dans la théorie est que l'équation fondamentale de cette théorie n'a pas de signification mathématique... ou autre..! Le champ quantifié $\tilde{\phi}(x)$ n'est certainement pas une fonction, mais seulement une distribution : seules les intégrales $\int \tilde{\phi}(x)f(x)dx$ ont vraiment un sens, même dans le cas du champ le plus simple, le champ "libre" ; or dans l'équation aux dérivées partielles fondamentales qui est du type

$$(1) \qquad \square \tilde{\phi} = p(\tilde{\phi}) ,$$

le polynome donné, p, est non-linéaire ; donc, l'expression $p(\tilde{\phi})$ n'est pas définie.

Mais, vu les relations canoniques de commutation, l'équation (1) donne, par la formation successive des commutateurs avec le champ et sa dérivée première par rapport au temps, des équations de la forme

$$(2) \quad [\ldots[[\square \tilde{\phi}(x), \not{\phi}(x')], \not{\phi}(x'')]\ldots], \not{\phi}(x^{(n)})] = \text{une expression linéaire en } \not{\phi}(x),$$

où $n+1$ est le degré de p, $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$ sont $n+1$ points de l'espace-temps aux temps identiques, mais arbitraires, et $\not{\phi}(x)$ désigne ou bien le champ $\tilde{\phi}(x)$ ou bien sa dérivée $\dot{\tilde{\phi}}(x)$; il y a donc 2^n telles équations. Ces équations n'emploient plus de fonction non-linéaire de distributions: elles ont une signification mathématique claire. De plus, si l'on suppose irréductibles les opérateurs $\tilde{\phi}(x)$ et $\dot{\tilde{\phi}}(x)$ pour tout l'espace et pour un instant particulier du temps, - c'est un postulat qu'on fait dans la théorie classique des champs quantiques,- les équations (2) sont équivalentes à l'équation (1) , à un terme additif près, qui dépend linéairement d'un nombre fini des paramètres, dont les $n^{\text{ièmes}}$ crochets avec

$$\phi(x'),\ \phi(x''),\ \ldots,\ \phi(x^{(n)})$$

s'annulent quand les $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ sont arbitraires mais ont des temps identiques.

Pour clarifier, nous considérons le cas typique de l'équation

$$\Box\,\tilde{\phi} = m^2\tilde{\phi} + \gamma\,\tilde{\phi}^3 \quad . \tag{3}$$

On obtient à la place de l'équation (2) les équations

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\ [\,\Box\,\tilde{\phi}(x),\ \tilde{\phi}(x')] = 0\\
&\text{(b)}\ [[\,\Box\,\tilde{\phi}(x),\ \dot{\tilde{\phi}}(x')],\ \tilde{\phi}(x'')] = 0\\
&\text{(c)}\ [[\,\Box\,\tilde{\phi}(x),\ \dot{\tilde{\phi}}(x')],\ \dot{\tilde{\phi}}(x'')] = -6\,\gamma\,\tilde{\phi}(x)\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \quad ,
\end{aligned} \tag{4}$$

ou

$$x = (\vec{x},\ t),\ x' = (\vec{x}',\ t),\ x'' = (\vec{x}'',\ t) \quad .$$

L'équation (4a) remplace deux équations de la forme (2) , à cause de la forme spéciale de l'équation (3) . Le produit des distributions "deltas" dans l'équation (4c) a un sens. En fait, en introduisant la fonction régularisée

$$\tilde{\Phi}(f,\ t) = \int \tilde{\phi}(\vec{x},\ t)\ f(\vec{x})\ d\vec{x} \quad ,$$

on obtient des équations implicites pour la deuxième dérivée $\ddot{\tilde{\Phi}}(f,\ t)$:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad [\ddot{\tilde{\Phi}}(f,\ t),\ \tilde{\Phi}(g,\ t)] - [\,\tilde{\Phi}(\Delta f,\ t),\ \tilde{\Phi}(g,\ t)] = 0\\
&\text{(b)}\quad [[\,\ddot{\tilde{\Phi}}(f,\ t),\ \dot{\tilde{\Phi}}(g,\ t)],\ \tilde{\Phi}(h,\ t)] = 0\\
&\text{(c)}\quad [[\,\ddot{\tilde{\Phi}}(f,\ t),\ \dot{\tilde{\Phi}}(g,\ t)],\ \dot{\tilde{\Phi}}(h,\ t)] = -\,6\gamma\,\tilde{\Phi}(f\,g\,h,\ t) \quad ,
\end{aligned} \tag{5}$$

pour toutes les fonctions f, g, et h dans le domaine $\underline{D}$ (indéfiniment différentiables, à supports compacts) des fonctions régulières. On doit noter que l'équation (5b) est une conséquence de l'équation (5a) et de l'identité de Jacobi : (5) se réduit à (5a) et (5c) .

Les équations (5) doivent être considérées comme un système d'équations différentielles pour toutes les fonctions $\Phi(f, t)$, dans lesquelles les dérivées secondes $\ddot{\Phi}(f, t)$ sont données implicitement en fonction des inconnues $\Phi(g, t)$ et de leurs dérivées premières $\dot{\Phi}(g, t)$. Pour obtenir $\ddot{\Phi}(f, t)$ explicitement, on doit résoudre d'abord les équations

$$(5') \qquad [Y(f, t), \dot{\Phi}(g, t)] = 0$$

$$[[Y(f, t), \dot{\Phi}(g, t)], \dot{\Phi}(h, t)] = -6\Phi(fgh, t)$$

par rapport aux fonctions $Y(f, t)$, dont les valeurs sont des opérateurs et qui dépendent linéairement de f . On suppose qu'on a une solution des équations (5') de la forme $Y(f, t) = \Sigma(\Phi(., t), \dot{\Phi}(., t), f)$ où $\Phi(., t)$ et $\dot{\Phi}(., t)$ engendrent un système de Weyl

$$W(f, g) = e^{i\Phi(f, t) + i\dot{\Phi}(g, t)}$$

(c'est-à-dire vérifient les relations canoniques de commutation) ; l'existence de Y dépend de ce système ; mais, quand Y existe, on peut supposer la fonction Σ invariante par les transformations unitaires.

En supposant que le groupe de Poincaré agit de façon unitaire, il en résulte que les équations (5) doivent être interprétées comme signifiant :

$$\ddot{\Phi}(f,\, t) = \Sigma\,(\,\Phi(.,\, t),\, \dot{\Phi}\,(.,\, t),\, f)\quad . \tag{5"}$$

Il y a donc une restriction sur la représentation des relations à imposer au couple $(\Phi\,,\,\dot{\Phi}\,)$: il doit être tel que l'équation (5')ait une solution.

Mais cette solution, quand elle existe, n'est pas unique. Pour examiner cette question, notons qu'on peut supprimer "t" dans les équations (5') , puisqu'on a l'invariance temporelle indiquée. On peut alors ajouter à $Y\,(f)$ un terme additif $Z(f)$ arbitraire tel que :

$$[Z\,(f),\, \Phi(g)] = 0$$
$$[[Z\,(f),\dot{\Phi}\,(g)],\, \dot{\Phi}(h)] = 0$$

En utilisant l'hypothèse d'irréductibilité de $(\,\Phi(g)\,,\,\dot{\Phi}(h))$ pour toutes les fonctions f et g ,

il s'ensuit que : $$Z\,(f) = \Phi\,(Tf) + b\,(f)\,I\quad ,$$

où T est un opérateur linéaire et $b\,(f)$ unefonctionnelle linéaire de f . En utilisant l'hypothèse d'invariance par le groupe de Poincaré, il s'ensuit que $T = cI$, où c est une constante, et que $b = 0$. La seule indétermination en $\ddot{\Phi}\,(f,\, t)$ est donc la constante multiplicative c , c'est-à-dire en la "renormalisation de la masse", comme les physiciens nomment la modification de la constante m^2 de l'équation aux dérivées partielles fondamentale.

Nous notons en passant qu'on peut introduire la soi-disant "renormalisation de la constante de couplage" d' une façon similaire, par la formation de plusieurs crochets avec $\Phi(f, t)$ et $\dot{\Phi}(g, t)$ dans les équations (5) ; la renormalisation de cette constante n'apparaît pas nécessaire au traitement du champ lui-même, mais seulement à l'interprétation en terme de particules des champs asymptotiques au temps $\pm\infty$.

Ainsi, il semble qu'il y ait une constante arbitraire dans la solution de l'équation (5) (si cette solution existe) : la constante compense l'absence dans les équations (5) de la masse m qui figure dans l'équation (3) . Ce qui précède emploie une hypothèse classique d'irréductibilité et conduit à des conclusions physiquement acceptables : d'une part, la constante m était la masse "nue", qui n'est pas bien définie physiquement ; d'autre part, les conditions initiales, au temps $-\infty$, c'est-à-dire le champ libre asymptotique au champ $\tilde{\Phi}$ au temps $-\infty$, définissent la masse "physique".

Donc, il est raisonnable de remplacer l'équation (1) , qui n'a pas une signification mathématique, par l'équation (2) qui a un sens clair et qui équivaut formellement à (1) moyennant les relations de commutation canoniques, l'invariance relativiste, l'irréductibilité du champ $(\tilde{\Phi}, \dot{\tilde{\Phi}})$ pour un instant particulier et la donnée d'un champ libre asymptotique. Mais l'équation (2) , bien que claire, est un peu effrayante, et il n'existe pas de procédés de résolution de telles équations.

Nous allons décrire, en nous limitant à l'équation (3) , un procédé donnant des solutions de l'équation dynamique (2) qui satisfont les relations de commutation canoniques et l'invariance relativiste ; il sera évident que la même méthode est valable si le terme $\tilde{\phi}^3$ est replacé par un polynôme arbitraire pour lequel l'équation correspondante classique a une solution globale pour des données de Cauchy arbitraires assez régulières.

Par analogie avec la construction utilisée dans I dans le cas d'un champ libre, nous considérons le champ $\tilde{\Phi}(x)$, ou plutôt sa forme régularisée $\tilde{\Phi}(f, t)$, où f est une fonction arbitraire régulière du temps, de la forme

(6) $$\tilde{\Phi}(f, t) = a\, X_{f,\, t} + b\, M_{f,\, t} ,$$

où a et b sont des constantes à déterminer ; $X_{f,\, t}$ est le champ de vecteurs sur la variété $\underline{M}$ des solutions de l'équation correspondante classique, définie ci-dessus, mais avec $f(x)$ remplacé par le produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction "delta" du temps, c'est-à-dire : $X_{f,\, t}$ déplace infinitésimalement la donnée de Cauchy pour $\dot{\phi}(\vec{x}, t)$ à l'instant t par un vecteur proportionnel à $f(\vec{x})$, et ne déplace pas $\phi(\vec{x}, t)$ lui-même, où $\phi(\vec{x}, t)$ désigne le champ classique (à valeurs réelles) , et $M_{f,\, t}$ désigne l'opérateur de multiplication, agissant sur les fonctions F régulières définies dans $\underline{M}$ de la forme

$$F(\phi(.)) \rightarrow \left(\left(\int \phi(\vec{x}, t)\, f(\vec{x})\, d\vec{x}\right) . F(\phi(.)) \right. .$$

L'opérateur $\Phi(f, t)$ est relativiste ; en fait, pour une fonction g régulière sur l'espace-temps, on peut définir $\tilde{\Phi}(g) = \int \tilde{\phi}(x)\, g(x)\, d_4 x$

par l'équation évidemment relativiste

$$\tilde{\Phi}(g) = a\, X_g + b\, M_g \quad ,$$

où

$$M_g : F(\phi(.)) \longrightarrow \left(\left(\int \phi(x)\, g(x)\, d_4 x\right) \circ F(\phi(.))\right) \quad ;$$

en posant

$$g(x') = f(\vec{x}')\,\delta(t' - t) \quad ,$$

ce qu'on peut justifier ; on obtient l'équation (6) .

Pour traiter d'autres conditions , nous utilisons le

<u>Lemme</u>. Sur la variété $\underline{M}$ des solutions de l'équation

$$\square \phi = \rho(\phi) \quad ,$$

les champs de vecteurs $\dot{X}_{f,\,t}$ et $\ddot{X}_{f,\,t}$ attachent au point ϕ de $\underline{M}$ les vecteurs tangents qui ont les données de Cauchy suivantes au temps t :

$\dot{X}_{f,\,t}$: $-f$ pour la fonction, 0 pour la première dérivée temporelle :

$\ddot{X}_{f,t}$: 0 pour la fonction, $(\rho'(\phi) - \Delta)\, f$ pour la première dérivée temporelle.

Nous écrivons l'équation différentielle fondamentale sous la forme

$$u' = Au + K(u) \quad .$$

Un vecteur tangent à la variété des solutions de cette équation satisfait l'équation $v' = Av + (\partial K)_u v$. Maintenant, $X(t)$ désigne le champ de vecteurs $u(.) \longrightarrow v(.)$ vérifiant l'équation précédente et les données de Cauchy $v(t) = w$, où w est fixe. Soit $E_{u(.)}(s, t)$ la solution élémentaire opérationnelle de l'équation variationnelle : c'est-à-dire : soit $E_{u(.)}(s, t)$ l'opérateur unique dans l'espace des données de Cauchy satisfaisant aux équations

$$(\partial/\partial s)\, E(s, t) = A_u(s)\, E(s, t) \;, \quad E(t, t) = I \;,$$

où

$$A_u(s) = A + (\partial_y K(y))_{y = u(s)} \;;$$

on peut exprimer $X(t)$ en terme des données au temps s comme il suit :

$$(X(t))_{u(.)}(s) = E_u(s, t)\, w \;.$$

En différentiant par rapport à t , on obtient l'équation

$$((\partial/\partial t)\, X(t))_u(t) = (\partial/\partial t)\, E_u(s, t)\, w \big|_{s = t} \;;$$

en utilisant l'équation

$$(\partial/\partial t)\, E(s, t) = -E(s, t)\, A(t) \;,$$

il résulte que

$$(\partial/\partial t)\, X(t) = -A(t)\, w \;. \tag{7}$$

Le lemme s'obtient maintenant en considérant les deux cas $w = \{f, 0u\}$ et $w = \{0, f\}$ (en prenant dans le premier cas la donnée de Cauchy pour le champ ϕ comme première composante de w ; dans le second cas la donnée pour la première dérivée temporelle comme deuxième composante de w) ; on peut noter que

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ X & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où } X = \Delta - \rho'(\phi)$$

Nous pouvons maintenant démontrer le

<u>Théorème. Le champ relativiste d'opérateurs donné par l'équation</u> (6) <u>avec</u> $a = i$ <u>et</u> $b = 1/2$ <u>satisfait les relations canoniques de commutation ainsi que les équations différentielles</u> (5) .

Nous présentons la preuve des relations de commutation d'une façon qui est un peu plus longue qu'un calcul direct, mais qui explique l'origine de l'équation (6) et sa relation avec la forme Ω . Nous définissons une forme différentielle ω_t de degré un par l'équation

$$\omega_t(X_{f,t} + Y_{g,t})_\phi = \int \phi(\vec{x}, t)\, f(\vec{x})\, d\vec{x} - \int \dot{\phi}(\vec{x}, t)\, g(\vec{x})\, d\vec{x}$$

En calculant la dérivée $d\omega_t$ de cette forme par l'équation

$$2\, d\omega(U, V) = U\omega(V) - V\omega(U) - \omega([U, V]) \quad ,$$

en substituant

$$U = X_f + Y_g \quad \text{et} \quad V = X_{f'} + Y_{g'}$$

ainsi qu'en utilisant les définitions des champs de vecteurs X_f et Y_g , on trouve que

$$d\omega_t = \Omega \qquad ,$$

où Ω est la forme introduite antérieurement. Donc

$$\tilde{\Phi}(f, t) = aX_{f,t} + b\omega_t(X_{f,t}) \quad ;$$

il s'ensuit que

$$[\tilde{\Phi}(f, t), \tilde{\Phi}(g, t)] = ab\,(X_{f,t}\,\omega_t(X_{g,t}) - X_{g,t}\,\omega_t(X_{f,t}))$$

$$= 2\,ab\,\Omega\,(X_{f,t}\,, X_{g,t}) = 0$$

D'ailleurs,

$$(\partial/\partial t)\tilde{\Phi}(f, t) = -\,aY_{f,t} - b\omega_t(Y_{f,t}) \quad .$$

Donc, par le même raisonnement :

(8) $$\dot{\tilde{\Phi}}(f, t) = -\,aY_{f,t} - b\omega_t(Y_{f,t}) \quad ;$$

$$[\dot{\tilde{\Phi}}(f, t)\ ,\ \dot{\tilde{\Phi}}(g, t)] = 0 \quad ,$$

$$[\tilde{\Phi}(f, t)\ ,\ \dot{\tilde{\Phi}}(g, t)] = 2ab\,\Omega\,(X_{f,t}\,, Y_{g,t}) = -\,2ab\int fg \quad .$$

Ainsi, si $ab = \frac{i}{2}$, on a les relations canoniques de commutation.

Cherchons maintenant si $\tilde{\Phi}$ vérifie l'équation (5) ; on simplifie le calcul en utilisant la notation de distribution, comme suit : on définit $\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)}$ dans un repère particulier par l'équation

$$\int \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)}\, f(\vec{x})\, d\vec{x} = X_{f,t} \quad ;$$

similairement,

$$\int \frac{\partial}{\partial \phi(\vec{x}, t)} f(\vec{x}, t)\, d\vec{x} = Y_{f,\, t} \quad ,$$

où $Y_{f,\, t}$ est le champ de vecteurs qui déplace infinitésimalement la donnée de Cauchy pour le champ classique à l'instant t proportionnellement à f, sans déplacer la première dérivée. On peut démontrer que, tandis que cette définition utilise un repère particulier, en fait $\frac{\partial}{\partial \phi(x)}$ et $\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)}$ sont indépendantes du repère, en le sens que voici : pour chaque fonction régulière h dans l'espace-temps,

$$\int X_{h(.,\, t),\, t}\, dt$$

est un champ de vecteurs qui dépend seulement de h, sans dépendre du repère de Lorentz. Cependant, ce fait n'est pas nécessaire ici.

Notons que, pour toute fonction régulière H de deux variables, on peut définir de façon assez évidente

$$\int H(\phi(x), \dot{\phi}(x)) \frac{\partial}{\partial \phi(x)} f(\vec{x}, t)\, d\vec{x} \quad \text{et} \quad \int H(\phi(x), \dot{\phi}(x)) \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} f(\vec{x}, t)\, d\vec{x}$$

comme étant des champs de vecteurs sur $\underline{M}$, et qu'on peut calculer le crochet de tels champs par les règles

$$\left[\frac{\partial}{\partial \phi(x)} , \phi(x')\right] = \delta(\vec{x} - \vec{x}')I \quad , \left[\frac{\partial}{\partial \phi(x)} , \dot{\phi}(x')\right] = 0 \quad (t = t') \quad ,$$

etc..., les $\phi(\vec{x}, t)$ et les $\dot{\phi}(\vec{x}', t)$ pour t fixe formant des variables indépendantes en ce sens.

Dans ces termes le lemme dit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)}\right) = -\frac{\partial}{\partial \phi(x)} \;,\; \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \phi(x)}\right) = (\rho'(\phi(x)) - \Delta)\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \;;$$

le champ quantifié est donné par l'équation

$$\tilde{\phi}(x) = a\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} + b\,\phi(x) \;.$$

Donc

$$\dot{\tilde{\phi}}(x) = -a\frac{\partial}{\partial \phi(x)} + b\,\dot{\phi}(x) \;,$$

$$\ddot{\tilde{\phi}}(x) = -a\,(\rho'(\phi(x)) - \Delta)\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} + b\ddot{\phi}(x) \;,$$

$$\Box\,\tilde{\phi}(x) = -a\rho'(\phi(x))\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} + b\,\rho(\phi(x)) \;.$$

En notant que $\partial/\partial\dot{\phi}(x)$, $\rho'(\phi(x')$, et $\rho(\phi(x'))$ sont permutables,

il s'ensuit que

$$[\Box\,\tilde{\phi}(x) \;,\; \tilde{\phi}(x')] = 0 \;.$$

De plus ,

$$[\Box\,\tilde{\phi}(x) \;,\; \dot{\tilde{\phi}}(x')] = \left(-a^2\rho''(\phi(x))\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} + ab\,\rho'(\phi(x)) - ab\,\rho'(\phi(x))\right)\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$= -a^2\rho''(\phi(x))\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)}\,\delta(\vec{x} - \vec{x}') \;.$$

En continuant en cette façon, on obtient :

$$[[\Box\, \tilde{\phi}(x), \dot{\tilde{\phi}}(x')]\ , \tilde{\phi}(x'')] = 0 \qquad (t = t' = t'')$$

et

$$[[\Box\, \tilde{\phi}(x), \dot{\tilde{\phi}}(x')], \dot{\tilde{\phi}}(x'')] = \left(-a^2 b\, \rho''(\phi(x)\right) - a^3 \rho'''(\phi(x)) \frac{\partial}{\dot{\partial}\phi(x)}) \delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}'')$$

Dans le cas

$$\rho(\lambda) = \gamma\lambda^3 ,$$

il en résulte que

$$[[\Box\, \tilde{\phi}(x), \dot{\tilde{\phi}}(x')], \dot{\tilde{\phi}}(x'')] = -6\gamma a^2 \left(ia \frac{\partial}{\dot{\partial}\phi(x)} + b\phi(x)\right)\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}'')$$

$$= -6\gamma a^2 \tilde{\phi}(x)\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}'') .$$

Donc le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. SEGAL, Interpretation et solution d'équations non linéaires quantifiées. C.R. 259 pp. 301-303 (1964).

[2] --- Non-linear partial differential equations in quantum field theory, to appear in Proceedings of Symposium in Applied Math. 1964, Amer. Math. Soc.

IV

Les opérateurs du champ associé à l'équation aux dérivées partielles donnée ci-dessus ne sont pas dans un espace de Hilbert : ce sont des opérateurs différentiels sur une variété, à savoir la variété des solutions. Pour représenter ces opérateurs par des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert, il est naturel de définir une mesure appropriée sur la variété, et de considérer ces opérateurs comme agissant dans l'espace des fonctionnelles de carré intégrable sur la variété, comme dans le cas familier d'une variété à nombre fini de dimensions. On désire en particulier la représentation associée à l'état du vide, en analogie non-linéaire avec la théorie linéaire indiquée dans la première conférence ; une mesure invariante par le groupe de Poincaré et l'énergie positive (c'est-à-dire telle que le spectre du groupe à un paramètre induit dans l'espace des fonctionnelles de carrés intégrables par les translations dans le temps est non-négatif) donne de façon naturelle l'état du vide.

Une méthode naturelle du point de vue de la physique pour construire la mesure du vide est de transporter la mesure du vide du champ libre asymptotique (qu'on présume exister) sur la variété des solutions de l'équation non-linéaire, par l'application qu'on appelle "l'opérateur d'onde". Il convient donc de développer la théorie de la structure asymptotique des solutions des équations non-linéaires ; cette théorie a aussi un intérêt pour l'interprétation en termes de particules des états du champ, ainsi que pour la mathématique classique appliquée. Nous supposons données deux variétés M_o et M, que nous appelons les variétés "libre" et "physique" ; ainsi que pour chaque instant t une application P_t homéomorphique de M sur M_o. Les limites :

$$\lim_{t \to \pm\infty} P_t^{\pm 1} = P_{\pm\infty}^{\pm 1}$$

sont appelées "les opérateurs d'onde", quand elles existent ; en général, on considère

$$\lim_{t \to \pm\infty} P_t^{-1}$$

l'opérateur d'onde future Γ_- dans le cas $t \to -\infty$; on obtient pour $t \to +\infty$ l'opérateur d'onde passée Γ_+ ; les opérateurs

$$S_0 = \Gamma_+^{-1} \Gamma_- \qquad S = \Gamma_- \Gamma_+^{-1} \; (= \Gamma_- S_0 \Gamma_-^{-1} = \Gamma_+ S_0 \Gamma_+^{-1})$$

quand ils existent, sont nommés :

S_0 : opérateur de "dispersion" ou de "collision" relatif à la variété libre ;
S : opérateur de "dispersion" ou de "collision" relatif à la variété physique.

Nous considérons ici le cas où $\underline{M}$ est la variété des solutions de l'équation opérationnelle (plus précisément, de la forme intégrée de cette équation).

(1) $$u' = Au + K(u) ,$$

en supposant que $u(t)$ a ses valeurs dans un espace de Banach et qu'il existe globalement une solution et une seule de (1) pour des données de Cauchy arbitraires dans $\underline{B}$; $\underline{M}_0$ est la variété des solutions de l'équation libre

(2) $$u' = Au \;;$$

P_t applique une solution de l'équation (1) sur la solution de l'équation (2) qui a la même valeur au temps t . L'opérateur Γ_- , s'il existe, est alors une application, invariante par les déplacements dans le temps, de $\underline{M}_0$ dans $\underline{M}$. Donc, Γ_- applique une mesure sur $\underline{M}_0$ invariante (par les déplacements du temps) sur une mesure invariante sur $\underline{M}$. De plus, on peut démontrer formellement qu'il applique une mesure sur $\underline{M}_0$ associée avec le vide libre sur la mesure faible sur $\underline{M}$ associée au vide physique.

Considérons maintenant la question de l'existence de l'opérateur de l'onde pour les équations de la forme

$$\square \phi = m^2 \phi + f(\phi) \quad , \tag{3}$$

où

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad .$$

Afin qu'une solution de l'équation (3) soit asymptotique à une solution de l'équation libre

$$\square \psi = m^2 \psi \quad , \tag{4}$$

il semble nécessaire que le terme $f(\phi)$ converge vers zéro pour $t \to \infty$, mais le temps ne figure pas explicitement dans cette expression ; c'est pourquoi les physiciens dans le traitement du champ quantifié, défini par une équation différentielle, ont l'habitude de remplacer $f(\phi)$ par $e^{-\varepsilon |t|} f(\phi)$, et, après avoir calculé l'allure asymptotique, ε par 0 . Mais il semble que le champ tende vers 0 , sans qu'il soit nécessaire de modifier l'équation.

Le premier problème à résoudre - il est fondamental - est l'étude de l'allure asymptotique de $f(\phi)$ quand ϕ est une solution de l'équation (4) . La conservation de l'énergie montre que $\phi(.,t)$ ne converge pas vers zéro dans l'espace L_2 quand $t \to \infty$. De plus, pour l'équation d'onde $\Box \psi = 0$ dans l'espace-temps à deux dimensions, les solutions $\lambda(x \pm t)$ qui engendrent toutes les autres, ne tendent vers zéro dans aucun espace L_p . Mais dans le cas $m > 0$, la décroissance vers zéro est essentiellement plus rapide pour les solutions assez régulières, et il y a décroissance vers zéro, dans certains espaces L_p , pour un ensemble dense des solutions. Dans l'espace-temps à plusieurs dimensions, la diffusion de la densité de l'énergie (l'énergie se conserve) est plus rapide, et il y a convergence vers zéro dans l'espace L_∞ . Il suffit ici de démontrer seulement le

<u>Lemme</u>. <u>Dans un espace de dimension impaire $n > 1$, une solution ϕ de l'équation</u>

$$\Box \phi = m^2 \phi \qquad (m > 0)$$

<u>satisfait à l'inégalité</u>

$$\|\phi(.,t)\|_\infty \leq C(t,\varepsilon)\left(\|e^{\varepsilon B}\phi(.,t)\|_1 + \|e^{\varepsilon B}B^{-1}\dot{\phi}(.,t)\|_1\right)$$

<u>pour ε arbitraire > 0 , où $C(t,\varepsilon)$ est une fonction fixe, continue en t , et telle que</u>

$$C(t,\varepsilon) = O(|t|^{-n/2}) \;;$$

pour la définition de l'opérateur B , v. p. 55.

Pour le prouver, notons que la solution de l'équation (4) , sous forme opérationnelle, est donnée par la formule

(5) $$\emptyset\ (t) = \cos\ (tB)\ \emptyset\ (0) + \frac{\sin\ (tB)}{B}\ \dot{\emptyset}\ (0)\ ,$$

où $$\emptyset\ (t) = \emptyset\ (.,\ t)\ ,\ B = \sqrt{m^2\ I - \Delta}\ ;$$

il suffit donc d'estimer $\cos\ (tB)\ \emptyset_o$ et $\frac{\sin\ (tB)}{B}\ \emptyset_o$ pour un vecteur $\emptyset_o$ fixe. Nous discutons seulement la première estimation ; la deuxième est similaire. On peut écrire

$$\cos\ (tB)\ \emptyset_o = e^{-\varepsilon B} \cos\ (tB)\ (e^{\varepsilon B}\ \emptyset_o)$$

si $\emptyset_o$ est dans le domaine de l'opérateur $e^{\varepsilon B}$, au sens du calcul opérationnel pour les opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Donc $\cos\ (tB)\ \emptyset_o$ est la convolution de la transformée de Fourier inverse

$$K\ (t) = K\ (r,\ t,\ \varepsilon\ ,\ m)$$

de

$$e^{-\varepsilon\ (m^2 + R^2)} \cos\ \ t(m^2 + R^2)^{(1/2)}\ ,$$

où R est la distance de l'origine dans l'espace dual de l'espace physique, avec la fonction $e^{\varepsilon B}\ \emptyset_o$. Par l'inégalité

$$\| f * g \|_{\infty} \leq \| f \|_1 \| g \|_{\infty}$$

il suffit d'estimer $\| K\ (.,\ t,\ \varepsilon,\ m) \|_1$. Mais on peut expliciter cette fonction K au moyen de fonctions de Bessel d'ordre zéro. En utilisant l'allure asymptotique des fonctions de Bessel à l'origine et à l'infini, on obtient le résultat annoncé.

Historique. Cette preuve suit la méthode de la thèse (M.I.T.) de A.R. Brodsky, écrite sous notre direction. La croissance d'ordre $O(|t|^{-3/2})$ des distributions fondamentales du champ libre, en un point fixe, est bien connue depuis quelques années (v. par exemple, Bogolioubov et Shirkov, Theory of quantized fields, N.Y. 1959, p. 152), il est similaire pour un ensemble fixé compact . La même rapidité de décroissance dans l'espace L_∞ est nécessaire pour obtenir un résultat de Ruelle qui est fondamental dans la théorie axiomatique des champs quantiques due à Haag et Wightman ; cependant, la preuve (voir par exemple la version donnée par Wightman dans Recent achievements of axiomatic field theory, dans "Theoretical Physics", Int. Atomic Energy Agency, 1963, p. 46-49) dépend implicitement de la finitude du sup. d'une certaine fonction définie sur un espace compact ; or il n'est pas établi qu'elle est continue ; il est seulement évident qu'elle est dans la première classe de Baire. La méthode de Brodsky est très différente et a l'avantage de fournir la borne explicite qui est nécessaire pour obtenir la mesure invariante dans la variété des solutions.

Cette méthode, qui simplifie considérablement notre méthode originale, donne aussi une borne dépendant de $\|B^a\phi\|_1$ pour une constante convenable $a > 0$, au lieu de $\|e^{\varepsilon B}\phi\|_1$; mais cette amélioration n'est pas nécessaire ici ; on ne sait pas si on peut remplacer la norme dans L_1 par une norme invariante dans L_2 , ce qui serait intéressant pour construire une mesure invariante par rapport au déplacement d'espace. Dans la thèse citée, la rapidité de décroissance $t^{-(n-1)/2}$ est obtenue, ce qui est meilleur pour m arbitraire ;

la rapidité $t^{-n/2}$ dans le cas $m > 0$ s'obtient de façon identique, en employant l'expression explicite dans l'espace physique des distributions fondamentales du champ libre (v. Bogolioubov et Shirkov, p. 148-150).

On peut obtenir certains résultats pour les équations non-linéaires en utilisant le lemme ci-dessus : par exemple le

THEOREME. Une solution faible d'énergie finie arbitraire de l'équation

$$\Box \phi = m^2 \phi + g \phi^p \quad (m > 0,\ g > 0,\ p \text{ impair})$$

dans un espace de dimension impaire $n \geqslant 3$ est asymptotique faiblement, aux instants $\pm\infty$, à des solutions de l'équation libre

$$\Box \phi = m^2 \phi \quad ;$$

la notion d'asymptotique faible se définit en employant les fonctionnelles linéaires continues pour la norme correspondant à l'énergie du champ non-linéaire.*

Note * Dans le cas $n = p = 3$, les solutions sont fortes et le problème de Cauchy a une solution unique ; dans les autres cas, on sait seulement qu'une solution globale faible existe pour les données de Cauchy arbitraires d'énergie finie ; v. Bull. Soc. Math. Fr. t. 91, p.129-135 (1963). L'énergie de la solution de l'équation non-linéaire définie par les données de Cauchy $f(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$ du champ et de sa première dérivée temporelle a la forme

$$\|Bf\|_2^{\,2} + \|g\|_2^{\,2} + g(p+1)^{-1} \int f^{p+1} \, d_n \vec{x};$$

il est donc naturel d'employer les fonctionnelles linéaires Δ que voici :

$$\Delta\ (f,g) = \langle Bf, Bh_1 \rangle + \langle g, h_2 \rangle + \int f h_3 \, d_n \vec{x}$$

où $\langle .,. \rangle$ indique le produit intérieur dans L_2 ; les fonctions h_i sont fixes et telles que $Bh_1 \in L_2$, $h_2 \in L_2$, et $h_3 \in L_{(p+1)/p}$. Les notions de solutions faibles et d'allure asymptotique faible sont définies au moyen de cette classe des fonctionnelles. Notons que l'hypothèse que la dimension de l'espace est impaire est presque certainement superflue ; pour l'extension aux cas pairs, il est nécessaire seulement de vérifier dans ce cas la rapidité de décroissance du noyau associé à l'opérateur $e^{-\varepsilon B}$.

Preuve. On utilise la méthode générale de passage à la"représentation d'interaction", Elle consiste à étudier l'équation (1) en remplaçant $u(t)$ par $v(t) = e^{-At}u(t)$; l'équation (1) prend alors la forme

(6) $\quad v' = L_t\,(v) \qquad$ où $L_t\,(v) = e^{-At}\,K(e^{At}v)$,

et l'équation (2) a la forme simple

(7) $\quad v = \text{const.}$

L'existence de l'opérateur d'onde future signifie que, étant donnée une solution $v(t)$ de (6) , il existe un vecteur constant v_o tel que

$$v\,(t) = v_o + \int_{-\infty}^{t} L_s\,(v(s))ds \quad ,$$

c'est-à-dire tel que

$$< v(t) - v_o,\ w > \to 0 \quad ,$$

quand $t \to \pm\,\infty$, pour tous les vecteurs w du type indiqué (c'est-à-dire $w = (h_1,\ h_2)$, où les normes $\|Bh_1\|_2$, $\|h_1\|_{(p+1)/p}$, et $\|h_2\|_2$ sont finies).

Puisque $\|v\,(t)\| = \|u\,(t)\| \leq$ cte. vu la conservation de l'énergie, il suffit, en utilisant le fait qu'un espace de type L_q , $1 < q < \infty$, est faiblement compact et complet (tel est l'espace définie par l'expression pour l'énergie en termes des données de Cauchy), de démontrer que

$$\lim_{t,\ t' \to \infty} < v\,(t) - v\,(t')\ ,\ w > = 0$$

pour un ensemble dense de vecteurs w , dans l'espace indiqué ; par exemple, l'ensemble de tous les vecteurs w à support compact et indéfiniment différentiables.

L'équation différentielle, $v(t) - v(t') = \int_{t'}^{t} L_s(v(s))\,ds$ montre que

$$< v(t) - v(t'), w > = \int_{t'}^{t} < K(u(s)), e^{As} w > ds \quad .$$

En utilisant l'estimation

$$|< K(u(s)), e^{As} w >| \leq \| K(u(s)) \|_1 \| e^{As} w \|_\infty = O(|s|^{-n/2})$$

(en notant que $\|K(u(s))\|_1 = \int |\phi(\vec{x}, s)^p| \, d_n \vec{x}$, qui est borné parce que $\int |\phi(\vec{x}, t)|^2 \, d\vec{x}$ et $\int |\phi(\vec{x}, t)|^{p+1} d\vec{x}$ sont bornés vu la conservation de l'énergie), on voit que $< v(t) - v(t'), w > \to 0$.*

Note. Notons qu'il existe une autre convergence faible : la convergence faible de $u(t) - e^{tA} v_0$ vers zéro, pour $|t| \to 0$, c'est-à-dire :

$$(u(t) - e^{tA} v_0, w) \to 0$$

pour les vecteurs w indiqués. Mais $< e^{tA} v_0 , w > \to 0$ (essentiellement d'après le lemme de Riemann-Lebesgue) c'est-à-dire $e^{tA} v_0$ converge faiblement vers zéro. Il est intéressant de noter qu'on peut démontrer, par la méthode présente, le fait correspondant dans le cas non-linéaire ; c'est-à-dire, que $u(t)$ converge faiblement vers zéro :

$$< u(t) , w > \to 0$$

pour tous les vecteurs w . La convergence faible de $u(t) - e^{tA} v_0$ vers zéro résulte donc de celle de

$$u(t) \text{ et de } e^{tA} v_0 \;;$$

elle n'a pas d'intérêt pour la théorie de la dispersion.

Comme exemple de la construction de l'opérateur d'onde, appliquant la variété libre dans la variété physique, qui semble la plus convenable pour la théorie des champs quantifiés, nous donnons le

Théorème. Pour une solution quelconque, ϕ_0, d'énergie finie de l'équation

$$\Box \phi_0 = m^2 \phi_0 \qquad (m > 0)$$

dont $\hat{\Phi}_0$ est à support compact dans l'espace-temps de dimension 4, il existe une solution globale faible de l'équation

$$\Box \phi = m^2 \phi + g \phi^p \qquad (g > 0 \; ; \; p \text{ impair} > 1)$$

qui est asymptotique à l'instant $-\infty$ à la fonction ϕ_0 (on emploie la norme définie par l'énergie).

Cette solution est forte et unique pour l'instant voisin de $-\infty$; (pour $p = 3$ elle est forte et unique partout).

Le lemme ci-dessus applique et donne :

$$\| \phi_0 (t) \|_\infty \leq C t^{-3/2}$$

pour $t < -1$, où nous écrivons :

$$\phi_0 (., t) = \phi_0 (t) \quad .$$

Nous considérons la définition récurrente :

$$(1) \qquad \phi_{n+1} (t) = \phi_0 (t) + g \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin((t-s)B)}{B} \phi_n(s)^p ds \quad .$$

Supposons que $\|\phi_n(s)\|_\infty \leq C_n s^{-(3/2-\varepsilon)}$ pour $s < s_o$ et que l'énergie

(2) $m^2 \|\phi_n(s)\|_2^2 + \|\text{grad } \phi_n(s)\|_2^2 + \|\dot{\phi}_n(s)\|_2^2 \leq D_n^2$

pour $s < s_o$ $(s_o < 0)$. Il s'ensuit que

(3) $\|\phi_{n+1}(t)\|_\infty \leq \|\phi_o(t)\|_\infty + g\int_{-\infty}^{t} \left\| \frac{\sin(t-s)B}{B} \phi_n(s)^p \right\|_\infty ds$.

On peut écrire

$$\frac{\sin((t-s)B)}{B} \phi_n(s)^p = \frac{\sin((t-s)B)}{B^2} B\phi_n(s)^p \quad ;$$

l'opérateur $\frac{\sin((t-s)B)}{B^2}$ multiplie la transformée de Fourier de la fonction en question par

$$\frac{\sin((t-s)(m^2+R^2)^{(1/2)})}{m^2+R^2}$$

où R désigne la distance de l'origine dans l'espace dual de l'espace physique E_3 . Cette dernière fonction a une norme dans L_2 qui est bornée, indépendante de $t - s$. Il en résulte que

$$\left\| \frac{\sin((t-s)B)}{B} \phi_n(s)^p \right\|_\infty \leq G_o \left\| B \dot{\phi}_n(s)^p \right\|_2 \quad ,$$

où G_o est une constante. Or pour une fonction f régulière

$$\|Bf\|_2^2 = \langle B^2 f, f \rangle = \langle (m^2 I - \Delta) f, f \rangle = m^2 \|f\|_2^2 + \|\text{grad } f\|_2^2 \quad ,$$

donc l'égalité $\|Bf\|_2^2 = m^2\|f\|_2^2 + \|\text{grad } f\|_2^2$ vaut pour toutes les fonctions f du domaine de l'opérateur B dans $L_2(E_3)$, on a par conséquent

$$\|B\,\phi_n(s)^p\|_2 \leq m\|\phi_n(s)^p\|_2 + \|p\,\phi_n(s)^{p-1}\,\mathrm{grad}\,\phi_n(s)\|_2$$

$$\leq \frac{m^2\,C_n^{(p-1)}}{s^{(3/2-\varepsilon)(p-1)}}\left(\|\phi_n(s)\|_2 + p\,\|\mathrm{grad}\,\phi_n(s)\|_2\right)$$

$$\leq G_1\,C_n^{(p-1)}\,D_n\,s^{-(3/2-\varepsilon)(p-1)} ,$$

où G_1 est une constante. En retournant à l'équation (3) , il suit que

$$\|\phi_{n+1}(t)\|_\infty \leq \frac{C_o}{t^{3/2-\varepsilon}} + gG_o\,G_1\,C_n^{(p-1)}D_n\int_{-\infty}^{t}\frac{ds}{s^{(3/2-\varepsilon)(p-1)}}$$

et finalement que

$$\|\phi_{n+1}(t)\|_\infty \leq \frac{C_o}{t^{3/2-\varepsilon}} + G_2\,C_n^{(p-1)}\,D_n\,t^{-(3/2-\varepsilon)(p-1)+1} . \tag{4}$$

Pour estimer D_{n+1} , notons que l'équation (1) implique par la théorie générale (en notant que $\phi_n(s)^p$ est une fonction de la classe C^1 dans la norme d'énergie) l'équation différentielle

$$\ddot{\phi}_{n+1}(t) + B^2\,\phi_{n+1}(t) = -\,g\,\phi_n(t)^p . \tag{5}$$

En formant l'intégrale de l'énergie de la façon bien connue, on obtient l'équation

(6) $\|\dot{\phi}_{n+1}(t)\|_2^2 + \|B\phi_{n+1}(t)\|_2^2 + G_3\int_{-\infty}^{t} < \phi_n(s)^p , \dot{\phi}_{n+1}(s) > ds = E_o$

où G_3 et E_o sont constantes (E_o étant l'énergie D_o du champ libre ϕ_o , comme il apparaît clairement en faisant tendre t vers $-\infty$)

$$\left|\int_{-\infty}^{t} < \phi_n(s)^p , \dot{\phi}_{n+1}(s) > ds\right| \leq \int_{-\infty}^{t} \|\phi_n(s)^{p-1}\|_\infty \|\phi_n(s)\|_2 \|\dot{\phi}_{n+1}(s)\|_2 ds$$

de la définition de C_n il résulte que

$$\ldots \leq D_n D_{n+1} \int_{-\infty}^{t} C_n^{(p-1)} s^{-(3/2-\varepsilon)(p-1)} ds ,$$

et que

$$\left|\int_{-\infty}^{t} < \phi_n(s)^p , \dot{\phi}_{n+1}(s) > ds \leq C_n^{(p-1)} D_n D_{n+1} G_4 ,$$

où G_4 est une constante. Finalement, on obtient :

(8) $\|\dot{\phi}_{n+1}(t)\|_2^2 + \|B\phi_{n+1}(t)\|_2^2 \leq E_o + G_4 C_n^{(p-1)} D_n D_{n+1} t^{-(3/2-\varepsilon)(p-1)+1}$.

Considérons maintenant les deux relations de récurrence (4) et (8) ; on peut choisir C_o arbitrairement petit, puisque $\|\phi_o(t)\|_\infty = 0(t^{-3/2})$ et $\varepsilon > 0$; en particulier on peut choisir $C_o < 1/2$. En choisissant $|s_o|$ suffisamment grand, on voit que $G_2 (D_o+1)|s_o|^{(-3/2-\varepsilon)(p-1)+1}$ est arbitrairement petit, par exemple $< \frac{1}{2}$ et en particulier $C_1 < 1$. Comme hypothèse de récurrence, supposons maintenant qu'on a aussi : $C_2 < 1, \ldots, C_n < 1$, ainsi que : $D_k < D_o + 1$ pour $k = 1, 2 \ldots, n$. Il en résulte que $C_{n+1} < 1$ et qu'on peut choisir

$$D_{n+1}{}^2 \leq D_o^2 + \text{cte}.\ D_n D_{n+1} |s_o|^{-(3/2-\varepsilon)(p-1)+1} .$$

En choisissant $|s_0|$ plus grand si nécessaire, on obtient

$$D_{n+1}^2 \leq D_0^2 + D_{n+1} ,$$

d'où il suit finalement que

$$D_{n+1} \leq D_0 + 1 .$$

Donc les constantes C_n et D_n restent bornées. On peut maintenant achever la preuve, essentiellement en employant de la façon usuelle la méthode d'approximations successives .

La preuve démontre aussi que l'application de ϕ_0 sur ϕ conserve l'énergie : l'énergie libre de ϕ_0 est égale à l'énergie du champ physique ϕ , à un instant quelconque.

L'unicité résulte de la méthode des approximations successives. L'existence globale de la solution est prouvée dans des articles que cite la bibliographie.

Les résultats précédents ne semblent pas suffire pour transporter la mesure faible de la variété des solutions libres sur la variété des solutions physiques. Mais on peut construire une telle mesure dans le cas traité par le

Corollaire. <u>Supposons que</u> ϕ_0 <u>est une solution de l'équation</u>

$$\Box \phi_0 = m^2 \phi_0 ,$$

<u>telle que pour un instant</u> t_0 ,

$$\emptyset_0\ (t_0),\ \mathrm{grad}\ \emptyset\ (t_0),\ \mathrm{et}\ \dot{\emptyset}_0(t_0)$$

sont dans le domaine de l'opérateur $e^{\varepsilon B}$ (dans L_1). Alors, il existe une solution unique de l'équation

$$\Box\ \emptyset = m^2\emptyset + f\ (\emptyset) \tag{8}$$

(où f est une fonction donnée de classe C^1 qui s'annule au voisinage de zéro et dont la dérivée est bornée) qui à l'instant $-\infty$ est asymptotique à la fonction $\emptyset_0$ (et, en fait, identique à $\emptyset_0$, pour les instants voisins de l'instant $-\infty$).

L'opérateur d'onde Γ_- est donc défini sur la variété des solutions libres de classe C^∞ et de support compact dans l'espace, à chaque instant ; Γ_- est invariant par le groupe de Lorentz.

Preuve : il est clair, vu le lemme, que avant un temps t_0, la fonction $\emptyset_0$ est assez petite pour que $f(\emptyset_0(t)) = 0$ pour $t < t_0$; c'est-à-dire pour $t < t_0$, $\emptyset_0$ satisfait à la même équation que $\emptyset$. Cependant, sous les conditions imposées à la fonction f, il y a une solution unique globale de l'équation (8), ayant, à un instant quelconque, les donnée de Cauchy d'énergie finie. Voici prouvée l'existence de l'opérateur d'onde future Γ_-.

L'invariance par le groupe de Poincaré dit que

$$U\ (L)\Gamma_- = \Gamma_- U_0\ (L) \tag{9}$$

où $U_0(L)$ et $U(L)$ désignent l'action de la transformation L de Poincaré sur les variétés libres et physiques, respectivement. Les opérateurs intervenant ici sont tous continus sur les espaces des données de Cauchy, norme indiquée au-dessus (qui dépend de $e^{\varepsilon B}$) on en déduit aisément qu'il suffit de vérifier l'équation (9) sous sa forme infinitésimale :

(10) $$dU(X)\Gamma_- = \Gamma_- dU_o(X) \quad ,$$

où X désigne une transformation infinitésimale du groupe de Poincaré et dV désigne l'action infinitésimale induite par l'action finie V .

En écrivant $\Phi(t) = \phi(.,t)$, on peut décrire l'opérateur Γ_- transformant le champ libre ϕ qui satisfait à l'équation $\Box \phi_o = m^2 \phi$ en le champ ϕ , qui satisfait à l'équation non-linéaire

(11) $$\Phi(t) = \Phi_{in}(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(B(t-s))}{B} f(\Phi(s))\, ds \quad .$$

En appliquant la transformation de Lorentz infinitésimale $dU(X)$ à la solution ϕ de l'équation non-linéaire, on obtient une solution de l'équation

(12) $$\Box \psi = m^2 \psi + f'(\phi)\psi \quad ,$$

dont les données de Cauchy à un instant quelconque $\bar{t}$ ont la forme

$$\Psi(t) = (X\Phi)(t) \quad , \quad \dot{\Psi}(t) = \frac{d}{dt}(X\Phi)(t) \quad .$$

Or $dU_o(X)$ applique ϕ_o sur $X\phi_o$, donc $\Gamma_- dU_o(X)$ applique ϕ_o sur la solution de l'équation définissant l'action de $d\Gamma_-$; cette action transforme un vecteur ψ_o tangent à la variété libre au point ϕ_o en le vecteur ψ tangent à la variété physique au point $\phi = \Gamma_- \phi_o$ qui est donné par l'équation

(13) $$\psi(t) = \psi_o(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin((t-s)B)}{B} f'(\phi(s))\,\psi(s)\, ds \quad ,$$

qu'on peut obtenir par la différentiation de l'équation (11) par rapport à la fonction Φ_o . L'équation (13) est la même que la forme intégrée de l'équation (12) . Pour un instant t suffisamment petit, la valeur $\psi(t)$

donnée par l'équation (13) est identique à celle de $\not{\psi}_0(t)$, puisque $\emptyset(t') = 0$ pour $t' < t$, donc $f'(\emptyset(s)) = 0$. Pour le même instant, les données de Cauchy pour l'équation (12) sont les mêmes que pour $\not{\psi}_0$, donc la fonction $\not{\psi}$ donnée par l'équation (12) est la même que celle donnée par l'équation (13) .

L'application Γ induit donc une application des mesures m_0 de la variété $\underline{M}_0$ des solutions libres à support compact dans l'espace sur les mesures m de la variété $\underline{M}$ des solutions physiques de supports compacts dans l'espace, de façon naturelle :

$$m(N) = m_0(\Gamma^{-1}(N)) \quad ,$$

N étant un ensemble arbitraire mesurable. Mais les mesures qui interviennent dans la théorie des champs quantifiés ne sont pas les mesures conventionnelles ; ce sont seulement des mesures faibles (de probabilité) ; par exemple, la distribution (au sens des probabilités) normale invariante dans l'espace de Hilbert $\overline{M}_0$, qu'on obtient comme fermeture de la variété libre $\underline{M}_0$ par rapport à la forme unique relativiste positive définie sur $\underline{M}_0$, se rattache intimement au vide libre ; mais elle n'est pas définie par une mesure conventionnelle dans $\overline{M}_0$. La méthode de Gelfand et Vilenkin [3] donne une possibilité d'interpréter une mesure faible comme une mesure conventionnelle dans un espace linéaire choisi convenablement, mais il semble que les difficultés réapparaissent sous une autre forme.

Une mesure faible finie dans un espace linéaire topologique $\underline{L}$ est, par définition, une application linéaire des fonctionnelles linéaires continues de $\underline{L}$ sur les fonctions mesurables d'un espace ayant une mesure conventionnelle finie (qu'il n'est pas nécessaire de spécifier d'une autre façon .

Il existe une façon naturelle d'interpréter une fonction de Baire d'un nombre fini de telles fonctionnelles linéaires comme une fonction mesurable, et de l'intégrer, quand elle est bornée ; mais à une fonction régulière quelconque (non linéaire) sur l'espace $\underline{L}$ même si elle est de classe C^{∞} et bornée, ne correspond pas de fonction mesurable, et on ne peut pas l'intégrer, bien que la mesure de tout l'espace est en un sens fini .

De tels concepts faibles se transforment de façon compliquée par les transformations non-linéaires ; par exemple, la transformée de la distribution invariante normale par un homéomorphisme de classe C^{∞} de l'espace $\bar{M}_0$ n'existe pas, en général. Les transformations qu'on peut raisonnablement appliquer aux mesures faibles sont essentiellement celles dont la différentielle ne diffère d'un opérateur unitaire que par un opérateur compact convenable. Plus particulièrement, nous utilisons la thèse de Gross [5] , dans laquelle il est démontré qu'une fonction donnée dans un espace de Hilbert correspond naturellement à une variable aléatoire <u>bona fide</u> relativement à la mesure faible normale citée ci-dessus, si elle est "Gross-continue" : il existe une suite d'opérateurs de la classe de Hilbert-Schmidt $G_1, G_2, \dots\dots$ tels que : (i) $\operatorname{tr} G_n^* G_n \to 0$; (ii) pour chaque n et $\varepsilon > 0$ il existe un opérateur K de la classe de Hilbert-Schmidt tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $\|K(x-y)\| < 1$, $\|G_n x\| < 1$, $\|G_n y\| < 1$. En utilisant cette notion, on peut démontrer le

THEOREME. <u>Pour l'équation</u> $\Box \phi = m^2 \phi + f(\phi)$ (f <u>comme ci-dessus</u>) <u>l'opérateur d'onde future de la variété</u> $\underline{M}_0$ (<u>des solutions libres</u>) <u>transforme la</u>

mesure normale faible de $\underline{M}_o$ dont l'opérateur de covariance C est suffisamment régulier, en une mesure bien définie faible de l'espace des données de Cauchy à un instant t fini quelconque pour l'équation non-linéaire ; cette mesure est invariante par le déplacement dans le temps : on peut choisir l'opérateur C tel que l'état du champ libre quantifié associé à C est arbitrairement voisin de l'état du vide (dans la topologie faible).

On ne sait pas si l'on peut transformer par l'opérateur d'onde la mesure normale de la variété libre dont l'opérateur de covariance est égal à I et qui est associée à l'état du vide, en une mesure de la variété physique ; du point de vue physique, il n'est pas déraisonnable que ce soit impossible, puisqu'on ne peut pas observer le vide physique exact.

La preuve du théorème dépend principalement des inégalités concernant la propagation définie par l'équation non-linéaire différentielle, qui a servi à établir les conditions de Gross. En notant que $\| e^{\varepsilon B} f \|_1 \leq \| Cf \|_2$ pour un opérateur C convenable, on peut appliquer le lemme pour transformer une mesure de $\underline{M}_o$ en une mesure de $\underline{M}$. La condition de Gross pour la quasi-invariance dépend finalement d'estimations de la trace absolue des opérateurs associés aux solutions élémentaires opérationnelles des équations variationnelles du premier ordre.

On peut peut-être clarifier la signification de l'invariance de la mesure par une interprétation du point de vue de la théorie des équations différentielles stochastiques. Cette invariance signifie essentiellement qu'il existe une solution de l'équation

$$\square \check{\phi} = m^2 \check{\phi} + f(\check{\phi}) \quad ,$$

où les valeurs de la fonction $\check{\phi}$ ne sont pas des nombres, mais des variables aléatoires ; et que pour t fixe, la distribution probable des valeurs $\phi(\vec{x}, t)$ et $\dot{\phi}(\vec{x}', t)$, pour toutes les valeurs $\vec{x}$ et $\vec{x}'$, est indépendante de l'instant t. D'ailleurs, on peut choisir la distribution probable asymptotique à l'instant $-\infty$ à la distribution normale donnée.

Pour indiquer la preuve brièvement, notons que l'inégalité

$$\| e^{\varepsilon B} f \|_1 \leq \| Cf \|_2$$

implique que toutes les solutions libres appartenant à un même voisinage*, suffisamment petit, (dans la topologie de Gross décrite ci-dessus) coïncident avec des solutions de l'équation non-linéaire aux dérivées partielles donnée pour $t < t_0$, ou t_0 est le même pour toutes les solutions. L'application $\phi_0 \to \phi$ est alors l'identité, dans ce voisinage de Gross, pour l'instant t tel que $t < t_0$; donc cette application, sur l'espace des données de Cauchy pour de tels instants, est Gross-continue, dans le voisinage en question.

Maintenant, pour transporter la mesure à un instant arbitraire, il est nécessaire de démontrer que la propagation d'un instant fini à un autre est faiblement continue dans la topologie de Gross. Pour cela il est à nouveau nécessaire que $C \neq I$; en effet, pour la distribution normale dans l'espace des données de Cauchy à l'instant t qui correspond au vide libre, la valeur

---

* Le théorème de Gross s'applique à la mesure normale de l'opérateur de covariance C : il suffit de remarquer que $C^{-(1/2)}x$ a la distribution normale de covariance I si x est un vecteur aléatoire de la distribution normale ayant C pour opérateur de covariance.

$\phi(\vec{x}, t)$ n'est pas une variable aléatoire bien définie, mais seulement une variable aléatoire faible ; par conséquent, la fonction $f(\phi(\vec{x}, t))$ n'est pas définie ; elle n'est ni une variable aléatoire forte, ni même faible.*
Pour $C = B^a$ et pour toute fonction de B de croissance plus rapide, où a est un constant qui dépend de la dimension de l'espace, $\phi(\vec{x}, t)$ est une variable aléatoire bien définie, ce qui explique que l'équation différentielle puisse induire une loi de propagation de la distribution probable correspondante à C , en utilisant le critérium de Gross*.

---

* Mais on peut peut-être imaginer une autre définition pour $f(\phi(\vec{x},t))$. A propos de cette question, dans le cas de l'espace de dimension un, on peut définir $\phi(\vec{x},t)^r$ comme étant une variable aléatoire faible pour $r = 2, 3, \ldots$, même quand $C = I$, au moyen d'une définition spéciale qui comporte une sorte de renormalisation de la masse. Cependant, on ne sait pas comment énoncer cette définition pour d'autres distributions probables, suffisamment générales pour former une classe invariante, même infinitésimalement, pour la propagation que définit l'équation non linéaire.

* Nous n'utilisons pas explicitement les variables aléatoires $\phi(\vec{x},t)$. Ces variables forment, à un instant t fixe, une généralisation nouvelle à l'espace de plusieurs dimensions du mouvement Brownien de Wiener ; vraisemblablement, il est possible de choisir une fonction représentative (partout définie) pour toutes les valeurs aléatoires de

$$\phi(\vec{x},t)$$

(qui d'abord ne sont que des classes d'équivalence des fonctions mesurables définies presque partout de telle façon que $\phi(., t)$ soit continue avec la probabilité un, en généralisant le théorème de Wiener ; mais les preuves usuelles ne se généralisent pas. Si c'est possible, alors l'équation différentielle pour $\phi(x,t)$ aléatoire vaut probablement au sens classique ; cette question est l'analogue pour les équations stochastiques de la question de régularité des solutions généralisées des équations aux dérivées partielles classiques.

La mesure invariante m dans $\underline{M}$ détermine un espace L_2 ($\underline{M}$) ainsi qu'un groupe à un paramètre unitaire induit par les déplacements dans le temps. Pour définir aussi les opérateurs auto-adjoints du champ il est nécessaire d'établir dans les cas convenables par la méthode de Gross citée la "quasi-invariance". Un groupe de transformation T à un paramètre qui ne conserve pas la mesure, mais qui est quasi-invariant, détermine cependant un groupe unitaire U (T) à un paramètre, d'une façon bien connue, par multiplication par la racine carrée de la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure transformée de la mesure originelle :

$$U\ (T)\ :\ f\ (x) \rightarrow f\ (Tx)\sqrt{\frac{dm\ (Tx)}{dm\ (x)}}\ .$$

Le fait qu'on peut choisir C tel que la mesure normale correspondante définit un état qui est arbitrairement près du vide libre ne concerne que le champ libre, et nous ne discuterons pas davantage cette question. En formant la somme directe des champs obtenus pour tous les opérateurs C admissibles, on obtient un analogue au système de Weyl pour les champs libres qui est indépendant de la représentation associée aux relations canoniques de commutation. On peut définir le vide physique similairement, comme un état régulier de cette algèbre d'opérateurs, qui est invariant par les déplacements dans le temps, et tel que le spectre d'énergie, dans l'espace de Hilbert $\underline{K}$ déterminé par l'état, est non-négatif. Si cet état existe, le sous-espace engendré par l'action du champ sur le représentant dans $\underline{K}$ du vide constitue l'ensemble des états physiques normalisables du champ quantifié .

On ne sait pas s'il existe une mesure invariante par le groupe de Poincaré sur la variété des solutions d'une équation relativiste non-linéaire ; du point de vue physique, le problème suivant est plus important : on ne sait pas qu'il existe une mesure invariante par les déplacements dans le temps telle que le spectre d'énergie correspondant est non-négatif.(Vraisemblablement, une telle mesure doit être invariante par le groupe de Poincaré, mais la réciproque n'est pas vraie même dans le cas libre). Puisque la dynamique est plus fondamentale que la symétrie, et puisque nous avons une équation dynamique bien définie pour le champ quantifié, il n'est pas important d'insister sur l'invariance par le groupe de Lorentz. En fait, cette invariance doit résulter de l'invariance de l'équation pour le groupe de Poincaré. On peut donc éclairer la théorie par la considération des équations qui sont seulement invariantes par les déplacements dans le temps. Les plus simples de ces équations sont les équations de la forme*

$$\square \phi = m^2 \phi + V(x) \phi \tag{14}$$

où $V(x)$ est une fonction donnée. De telles équations interviennent dans les calculs de la théorie des champs et exhibent, sous forme plus explicite, beaucoup des difficultés qu'on a pensées être associées aux systèmes non-linéaires*

---

* L'approximation $(m^2 I - \Delta + V(x))^{(1/2)} \sim mI - \dfrac{\Delta}{2m} + \dfrac{V(x)}{2m}$ conduit à une théorie de la dispersion par un potentiel qui est plus simple que la théorie de l'équation (14) ; mais cette approximation déforme la localisation dans l'espace ; elle est donc un guide incertain peu sûr pour le développement de la théorie des interactions locales, définies par des équations aux dérivées partielles.

* par exemple, on ne peut pas effectuer par une transformation unitaire la transformation canonique qui relie le système au système libre.

En fait, l'étude d'une telle équation introduit une structure complexe sur la variété de ses solutions ; cela remplace peut-être la difficulté de construire le vide dans le cas non-linéaire, et évite, en partie, cette construction. Cette structure complexe a les propriétés suivantes : elle est invariante pour les déplacements dans le temps ; elle est invariante par l'opérateur S_c de dispersion, quand il existe. On peut construire le sous-espace contenant le vide et invariant par l'opérateur du champ dans ce cas, et démontrer qu'il est constitué, comme dans le cas libre discuté dans la première conférence, par toutes les fonctions holomorphes et de carrés sommables, sur la variété des solutions. L'opérateur S_q de dispersion pour le champ quantifié est obtenu simplement comme l'application de ce sous-espace en lui-même

$$f(\emptyset) \to f(S_c\emptyset)$$

induite par S_c. On peut vérifier explicitement qu'on obtient une théorie en accord complet avec ce qu'on prévoyait heuristiquement.

L'analogue non-linéaire de cette étude consiste à prolonger la structure symplectique définie ci-dessus, dans la variété $\underline{M}$ des solutions de l'équation non-linéaire donnée, en une structure Kählerienne complète convenable. Une telle structure résulte de la détermination d'une structure complexe convenable ; si $J_\emptyset$ désigne l'action de l'unité complexe i dans l'espace tangent au point $\emptyset$ de $\underline{M}$, la structure Riemannienne G correspondante est donnée par l'équation

$$G_\emptyset(\lambda, \lambda') = \Omega_\emptyset(J_\emptyset\lambda, \lambda') ,$$

où Ω est la forme fondamentale symplectique. Quant à la détermination de cette structure complexe, notons que la condition de l'invariance dynamique ne suffit pas à la définir sans ambiguité. En effet, il existe, dans l'espace des données de Cauchy à un instant t_0, une infinité de structures Kählériennes qui sont compatibles avec la forme sur cet espace qui correspond à la forme Ω (c'est-à-dire son image par l'application d'une solution sur ses données de Cauchy à l'instant t_0) ; on peut propager toutes ces structures Kählericnnes à l'espace des données de Cauchy pour un instant arbitraire, par l'équation différentielle donnée ; on obtient ainsi diverses structures invariantes temporellement dans $\underline{M}$.

Dans le cas d'une équation relativiste, ajouter la condition d'invariance de la structure complexe par le groupe de Poincaré ne suffit pas toujours, semble-t-il, à déterminer une structure unique. Il est très difficile de donner un exemple explicite de deux telles structures qui diffèrent, mais on peut obtenir comme suit une raison formelle de douter de cette unicité. Supposons que les opérateurs d'onde passé et futur existent et sont invariants par le groupe de Poincaré ; alors, on peut transférer la structure Kählerienne usuelle de la variété $\underline{M}_0$ des solutions libres (structure unique parmi les structures linéaires relativistes de cette variété $\underline{M}_0$), à la variété $\underline{M}$ de deux façons, à savoir, par les deux opérateurs d'onde. On peut penser que ces structures doivent coïncider ; mais cela n'est pas probable. En fait, l'identité de ces deux structures complexes signifie précisément que l'opérateur de dispersion S est analytique (complexe), par rapport à la structure usuelle dans $\underline{M}_0$; puisque S est symplectique, S est alors un automorphisme de la variété Kählérienne $\underline{M}_0$; en particulier, S est une isométrie ; mais une isométrie d'un espace de Banach est nécessairement linéaire ; ceci n'est certainement pas le cas pour l'opérateur de dispersion d'une équation non-linéaire en général.

Il est maintenant clair, que la condition supplémentaire qu'il faut imposer à la structure complexe $J_\emptyset$ est celle de l'invariance par rapport à l'opérateur de dispersion S ; on peut regarder cette condition comme une condition aux limites servant à compléter l'équation différentielle d'ordre deux qui permet d'exprimer la condition de l'invariance dynamique. Plus explicitement, désignons par $j(\emptyset, t)$ l'action de l'unité complexe i, au point $\emptyset$ de $\underline{M}$, dans la représentation de l'interaction décrite ci-dessus, à l'instant t ; c'est-à-dire $j(\emptyset, t)$ agit dans l'espace des données de Cauchy de $\emptyset$ et est défini par l'équation :

$$j(\emptyset, t) = (dP_t)\, J_\emptyset\, (dP_t)^{-1}$$

où

$$P_t : \emptyset \to e^{-tA}\, u(t)$$

(ici A désigne l'opérateur qui permet de mettre l'équation libre sous la forme abstraite $u' = Au$; $u(t)$ désigne les donnée de Cauchy pour $\emptyset$ à l'instant t). La condition supplémentaire donnée a alors la forme

$$j(\emptyset, -\infty) = j(\emptyset, +\infty) \quad .$$

On peut exprimer la condition d'invariance dynamique par une équation différentielle pour $j(\emptyset, t)$, de la forme $j'(\emptyset, t) = L\, j(\emptyset, t)$, où L désigne un opérateur qui dépend de t et $\emptyset$; de plus on a, bien entendu, les conditions algébriques :

$$j(\emptyset, t)^2 = -1 \;;$$

$j(\emptyset, t)$ est symplectique .

La résolution de cet ensemble d'équations différentielles, avec les conditions aux limites et algébriques indiquées, fournit seulement une structure presque complexe ; la question de son intégrabilité reste ouverte.

La question de l'existence d'une structure complexe convenable est donc assez compliquée ; mais on peut donner une condition suffisante en termes plus habituels, portant sur l'existence de formes quadratiques invariantes associées à des équations différentielles linéaires.

Théorème. Il existe une structure Kählérienne dans la variété des solutions de l'équation non-linéaire du type indiqué ci-dessus si les opérateurs d'onde existent et sont réguliers, et s'il existe, pour chaque solution ϕ de l'équation non-linéaire, une forme quadratique non-dégénérée Q_ϕ sur l'espace M_0 des solutions de l'équation libre, qui est invariante par l'opérateur linéaire tangent à l'opérateur de dispersion au point ϕ et telle que $Q_{\Gamma\phi_0}$ comme fonction de l'élément ϕ_0 de M_0 est le Hession d'une fonction fixe de M_0.

En fait, si les formes Q_ϕ existent, on peut définir la structure j_ϕ comme il suit : d'abord, on définit

$$j_\phi' = T / (-T^2)^{(1/2)} \quad ,$$

où T désigne l'opérateur unique anti-symétrique par rapport à la forme Q_ϕ tel que $\Omega(\psi_1, \psi_2) = Q_\phi(T\psi_1, \psi_2)$ pour les solutions arbitraires de l'équation libre ; le théorème spectral pour les opérateurs normaux dans un espace de Hilbert implique l'existence de j_ϕ' ; j'_ϕ définit alors une structure presque-complexe dans la variété des solutions libres S ; on peut transformer cette structure par l'opérateur d'onde passé ; on obtient ainsi la structure presque complexe $j_\emptyset$ dans $\underline{M}$. Le point essentiel du théorème est la vérification des conditions d'intégrabilité de cette structure. La preuve résulte d'un calcul explicite de la différentielle $\partial_\emptyset j_\emptyset$ et des commutateurs des champs de vecteurs ; ce calcul est assez analogue à celui de l'appendice de la partie II.

En général, la structure Riemannienne subordonnée à la structure Kählérienne est tout à fait différente de la structure définie par les formes $Q_\emptyset$. Par exemple, pour l'équation

$$\square\, \emptyset = m^2\, \emptyset + V\, (\vec{x})\emptyset \quad ,$$

on peut prendre comme forme $Q_\emptyset$:

$$Q\,(\lambda\,,\lambda) = \|B\lambda\|_2{}^2 + \|\dot{\lambda}\|^2{}_2 \quad ,$$

où B est l'opérateur indiqué ci-dessus et $\|\,.\,\|_2$ indique la norme L_2 dans l'espace L_2; c'est la forme de l'énergie. On peut calculer la forme positive définie de la structure Kählérienne et l'on obtient :

$$\|B^{(1/2)}\lambda\|_2{}^2 + \|\,B^{-(1/2)}\dot{\lambda}\|_2{}^2 \quad .$$

Dans le cas relativiste, c'est-à-dire dans le cas où $V = 0$, cette dernière forme est invariante par le groupe de Lorentz, tandis que la forme de l'énergie n'est jamais invariante.

La forme positive définie par la structure Kählérienne détermine essentiellement l'espérance du produit de deux opérateurs du champ quantique $\tilde{\emptyset}$ dans l'état du vide.

Pour une autre étude de la construction d'une structure complexe, dans le cas du champ libre sur un espace-temps courbe, voir les travaux de A. Lichnerowicz [8] et de E. Combet [2]. Ces travaux concernant principalement la définition des opérateurs de création et d'annihilation pour le champ quantique, mais cette question est reliée étroitement à ce que nous considérons ici.

Quand une structure complexe convenable existe, il convient de modifier les opérateurs différentiels $\tilde{\phi}(x)$ de la variété $\underline{M}$, que définit la partie III, de telle façon que ces opérateurs deviennent holomorphes quand on les transforme par un opérateur fixe K : $\tilde{\phi}(x) \to K\tilde{\phi}(x)K^{-1}$, qui n'affecte pas les propriétés fondamentales du champ ; on peut alors identifier le sous-espace engendré par l'action des opérateurs du champ sur le vide avec le sous-espace des fonctionnelles holomorphes. Prouver l'existence de l'opérateur K est un problème tout à fait difficile ; heureusement, il n'est pas nécessaire de résoudre ce problème pour calculer l'énergie et l'opérateur de dispersion du champ quantique, qui seuls sont actuellement observables physiquement ; comme dans le cas d'un champ satisfaisant à une équation linéaire, on peut définir l'énergie et ces opérateurs de dispersion comme les opérateurs linéaires induits canoniquement dans l'espace des fonctionnelles holomorphes par les opérateurs correspondants classiques (non-linéaires).

BIBLIOGRAPHIE SUPPLÉMENTAIRE

[1] A.R. BRODSKY. Asymptotic decay of solutions to the relativistic wave equation and the existence of scattering for certain non linear hyperbolic equations. These, M.I.T., 1964.

[2] E. COMBET. A paraître, C.R. Acad. Sci. Paris.

[3] I.M. GELFAND et N.Y. VILENKIN. Les distributions, t. 4. Moscou, 1961.

[4] R.W. GOODMAN et I.E.SEGAL. Anti-locality of certain Lorentz invariant operators. A paraître, Jour. Math. Mech. 1965.

[5] L. GROSS. Integration and non linear transformations in Hilbert space (these, Univ. de Chicago, 1958). Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), 404-440.

[6] K. JÖRGENS. Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen. Math. Z. 77(1961), 295-308.

[7] A. LICHNEROWICZ. Propagateurs, commutateurs, et anticommutateurs en relativité générale. Conférences, Les Houches, l'été, 1963, p. 821-861.

[8] A. LICHNEROWICZ. Propagateurs et quantification en relativité générale. Proceedings on theory of Gravitation, Warsaw, 1964, p. 177-188. v. aussi Cah. de Physique, 1964-65,

[9] I. SEGAL, Non-linear semi groups. Ann. of Math. 78 (1963) 339-364.

[10] ------- The global Cauchy problem for a relativistic scalar field. Bull. Soc. Math. France 91 (1963), 129-135.

[11] ------- Algebraic integration theory, à paraître, Proc. Amer. Math. Soc. 1965.

[12] W. STRAUSS. La décroissance asymptotique des solutions des équations d'onde non non linéaires. C.R. Acad. Sci. Paris t. 256 (1963) 2749-50.

[13] --------- Les opérateurs d'onde pour des équations d'onde non linéaires indépendantes du temps. C.R. Acad. Sci. Paris. t. 256 (1963).