

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN LERAY

**Équations hyperboliques non-strictes : contre-exemples, du type
de Giorgi, aux théorèmes d'existence et d'unicité**

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1964-1965), p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965__2_1_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES NON-STRICTES :
 CONTRE-EXEMPLES, DU TYPE DE GIORGI, AUX THÉORÈMES
 D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

par

Jean LERAY

Introduction

1. Considérons dans $\underline{\mathbb{R}}^{\ell}$ un problème de Cauchy, hyperbolique non strict, d'inconnue $u(x)$:

$$(1.1) \quad \begin{cases} a_1(x,D) \dots a_p(x,D) u(x) = b(x,D) u(x) + v(x) \\ D^{m-1} u|_{S_0} \text{ donné ;} \end{cases}$$

$D = \frac{\partial}{\partial x}$; a_1, \dots, a_p sont p opérateurs strictement hyperboliques relativement à S_0 . Notons

$$\text{ordre}(a_1 \dots a_p) = m ; \text{ ordre}(b) \leq m - p + q, \quad \text{où } 0 \leq q.$$

Supposons que S_0 est un hyperplan ; notons $\gamma^{n,(\alpha)}$ la classe des fonctions $\underline{\mathbb{R}}^{\ell} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ dont les dérivées $f^{(n)}$ d'ordres $\leq n$ ont des restrictions aux hyperplans S_t parallèles à S_0 qui vérifient uniformément par rapport à t la condition d'appartenir à la classe α de Gevrey :

$$\sup_{\substack{x \in S_t \\ |\beta| \leq s}} |D^{\beta} f^{(n)}| \leq (\text{const.})^s (s!)^{\alpha}$$

où D^{β} est une dérivée, d'ordre $|\beta|$, sur S_t .

On sait ceci (pour l'énoncé précis voir [2], n°23,24) : si les données du problème de Cauchy (1.1) appartiennent à la classe $\Upsilon^{n,(\alpha)}$, alors ce problème possède une solution unique et $u \in \Upsilon^{n,(\alpha)}$, quand on a :

$$n \geq m+p, \quad 1 \leq \alpha < \frac{p}{q}.$$

Si $1 \leq \alpha = \frac{p}{q}$, ces théorèmes d'existence et d'unicité valent sous certaines restrictions (existence locale, c'est-à-dire au voisinage de S_0 ; unicité sous l'hypothèse $u \in \Upsilon_2^{m+p,(\alpha)}$).

Un exemple de Giorgi montre que ces théorèmes deviennent faux quand on supprime l'hypothèse $\alpha \leq \frac{p}{q}$; plus précisément, de Giorgi montre que cette hypothèse est nécessaire dans le cas $m = p = 8, q = 4$.

Nous allons construire, par procédé simplifiant⁽¹⁾, celui qu'emploie de Giorgi, des contre-exemples prouvant que, quels que soient⁽²⁾ $m \geq p \geq 1$ et $q \geq 1$, l'hypothèse $\alpha \leq \frac{p}{q}$ est nécessaire à la validité des théorèmes d'existence et d'unicité⁽³⁾ qu'énonce [2] (n° 23,24, 25 et 26).

Cependant, si l'on impose à a_1, \dots, a_p, b d'être réels, nous ne prouvons la nécessité de cette hypothèse $\alpha \leq \frac{p}{q}$ que dans le cas où q est pair.

(1) Là où nos § 2 et § 3 emploient 5 bandes, de Giorgi en emploie 7.

(2) Aucune hypothèse n'est faite sur p/q .

(3) et aussi à la validité de théorèmes de G. Talenti [3] apparentés à ceux-ci.

§ 1. Préliminaires

2. RÉDUCTION AU CAS : $\ell = 2$, $m = p$.- Le théorème d'existence implique le théorème d'unicité, d'après Holmgren : voir [2], n°24. Il suffit donc de construire un contre-exemple au théorème d'unicité. Nous choisissons ce contre-exemple fonction de deux des variables indépendantes, ce qui nous ramène au cas où $\underline{\mathbb{R}}^\ell = \underline{\mathbb{R}}^2$.

Supposons que l'équation, à coefficients indéfiniment différentiables,

$$(2.1) \quad \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b(t, x, \frac{\partial}{\partial x})u \quad (\text{ordre } (b) \leq q)$$

possède une solution, indéfiniment différentiable, contredisant le théorème d'unicité, c'est-à-dire s'annulant p fois avec t ; on voit que toutes ses dérivées s'annulent avec t . Par suite u est un contre-exemple au théorème d'unicité pour l'équation

$$\prod_{k=1}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = \prod_{k=1}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} \right) b u$$

qui est du type (1.1), avec

$$a_1 = \prod_{k=0}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad a_j = \frac{\partial}{\partial t} \quad (1 < j \leq p).$$

Pour traiter le cas (m, p, q) quelconque, il nous suffit donc de construire, pour tout (p, q, α) tel que $\frac{p}{q} < \alpha$, un contre-exemple au théorème d'unicité concernant une équation du type (2.1); pour ce type d'équation, $m = p$.

3. QUASI-NORMES FORMELLES.- Nous notons (t, x) les coordonnées de $\underline{\mathbb{R}}^2$ et S_t la droite d'abscisse t . Etant donnée une fonction $u(t, x)$, définie sur une bande $T_0 \leq t \leq T_1$, nous définissons sa quasi-norme

$$|u, S_t| = \sup_x |u(t, x)|$$

et sa quasi-norme formelle

$$(3.1) \quad |D^{h, \infty} u, S_t, \rho| = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_j \left| \frac{\partial^{j+s} u}{\partial t^j \partial x^s}, S_t \right|, \quad \text{où } 0 \leq j \leq h,$$

c'est une série formelle en ρ , qui peut être une fonction de ρ holomorphe à l'origine.

Soit une série formelle

$$\Phi(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \Phi_s ;$$

$$\Phi(\rho) \gg 0 \quad \text{signifie } \Phi_s \geq 0, \quad \forall s ;$$

on dit que $\Phi \in \Gamma^{(\alpha)}$ (classe de Gevrey formelle) quand il existe une constante c , dépendant de Φ , telle que

$$(3.2) \quad \Phi_s \leq c^s (s!)^\alpha ;$$

on dit que $u \in \gamma^{h, (\alpha)}$ (classe de Gevrey) quand il existe une série formelle $\Phi(\rho)$, indépendante de t , telle que

$$(3.3) \quad |D^{h, \infty} u, S_t, \rho| \leq \Phi(\rho) \in \Gamma^{(\alpha)} .$$

Etant donné un opérateur différentiel

$$b(t, x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{j=0}^q b_j(t, x) (\frac{\partial}{\partial x})^j ,$$

nous notons

$$\left| D^{h, \infty} b, S_t, \rho \right| = \sum_{j=0}^q \left| D^{h, \infty} b_j, S_t, \rho \right| ;$$

nous disons que $b \in \Upsilon^{h, (\infty)}$ quand $b_j \in \Upsilon^{h, (\infty)}$, $\forall j$.

4. LE CONTRE-EXEMPLE A CONSTRUIRE est, d'après le n°2, le suivant :

Etant donnés (p, q, α) tels que

$$p \geq 1, \quad q \geq 1, \quad \frac{p}{q} < \alpha ,$$

construire, sur une bande $0 \leq t \leq T$ de $\underline{\underline{R^2}}$, une équation linéaire homogène

$$(4.1) \quad \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b(t, x, \frac{\partial}{\partial x})u \quad (\text{ordre } b \leq q)$$

possédant une solution $u(t, x) \neq 0$, telle: que

$$(4.2) \quad \frac{\partial^h u}{\partial t^h}(0, x) = 0, \quad \forall h ;$$

$$(4.3) \quad u \in \Upsilon^{h, (\infty)}, \quad b \in \Upsilon^{h, (\infty)}, \quad \forall h .$$

Note.- u et b sont indépendants de h .

De Giorgi construit un tel contre-exemple en résolvant d'abord le problème non homogène que voici.

5. ÉNONCÉ D'UN PROBLÈME NON HOMOGENÈ.- Nous nous donnons (p, q, α) , tels que

$$p \geq 1, \quad q \geq 1, \quad \frac{p}{q} < \alpha,$$

un nombre ℓ_1 et un paramètre $\ell \leq \ell_1$; nous cherchons sur la bande

$$0 \leq t \leq 1$$

de \mathbb{R}^2 une équation linéaire homogène

$$(5.1) \quad \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b(t, x, \frac{\partial}{\partial x})u \quad (\text{ordre } (b) \leq q; \text{ } b \text{ dépend de } \ell)$$

et une solution u de cette équation telles que :

$$(5.2) \quad \begin{cases} u(t, x) = e^{\ell}, \quad b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 0, \\ u(t, x) = e^{\ell'}(\ell), \quad b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 1. \end{cases}$$

$$(5.3) \quad \begin{cases} |D^{h, \infty} u, s_t, \rho| \ll \Theta(\ell) \Phi(\rho), \quad \forall h, \\ |D^{h, \infty} b, s_t, \rho| \ll \Theta(\ell) \Phi(\rho), \quad \forall h, \end{cases}$$

où : ℓ', Θ, Φ dépendent de h ; Φ ne dépend pas de ℓ ; $\Phi \in \Gamma^{(\alpha)}$; ℓ' et Θ sont des fonctions de ℓ , ayant les propriétés suivantes :

$$\ell'(\ell) < \ell \quad ;$$

si nous définissons les suites $\ell_1, \ell_2, \dots, \Theta_1, \Theta_2 \dots$ par la loi de récurrence :

$$\ell_{k+1} = \ell'(\ell_k), \quad \Theta_k = \Theta(\ell_k)$$

alors

$$(5.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k^c \theta_k = 0 \quad \text{pour toute constante } c .$$

6. CONSTRUCTION⁽¹⁾ DU CONTRE-EXEMPLE $u(t,x)$ AYANT LES PROPRIÉTÉS

QU'EXIGE LE n°4.- Supposons résolu le problème non homogène qu'énonce le n°5 ; sa solution, pour $\ell = \ell_k$, sera notée $b_k(t,x, \frac{\partial}{\partial x})$, $u_k(t,x)$.

Définissons T_1, T_2, \dots par la loi de récurrence :

$$T_1 = 0, \quad T_{k+1} - T_k = \frac{1}{k^2} ;$$

soit

$$T = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty .$$

Définissons

$$b(x,t, \frac{\partial}{\partial x}) = k^{2p} b_k\left(\frac{t - T_k}{T_{k+1} - T_k}, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$u(x,t) = u_k\left(\frac{t - T_k}{T_{k+1} - T_k}, x\right) \quad \text{pour } T_k \leq t \leq T_{k+1} .$$

Vu (5.2), b et u sont indéfiniment dérivables sur la bande $0 \leq t < T$;
vu (5.1), sur cette bande, (4.1) est vérifiée.

Vu (5.3) :

$$|D^{h,\infty} u, S_t, \rho| \ll k^{2h} \theta_k \Phi(\rho)$$

$$|D^{h,\infty} b, S_t, \rho| \ll k^{2(h+p)} \theta_k \Phi(\rho), \quad \text{où } \Phi \in \Gamma(\alpha)$$

D'où, vu (5.4) :

$$|D^{h,\infty} u, S_t, \rho| \ll o(t) \Phi(\rho),$$

$$|D^{h,\infty} b, S_t, \rho| \ll o(t) \Phi(\rho),$$

où $\lim_{t \rightarrow T} o(t) = 0$; bien entendu, $o(t)$ dépend de h .

(1) Je remercie K. Jörgens d'avoir rectifié cette partie de mon exposé.

Donc $u \in \gamma^{h,(\alpha)}$, $b \in \gamma^{h,(\alpha)}$, $\forall h$; toutes les dérivées de u et des coefficients de b s'annulent pour $t = T$.

Nous avons construit le contre-exemple qu'exige le n°4, à la permutation près de 0 et T.

7. CONCLUSION DU § 1.- Ce qu'affirme l'introduction, à savoir la nécessité de l'hypothèse $\alpha \leq p/q$ dans les théorèmes d'existence et d'unicité concernant l'équation hyperbolique non stricte, sera donc prouvé quand nous aurons résolu le problème non homogène, qu'énonce le n°5.

§ 2. Résolution du problème non homogène (n°5)

Il faut évidemment supposer u et b fonctions de x ; il suffira de prendre u linéaire en $e^{i\omega x}$, où $\omega = \omega(\ell)$. Le terme de u indépendant de x est une fonction de t qui sera constante près des bords de la bande; le coefficient de $e^{i\omega x}$ aura pour coefficient, dans u , une fonction de t qui sera constante au centre de la bande. Cette bande ne sera pas la bande $0 \leq t \leq 1$, comme l'annonce le n°5, mais la bande

$$0 \leq t \leq 5.$$

Notation. c désignera divers nombres, fonctions de (h, p, q) , mais indépendants de ℓ .

8. INTRODUCTION DU TERME EN $e^{i\omega x}$ DANS u .-

Lemme 1.- Donnons-nous des nombres

$$m < \ell, \quad \omega > 1.$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leq t \leq 1$$

une équation du type (5.1) admettant une solution u , telle que

$$u(t,x) = e^{\ell} , b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 0 ;$$

$$u(t,x) = e^{\ell} + e^{m+i\omega x} , b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 1 ;$$

$$\left| D^{h,\infty} u, S_t, \rho \right| \ll c e^{\ell + \omega \rho} ;$$

$$\left| D^{h,\infty} b, S_t, \rho \right| \ll c e^{m - \ell + \omega \rho} .$$

Notation.- $f(t)$ désignera une fonction fixe, indéfiniment dérivable, telle que

$$f(t) = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 0, f(t) = 1 \text{ pour } t \text{ voisin de } 1.$$

Preuve.- La fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1) :

$$u = e^{\ell} + e^{m+i\omega x} f(t)$$

$$b = e^{m-\ell+i\omega x} \frac{d^p f(t)}{dt^p} \left(\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right)$$

9. AUGMENTATION DU COEFFICIENT DE $e^{i\omega x}$ DANS u .-

Lemme 2.- Donnons-nous des nombres

$$m < \ell < n , \omega \text{ tels que } n - m > 1, \omega > 1 .$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leq t \leq 2$$

une équation du type (5.1) admettant une solution u , telle que

$$u(t,x) = e^{\ell} , b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 0 ;$$

$$u(t,x) = e^{\ell} + e^{n+i\omega x} , b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 2 ;$$

$$\left| D^{h,\infty} u, S_t, \rho \right| \ll c(n-m)^h e^{n+\omega\rho}$$

$$\left| D^{h,\infty} b, S_t, \rho \right| \ll c e^{m-\ell+\omega\rho} + c \frac{(n-m)^p}{\omega^q}$$

Preuve.- Définissons a et u par le lemme 1 pour $0 \leq t \leq 1$. Pour $1 \leq t \leq 2$, la fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1) :

$$u = e^{\ell} + e^{nf+m(1-f)+i\omega x} \quad \text{où } f = f(t-1) ;$$

$$b = e^{-nf-m(1-f)} \frac{d^p e^{nf+m(1-f)}}{dt^p} \frac{1}{(i\omega)^q} \frac{\partial^q}{\partial x^q} .$$

Or

$$e^{-nf-m(1-f)} \frac{d^p e^{nf+m(1-f)}}{dt^p}$$

est un polynome en $n-m$ de degré p , dont les coefficients sont des fonctions fixes de t .

10. MODIFICATION DU TERME DE u INDÉPENDANT DE x .

Lemme 3.- Donnons-nous des nombres

$$m < \ell' < \ell < n, \quad \omega \text{ tels que } n-m > 1, \quad \omega > 1.$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leq t \leq 3$$

une équation du type (5.1) admettant une solution u , telles que

$$u(t,x) = e^{\ell}, \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 0 ;$$

$$u(t,x) = e^{\ell'} + e^{n+i\omega x}, \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 3 ;$$

$$\left| D^{h,\infty} u, S_t, \rho \right| \ll c(n-m)^h e^{n+\omega\rho}$$

$$\left| D^{h,\infty} b, S_t, \rho \right| \ll c(n-m)^{h+p} e^{\ell-n+\omega\rho} + c e^{m-\ell+\omega\rho} + c \frac{(n-m)^p}{\omega^q}$$

Preuve.- Définissons a et u par le lemme 2 pour $0 \leq t \leq 2$. Pour $2 \leq t \leq 3$, la fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1) :

$$u = e^{\ell(1-f) + \ell'f} + e^{n+i\omega x}, \quad \text{où } f = f(t-2);$$

$$b = e^{-n-i\omega x} \frac{d^p e^{\ell(1-f) + \ell'f}}{dt^p} \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial x}$$

11. FIN DE LA CONSTRUCTION DE b ET u .- Pour $0 \leq t \leq 3$, définissons b et u par le lemme 3 ; pour $3 \leq t \leq 5$, définissons b et u par le lemme 2, où l'on remplace

$$\begin{array}{ll} 0 \leq t \leq 2 & \text{par } 5 \geq t \geq 3 \\ m < \ell < n & \text{par } m < \ell' < n. \end{array}$$

Il vient :

Lemme 4.- Donnons-nous des nombres

$$(11.1) \quad m < \ell' < \ell < n, \quad \omega \text{ tels que } n-m > 1 \text{ et } \omega > 1.$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leq t \leq 5$$

une équation du type (5.1) admettant une solution u , telle que

$$(11.2) \quad \begin{cases} u(t,x) = e^{\ell} & , b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 0 ; \\ u(t,x) = e^{\ell'} & , b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 5 ; \end{cases}$$

$$(11.3) \quad \begin{cases} |D^{h,\infty} u, S_t, \rho| \ll c(n-m)^h e^{n+\omega\rho} ; \\ |D^{h,\infty} b, S_t, \rho| \ll c(n-m)^{h+p} e^{\ell-n+\omega\rho} + c e^{m-\ell'+\omega\rho} + c \frac{(n-m)^p}{\omega^q}. \end{cases}$$

12. CHOIX DE ϱ' , m , n , ω EN FONCTION DE ϱ . - Soient un paramètre $L > 1/4$ et un nombre fixe $\alpha \geq 1$.

Choisissons, en accord avec (11.1) :

$$m = -8L, \quad \varrho' = -6L, \quad \varrho = -4L, \quad n = -2L, \quad \omega = L^\alpha ;$$

définissons

$$(12.1) \quad \Theta = |\varrho|^{p-\alpha q}$$

Puisque $\sup_L L^c e^{-L} < \infty$, (11.3) donne

$$(12.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |D^{h,\infty} u, S_t, \rho| \ll c \Theta e^{-L+L^\alpha \rho} \\ |D^{h,\infty} b, S_t, \rho| \ll c \Theta [e^{-L+L^\alpha \rho} + 1]. \end{array} \right.$$

Le n° 13 va prouver le lemme suivant :

Lemme 5.- Il existe une série formelle $\Phi(\rho) \in \Gamma^{(\alpha)}$, indépendante de L , telle que

$$e^{-L+L^\alpha \rho} \ll \Phi(\rho), \quad \forall L \geq 0.$$

Donc (12.2) implique (5.3) : le problème non homogène qu'énonce le n°5 est résolu, quand (5.4) a lieu. Or :

$$\varrho'(\varrho) = \frac{3}{2}\varrho \quad ;$$

d'où, en choisissant $\varrho_1 = -\frac{3}{2}$, vu (12.1) :

$$\varrho_k = -\left(\frac{3}{2}\right)^k \quad ; \quad \Theta_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{(\alpha q - p)k} \quad ;$$

d'où (5.4), si, comme le suppose le n°5 :

$$\alpha > \frac{p}{q} \quad .$$

Le problème non homogène (n°5) a donc une solution ; vu le n°7, ce qu'affirme l'introduction est prouvé ; mais b a été choisi non réel.

13. PREUVE DU LEMME 5.- On a

$$(13.1) \quad e^{-L+L^\alpha \rho} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} L^{\alpha s} e^{-L} .$$

Or

$$(13.2) \quad \sup_{L > 0} (L^\beta e^{-L}) = \left(\frac{\beta}{e}\right)^\beta, \quad \text{si } \beta \geq 0 ,$$

car ce sup est atteint pour $L = \beta$.

Rappelons⁽¹⁾ que

$$\left(\frac{s}{e}\right)^s < s!$$

de (13.2) résulte donc

$$\sup_{L > 0} (L^{\alpha s} e^{-L}) = \left(\frac{\alpha s}{e}\right)^{\alpha s} \leq \alpha^{\alpha s} (s!)^{\alpha} .$$

En portant cette inégalité dans (13.1), nous obtenons

$$e^{-L+L^\alpha \rho} \ll \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha^{\alpha} \rho)^s (s!)^{\alpha-1} e^{-L} \Gamma(\alpha) .$$

Voici prouvé le lemme 5.

(1) L'inégalité $1 + x \leq e^x$ donne $\left(\frac{1+k}{k}\right)^k < e$; d'où

$$\prod_{k=1}^s \frac{(1+k)^k}{k^k} < e^s, \quad \text{c'est-à-dire } \frac{(1+s)^s}{s!} < e^s .$$

14. CONCLUSION DU § 2.- Ce qu'affirme l'introduction, à savoir la nécessité de l'hypothèse $\alpha \leq p/q$ dans les théorèmes d'existence et d'unicité concernant l'équation hyperbolique non-stricté, est donc prouvé.

Mais b a été choisi non réel.

§ 3. Choix d'un b réel.

Si q est pair, on peut faire pour u et b un autre choix, réel, pour lequel subsistent les majorations des quasi-normes formelles employées ci-dessus et par suite les conclusions prouvées.

Indiquons rapidement ce choix.

15. MODIFICATIONS A APPORTER AU LEMME 1.- Modification à son énoncé.

$$u(t,x) = e^{\ell} + e^m \sin(\omega x), \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 1.$$

Modification à sa preuve.-

$$u = e^{\ell} + e^m f(t) \sin(\omega x)$$

$$b = e^{m-\ell} \frac{d^p f}{dt^p} \sin(\omega x) \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right]$$

16. MODIFICATION AU LEMME 2.-

$$u(t,x) = e^{\ell} + e^n \sin(\omega x), \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 2.$$

Modification à sa preuve.-

$$u = e^{\ell} + e^{nf+m(1-f)} \sin(\omega x)$$

$$b = e^{-nf-m(1-f)} \frac{d^p e^{nf+m(1-f)}}{dt^p} \frac{1}{(i\omega)^q} \frac{\partial^q}{\partial x^q},$$

en supposant q pair.

17. MODIFICATION AU LEMME 3.

$$u(t,x) = e^{\ell t} + e^n \sin(\omega x), \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 3.$$

Modification à sa preuve.-

$$u = e^{\ell(1-f) + \ell'f} + e^n \sin(\omega x)$$

$$b = e^{-n} \frac{d^p}{dt^p} e^{\ell(1-f) + \ell'f} \left[\frac{1}{\omega} \cos(\omega x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] de GIORGI, Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy, Università di Roma, Rendiconti di Matematica, t.14 (1955) p.382-387.
- [2] J. LERAY et Y. OHYA, Systèmes linéaires, hyperboliques non-stricts, Colloque C.B.M., Louvain (1964).
- [3] G. TALENTI, Sur le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles, C. R. Acad. Sciences, t.259 (1964), p.1932-1933.