Jean Vaillant

Caractéristiques multiples des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1963-1964), p. 46-67
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___2_46_0>

CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS

par

Jean VAILLANT

La recherche des fronts d'onde ou caractéristiques d'un système d'équations aux dérivées partielles et l'étude de la propagation des discontinuités d'une solution discontinue le long de rayons ou bicaractéristiques appartenant au front d'onde sont des problèmes classiques en physique mathématique depuis Hadamard. Ces problèmes ont été résolus de façon générale par Hadamard [1] pour les systèmes "carrés" dans les cas que nous appellerons "simples", c'est-à-dire ceux où la propagation est décrite par une équation différentielle du 1er ordre. Cependant on trouve en physique des cas où, les caractéristiques étant multiples, l'on ne peut appliquer les résultats précédents. C'est ce qui se produit par exemple pour les équations de la théorie unitaire d'Einstein. Schrödinger que nous avons étudiées précédemment. Il reste alors à voir s'il est possible de généraliser les résultats classiques dans ces circonstances plus générales.

D'autre part dans les travaux de mathématiques, on est conduit pour pouvoir utiliser Hadamard à se restreindre aux cas de caractéristiques simples. (cf. la thèse de Zerner). Il paraît donc nécessaire encore de généraliser aux cas de caractéristiques multiples les théorèmes de Hadamard et Beudon concernant la construction de solutions, discontinues en particulier, (analytique par morceaux), au voisinage d'une caractéristique.

Nous avons étudié le problème le plus élémentaire, c'est-à-dire celui des systèmes "carrés" d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. Nous montrons que l'on peut définir les bicaractéristiques, même pour des caractéristiques multiples, et qu'elles jouent un rôle analogue aux bicaractéristiques classiques; la différence la plus notable provient du fait que les équations différentielles de propagation ne sont plus forcément du permier ordre et que leur ordre dépend d'un système de nombres entiers associés à la matrice caractéristique. une fois choisie un des facteurs irréductibles H' de la décomposition de son déterminant H. On peut encore préciser la construction de solutions analytiques au voisinage d'une caractéristique et utiliser les calculs précédents pour mettre le système différentiel initial sous une forme remarquable.

Nous avons été ainsi amené à associer à la matrice caractéristique un système de nombres entiers. On les obtient à partir des facteurs invariants de cette matrice considérée comme matrice sur l'anneau localisé de l'anneau des polynômes à $(n + 1)$ variables par rapport à l'idéal premier défini par H'.

Dans le cas de coefficients constants le problème est essentiellement de nature algébrique. Une grande partie du travail qui suit sera donc rédigé dans ce sens. Nous chercherons les solutions, séries formelles du système correspondant à des données de Cauchy séries formelles sur un hyperplan caractéristique. On peut aussi présenter ce travail sous forme d'étude des discontinuités à la traversée de l'hyperplan caractéristique; on trouvera à ce sujet des indications dans des Notes précédentes [2].

Ce texte diffère quelque peu de l'exposé fait; il a été modifié, compte tenu de suggestions de M. Dieudonné et M. Samuel.

On emploiera la convention de sommation d'Einstein, ainsi si α varie de 0 à n , on aura :

$$\ell^{\alpha} u_{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \ell^{\alpha} u_{\alpha}$$

si A varie de 1 à m :

$$z^A y_A = \sum_{A=1}^{A=m} z^A y_A$$

1. Corangs et multiplicités d'une matrice carrée de polynômes homogènes

a) Soit une matrice carrée d'ordre m , d'éléments P^A_B , sur un anneau commutatif, unitaire, d'intégrité, ayant une infinité d'éléments; son déterminant sera noté H .

Le cofacteur de l'élément P^A_B sera noté $\mathcal{A}^B_A$. De même le cofacteur de l'élément P^C_D dans $\mathcal{A}^B_A$ sera noté $\mathcal{A}^{BD}_{AC}$, D et G ne peuvent prendre respectivement les valeurs B et A . De la définition de H , on déduit que :

$$\mathcal{A}^{BD}_{AC} = - \mathcal{A}^{DB}_{AC} = - \mathcal{A}^{BD}_{CA} = \mathcal{A}^{DB}_{CA}$$

On désignera de même par $\mathcal{A}^{BDF}_{ACE}$ le cofacteur de P^E_F dans $\mathcal{A}^{BD}_{AC}$ et ce cofacteur aura des propriétés d'antisymétrie analogues. Ainsi de suite on aura des cofacteurs d'ordre de plus en plus petits, dont les indices supérieurs (ou inférieurs) seront tous distincts et qui posséderont des propriétés d'antisymétrie analogues. k étant un nombre positif donné inférieur ou égal à m , nous surbarrerons les indices qui varient de 1 à k : $1 \leqslant \bar{A} \leqslant k$ et nous mettrons un chapeau sur ceux qui varient de (k+1) à m : $k < \hat{C} \leqslant m$.

Indiquons enfin une identité qui nous sera très utile : [3]

$$(1) \qquad H.\left(\mathcal{A}^{12\ldots k}_{12\ldots k}\right)^{k-1} = \det\left(\mathcal{A}^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k}\right)$$

Le second membre est le déterminant de la matrice d'ordre k formé par les cofacteurs $\mathcal{A}^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k}$, le cofacteur $\mathcal{A}^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k}$ étant l'élément commun à la $\bar{\mathcal{A}}$ième ligne et à la $\bar{D}$ième colonne.

b) Soit maintenant une matrice carrée d'ordre m , dont les éléments sont des polynômes homogènes de degré t sur R , à $(n+1)$ indéterminées : ℓ_α , $(0 \leqslant \alpha \leqslant n)$. Nous appellerons cette matrice, matrice caractéristique. Chaque polynôme sera noté P^A_B .

Le déterminant H de la matrice P^A_B sera supposé non identiquement nul. H peut être décomposé de façon unique, à un facteur numérique près qu'on choisira une fois pour toutes, en un produit de puissances de polynômes homogènes, distincts, irréductibles sur R ; soit H' l'un d'eux, on a :

$$H = (H')^{\nu} \cdot H'' ,$$

où H'' n'est pas divisible par H' ; ν sera appelé la multiplicité totale du polynôme H' .

Nous allons maintenant nous intéresser à la divisibilité par H' des cofacteurs définis au a) de la matrice P^A_B . Soit $\mathcal{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}$ un cofacteur tel que tous les cofacteurs ayant un nombre plus petit d'indices soient divisibles par H' ou identiquement nuls et tel que lui-même ne soit pas divisible par H' ni identiquement nul, (le choix de $1,2,\ldots k_1$ comme indices de ce cofacteur pourra toujours être fait, en remplaçant convenablement au début la matrice (P^A_B) par une matrice déduite par permutation de lignes et de colonnes, ce que nous supposerons fait). Le nombre k_1, $(0 < k_1 \leq m)$ sera appelé le corang principal de la matrice (P^A_B) pour le polynôme H' ; on dira encore pour abréger le corang principal de H' ; si $k_1 = m$, on posera $\mathcal{A}^{12\ldots m}_{12\ldots m} = 1$

Les cofacteurs $\mathcal{A}^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_1}$, obtenus en bordant la matrice correspondante à $\mathcal{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}$ ne sont pas tous identiquement nuls, en effet, on a d'après (1) :

$$(2) \qquad H' \cdot \left(\mathcal{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}\right)^{k_1-1} = \det\left(\mathcal{A}^{12\ldots(\bar{D}-1)(D+1)\ldots k_1}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_1}\right) .$$

On désignera par X_1 la plus grande puissance de H', telle que $(H')^{X_1}$ divise ces $(k_1)^2$ cofacteurs, $(X_1 \geq 1)$ et X_1 sera appelé la multiplicité associée au corang k_1 ; remarquons que, a priori*, X_1 peut dépendre du choix de la matrice de déterminant $\mathcal{A}^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}$.

On définit alors les polynômes $\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}$ par l'identité :

$$(3) \qquad \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} = (-1)^{(\bar{A}+\bar{D})} \frac{\mathcal{A}^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k_1}_{12\ldots(\bar{A}-1)(\bar{A}+1)\ldots k_1}}{(H')^{X_1}}$$

Ces polynômes ne sont pas tous divisibles par H' ou identiquement nuls. On déduit de (2) et de (3) que :

*) On démontrera, par la suite qu'en fait il n'en est rien.

$$(4) \qquad H\left(\begin{smallmatrix}12\ldots k_1\\ 12\ldots k_1\end{smallmatrix}\right)^{k_1-1} = \mathcal{A}.\,(H')^{k_1 X_1} \quad ,$$

où $\mathcal{A}$ est le déterminant de la nature $(\mathcal{A}\frac{\bar{A}}{\bar{D}})$, qui n'est donc pas identiquement nul.

Considérons maintenant les cofacteurs de la matrice $(\mathcal{A}\frac{\bar{A}}{\bar{D}})$, que l'on désignera par des B . Soit $B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}$ un cofacteur tel que tous les cofacteurs ayant un nombre plus petit d'indices soient divisibles par H' ou identiquement nuls et que lui-même ne soit pas divisible par H' ni identiquement nul. (On supposera encore la matrice (P^A_B) écrite de façon à pouvoir prendre $1,2,\ldots k_2$ comme indices du B choisi). Le nombre k_2 , $(0 \leqslant k_2 < k_1)$ sera appelé le 2° corang de H' ; le cas $k_2 = 0$ correspond au fait que $\mathcal{A}$ ne soit pas divisible par H' ; remarquons encore que, a priori, k_2 peut dépendre du choix de $A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}$.

Si $k_2 \neq 0$, convenons que des indices deux fois surbarrés varient de 1 à k_2 : $1 \leqslant \bar{\bar{A}} \leqslant k_2$. Les cofacteurs $B^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{A}}-1)(\bar{\bar{A}}+1)\ldots k_2}$ obtenus en bordant $B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}$ ne sont pas tous identiquement nuls; en effet on a, comme tout à l'heure :

$$(5) \qquad \mathcal{A}\,.\,(B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2})^{k_2-1} = \text{dét}\,(B^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{A}}-1)(\bar{\bar{A}}+1)\ldots k_2}) \quad ,$$

On désignera par X_2 la plus grande puissance de H' , telle que $(H')^{X_2}$ divise ces $(k_2)^2$ cofacteurs et X_2 sera la multiplicité associée au 2° corang; elle peut, a priori dépendre du choix de $B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}$.

Si $k_2 = 0$, on ne définira pas de multiplicité associée à k_2 . Dans ce cas, on a, d'après (4) :

$$\nu = k_1 X_1 \quad .$$

Revenons au cas $k_2 \neq 0$. On définit alors les polynômes $\mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}}$ par la formule

$$\mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}} = (-1)^{\bar{\bar{A}}+\bar{\bar{D}})} \frac{B^{12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2}_{12\ldots(\bar{\bar{A}}-1)(\bar{\bar{A}}+1)\ldots k_2}}{(H')^{X_2}}$$

Ces polynômes ne sont pas tous divisibles par H' ou identiquement nul. Utilisant (5), on a :

$$(6) \qquad \mathcal{A} \,.\, (B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2})^{k_2-1} = \mathcal{B} \,.\, (H')^{k_2 X_2} \quad ,$$

où $\mathcal{B}$ est le déterminant de la matrice $(\mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}})$; $\mathcal{B}$ n'est donc pas identiquement nul. En reportant dans (4), on a :

$$(7) \qquad H \,.\, (A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1})^{k_1-1} \,.\, (B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2})^{k_2-1} = \mathcal{B} \,.\, (H')^{k_1 X_1 + k_2 X_2}$$

On considère alors de même la matrice $(\mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}})$; on définit de même k_3 . Si $k_3 = 0$, on déduit de (7) que $\nu = k_1 X_1 + k_2 X_2$. Sinon, on définit X_3

Ainsi de suite on définira les corangs successifs et leurs multiplicités X_i jusqu'à ce qu'on rencontre un corang nul; pour ce dernier on ne définira pas de multiplicité; on est sûr que le processus est limité puisque chaque corang est strictement inférieur au précédent.

Nous retiendrons le résultat suivant.

La multiplicité totale de H' est égale à la somme des produits de ses corangs par les multiplicités associées

$$\nu = \sum_{i=1}^{i=I} X_i \, k_i \quad ,$$

I étant le dernier indice i pour lequel k_i ne soit pas nul.

2. Corangs, multiplicités et facteurs invariants.

Désignons par Φ l'anneau de fractions formé des fractions $\frac{Q}{Q'}$, où Q et Q' sont des polynômes à $(n+1)$ indéterminées ℓ_α et où Q' est premier avec H'. Cet anneau est principal et ses seuls idéanx sont de la forme $(H')^X$, (X entier positif ou nul).

La matrice (P_B^A) peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme du Φ module Φ^m. On peut calculer ses facteurs invariants en la remplaçant par des matrices équivalentes obtenues à l'aide des opérations élémentaires décrites, par exemple dans [4] et en utilisant les éléments définis au § 1. On obtient finalement la matrice (π_B^A) équivalente à (P_B^A) et diagonale :

$$(\pi_B^A) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccccc} (H')^{X_1+X_2} & & & & & & & & & \\ & (H')^{X_1+X_2} & & & & & & \bigcirc & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & (H')^{X_1+X_2} & & & & & & \\ & & & & (H')^{X_1} & & & & & \\ & & & & & (H')^{X_1} & & & & \\ & \bigcirc & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & (H')^{X_1} & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} k_2 \text{ lignes} \\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} k_1-k_2 \text{ lignes} \\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-k_1 \text{ lignes} \end{array}$$

On en déduit la proposition ci-dessous.

Les m facteurs invariants sont déterminés de la façon suivante :

$m-k_1$ d'entre eux sont égaux à l'idéal unité de Φ

k_1-k_2 " " " " $(H')^{X_1}$ "

....

k_j-k_{j+1} " " " " $(H')^{X_1+X_2+..X_j}$

....

k_I " " " " $(H')^{X_1+X_2+..X_I}$

Les facteurs invariants étant déterminés de façon unique, on en déduit l'unicité du système des corangs et des multiplicités.

Enfin le résultat de la fin du § 1 exprime simplement que le produit des facteurs invariants détermine la plus haute puissance de H' qui divise H .

3. Hyperplans caractéristiques.

a) Soit E un espace vectoriel sur R à (n+1) dimensions. Le module des tenseurs contravariants symétriques d'ordre t sur E est isomorphe au module des polynômes homogènes de degré t par rapport aux (n+1) indéterminées ℓ_α. Au tenseur de composantes $P^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t}$ dans une base donnée correspond le polynôme :

$$P^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t}\,\ell_{\alpha_1}\,\ell_{\alpha_2}\cdots\ell_{\alpha_t}$$

Nous substituons alors aux indéterminées ℓ_α les composantes ℓ_α d'une forme de l'espace dual E* dans la base duale;

$$P^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t}\ell_{\alpha_1}\ell_{\alpha_2}\cdots\ell_{\alpha_t}$$

est ainsi un scalaire de l'espace E . La matrice caractéristique est donc écrite sous la forme :

$$(P^A_B) = (P_B^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t,A}\,\ell_{\alpha_1}\,\ell_{\alpha_2}\cdots\,\ell_{\alpha_t}) \ .$$

La classification précédente et les nombres ν , k_i , Xi introduits ne dépendent pas du choix de la base de E . En résumé, les expressions précédentes sont invariantes dans les changements de base du groupe linéaire.

b) On désignera par P l'hyperplan d'équation $\ell_\alpha x^\alpha = 0$, (ℓ_α non tous nuls). Si H, par exemple, est une fonction polynôme précédente, on notera $H(P)$ sa valeur pour la forme ℓ_α.

On dira que P est caractéristique s'il satisfait à la condition :

$$H(P) = 0 \ .$$

P étant caractéristique, on dira que P n'est pas singulier s'il satisfait aux conditions suivantes.

I) H étant décomposé en facteurs irréductibles, comme au § 1 b), P annule un des facteurs H' et n'annule aucun autre facteur; en résumé :

$$H = (H')^\nu H'' \ .$$

$$H'(P) = 0 \ , \quad H''(P) \neq 0 \ .$$

II) H' étant maintenant choisi, P n'est pas un plan tangent singulier au cône de sommet l'origine défini tangentiellement par $H' = 0$, c'est-à-dire que le vecteur conjugué de P par rapport au cône (H') n'est pas nul :

$$\vec{\ell} \ \Big| \ \ell^\alpha = \frac{\partial H'}{\partial \ell_\alpha}(P) \quad , \quad \vec{\ell} \neq 0 \ .$$

III) P n'est pas exceptionnel pour la classification du § 1 b). Plus précisément si, on a, par exemple, les corangs k_1 et k_2 associés aux multiplicités X1 et X2, k_3 étant nul, on a :

$$A^{12\ldots k_1}_{12\ldots k_1}(P) \neq 0 \quad , \quad B^{12\ldots k_2}_{12\ldots k_2}(P) \neq 0 \ .$$

P étant un hyperplan caractéristique non singulier, la droite définie par le vecteur $\vec{\ell}$ sera appelée bicaractéristique de P. P est tangent le long de cette bicaractéristique au cône (H') considéré.

4. Système différentiel et solutions séries formelles.

a) Soit F un module à m dimensions sur l'anneau des séries formelles par rapport aux $(n+1)$ indéterminées x^α et à coefficients réels. Nous noterons, dans une base donnée, par y^B les composantes d'un élément de F ; ces y^B sont donc des séries formelles en x^α ; les éléments de la base seront désignés par f_B $(1 \leqslant B \leqslant m)$.

F peut être doué d'une structure d'espace vectoriel sur R ; on désignera par F' l'espace vectoriel sur R engendré par les f_B . Un tenseur fixé symétrique en α élément du produit tensoriel $(E \otimes)^t \otimes F' \otimes F'^*$ a pour composantes les nombres

$$P_B^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t, A}$$

Nous étudierons le système différentiel aux inconnues y^B défini par :

$$(1) \qquad P_B^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t, A} \; \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t} y^B = 0 \quad , \text{ où on a posé } \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

b) Effectuons un changement de coordonnées linéaires tel que P ait pour équation $x^0 = 0$. La série y^B peut s'écrire sous la forme :

$$(2) \quad y^B = Y_0^B + Y_1^B (x^0) + \dots + Y_p^B \frac{(x^0)^p}{p!} + \dots\dots$$

où les Y_p^B sont des séries formelles en $x^1, x^2, \dots x^n$.

On notera désormais par une petite lettre latine un indice qui varie de 1 à n par exemple $1 \leqslant i \leqslant n$.

On appellera données de Cauchy sur P , les mt séries : $Y_0^B , Y_1^B , \dots Y_{t-1}^B$

Nous nous posons le problème de déterminer toutes les solutions y^B correspondant à des données de Cauchy déterminées, essentiellement lorsque le plan P est caractéristique pour la matrice caractéristique et non singulier par le facteur H' choisi.

On verra par la suite qu'il n'y a pas grande restriction à prendre ces données de Cauchy nulles, c'est ce que nous ferons jusqu'à indication contraire.

c) Dans ces conditions, on déduit de (1) et de (2), que les séries Y_r^B correspondant à $r \geqslant t$, satisfont au système :

$$\sum_{q=o}^{q=t} C_t^q \; P_B^{oo..oi_1 i_2..i_q,A} \; \partial_{i_1 i_2..i_q} Y_{t+p-q}^B = 0$$

A l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, on a encore

$$(3) \qquad \sum_{q=o}^{q=p} \frac{1}{q!} \left[\partial^{i_1 i_2..i_q} (P_B^{\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_t,A} \; \ell_{\alpha_1} \; \ell_{\alpha_2} .. \; \ell_{\alpha_t}) \right] (P) \, \partial_{i_1 i_2..i_q} Y_{t+p-q}^B = 0$$

on a posé : $\partial^i = \dfrac{\partial}{\partial \ell_i}$ et où p prend toutes les valeurs entières positives ou nulles.

5. Transformation du système 4.3.

Nous supposons donc P caractéristique satisfaisant à $H'(P) = 0$ et non singulier.

Nous allons indiquer brièvement comment on transforme le système d'équations aux dérivées partielles (4.3). Le résultat remarquable de ce calcul sera que les Y_p^B satisfont en réalité simplement à des équations différentielles le long des bicaractéristiques, dans un sens que l'on précisera.

a) Supposons pour l'instant que H' ait pour corang principal k_1 et multiplicité associée X_1. Les premières équations du système (4.3) s'écrivent :

$$(1) \qquad P_B^{oo..o,A} \, Y_t^B = 0$$

$$(2)\quad P_B^{oo..o,A}\, Y^B_{t+1} + [\partial^i (P_B^{\alpha_1\alpha_2..\alpha_t,A}\, \ell_{\alpha_1}\ell_{\alpha_2}..\ell_{\alpha_t})]\,(P).\ \partial_i Y^B_t = 0$$

On distinguera dans les inconnues du système (5.1) des inconnues principales $Y^{\hat{C}}_t$ et non principales $Y^{\bar{D}}_t$ et on exprimera les premières en fonction des dernières. On remplacera alors dans le système (5.2). On écrira que les déterminants caractéristiques du système (5.2) sont nuls, ce qui pourra donner une condition sur les $Y^{\bar{D}}_t$ non principaux. Ensuite on exprimera les $Y^{\hat{C}}_{t+1}$ principaux en fonction des $Y^{\bar{D}}_{t+1}$ non principaux et des $Y^{\bar{D}}_t$ non principaux.

A l'aide d'un raisonnement par récurrence on pourra étendre ces calculs aux p premières équations du système (4.3).

On trouve finalement que le système formé par les (p+1) premières équations du système (4.3) est équivalent au système formé par :

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{q=o}^{q=\bar{p}'} \frac{1}{(X_1+q)!} \left\{\partial^{i_1 i_2..i_{X_1+q}} \left[\frac{\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}(H')}{\mathcal{A}^{12...k_1}_{12...k_1}}\right]^{X_1}\right\}(P).\ \partial_{i_1 i_2..i_{X_1+q}}\, Y^{\bar{D}}_{t+\bar{p}'-q} = 0 \\[2ex] \qquad\qquad \text{où } 0 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p}\ , \text{ avec } \bar{p} = p - X_1 \end{array}\right.$$

et :

$$(4)^*\left\{\begin{array}{l} Y^{\hat{C}}_{t+p'} = \displaystyle\sum_{s=o}^{s=p'} \frac{1}{s!}\left[\partial^{i_1 i_2..i_s}\left(\frac{\mathcal{A}^{12..(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)..k_1}_{12..............k_1}}{\mathcal{A}^{12..............k_1}_{12..............k_1}}\right)\right](P).\ \partial_{i_1 i_2..i_s}\, Y^{\bar{D}}_{t+p'-s} \\[2ex] \qquad\qquad \text{où } 0 \leqslant p' \leqslant p\ . \end{array}\right.$$

b) Le système (5.3) est très analogue à (4.3). On supposera que H' a pour 2° corang k_1 avec la multiplicité X_2 et on transformera (5.3) de façon analogue à (4.3).

---

*) On somme en $\bar{D}$ dans le second membre pour cette formule et les formules analogues.

On trouve que (5.3) est équivalent au système formé par :

$$(5)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{q=o}^{q=\bar{\bar{p}}'} \frac{1}{(X_1+X_2+q)!}\left\{\partial^{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+X_2+q}}\left[\frac{\mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}}\,(H')^{X_1+X_2}}{\mathcal{A}^{12..k_1}_{12..k_1}\;B^{12..k_2}_{12..k_2}}\right]\right\}(P).\ \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+X_2+q}} Y^{\bar{\bar{D}}}_{t} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \;, \\ \qquad\qquad \text{où } \; 0 \leqslant \bar{\bar{p}}' \leqslant \bar{\bar{p}} \;\; \text{avec} \;\; \bar{\bar{p}} = \bar{p} - X_2 \end{array}\right.$$

et en convenant que : $k_2 < \hat{\bar{C}} \leqslant k_1$:

$$)\left\{\begin{array}{l} \left[\partial^{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1}}(H')^{X_1}\right](P).\ \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1}} Y^{\hat{\bar{C}}}_{t+\bar{p}'} \\ \displaystyle = \sum_{s=o}^{s=\bar{p}'} \frac{X_1}{(X_1+s)!}\left\{\partial^{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1}+s}\left[\frac{B^{12..(\bar{D}-1)\hat{\bar{C}}(\bar{D}+1)..k_2}_{12.............k_2}}{B^{12.............k_2}_{12.............k_2}}(H')^{X_1}\right]\right\}(P).\ \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+s}} Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{p}'-s} \\ \displaystyle - \sum_{s=1}^{s=\bar{p}'} \frac{X_1!}{(X_1+s)!}\left[\partial^{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+s}}(H')^{X_1}\right](P).\ \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+s}} Y^{\hat{\bar{C}}}_{t+\bar{p}'-s} \;, \\ \qquad \text{où } \; 0 \leqslant \bar{p}' \leqslant \bar{p} \;, \text{ la dernière somme étant prise nulle si } \; \bar{p}' = 0 \;. \end{array}\right.$$

On voit que (5.5) se déduit de (5.3) en remplaçant X_1 par $X_1 + X_2$ et

$$\frac{\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}}{\mathcal{A}^{12....k_1}_{12....k_1}} \quad \text{par} \quad \frac{\mathcal{B}^{\bar{\bar{A}}}_{\bar{\bar{D}}}}{\mathcal{A}^{12...k_1}_{12...k_1} \,.\, B^{12...k_2}_{12...k_2}}$$

On appliquera à (5.5) les mêmes calculs qu'à (5.3) et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on rencontre un corang nul.

c) Regardons ce qu'on obtient lorsqu'on arrive à un corang nul. Pour simplifier les notations on supposera que c'est k_3 qui est nul.

Le système (5.5) se résoud pour les inconnues

$$[\partial^{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+X_2}}(H')^{X_1+X_2}]\,(P).\ \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+X_2}} Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+p'}$$

et équivaut à :

$$(7)\left\{\begin{aligned} &\ell^{i_1}\ell^{i_2}\cdot\cdot\,\ell^{i_{X_1+X_2}}\,\partial_{i_1 i_2\cdot\cdot i_{X_1+X_2}} Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{\bar{p}}'}\\ &= -\sum_{s=1}^{s=\bar{\bar{p}}'} \frac{1}{(X_1+X_2+s)!}\,[\partial^{i_1 i_2\cdots i_{X_1+X_2+s}}(H')^{X_1+X_2}]\,(P).\ \partial_{i_1 i_2\cdot\cdot i_{X_1+X_2+s}} Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+\bar{\bar{p}}'-s}\\ &\qquad\text{où } 0 \leqslant \bar{\bar{p}}' < \bar{\bar{p}} \end{aligned}\right.$$

d) En résumé, le système (4.3) est équivalent, quelque soit p, au système formé par :

$$(8)\quad \begin{aligned} &1°)\ \ell^{i_1}\ell^{i_2}\cdots\,\ell^{i_{X_1+X_2}}\,\partial_{i_1 i_2\cdot\cdot i_{X_1+X_2}} Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+q-X_1-X_2}\\ &= \sum_{s=1}^{s=q-X_1-X_2} \frac{1}{(X_1+X_2+s)!}\,\partial^{i_1 i_2\cdot\cdot i_{X_1+X_2+s}}(H')^{X_1+X_2}\,\partial_{i_1 i_2\cdot\cdot i_{X_1+X_2+s}} Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+q-X_1-X_2-s} \end{aligned}$$

$$2°)\ \ell^{i_1}\ell^{i_2}\cdots\,\ell^{i_{X_1}}\,\partial_{i_1 i_2\cdot\cdot i_{X_1}} Y^{\hat{\bar{C}}}_{t+r-X_1}$$

$$(9)\quad = \sum_{s=o}^{s=r-X_1} \frac{1}{(X_1+s)!}\,\partial^{i_1 i_2\cdot\cdot i_{X_1+s}}\left[\frac{B^{12\cdot\cdot(\bar{\bar{D}}-1)\hat{\bar{C}}(\bar{\bar{D}}+1)\cdot\cdot k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}{B^{12\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots k_2}}\,(H')^{X_1}\right]\partial_{i_1 i_2\cdot\cdot i_{X_1+s}} Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+r-X_1-s}$$

$$- \sum_{s=1}^{s=r-X_1} \frac{1}{(X_1+s)!} \partial^{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+s}} (H')^{X_1} \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+s}} Y^{\hat{\bar{C}}}_{t+r-X_1-s}$$

3°)

$$Y^{\hat{C}}_{t+u} = \sum_{s=o}^{s=u} \frac{1}{s!} \partial^{i_1 i_2 \cdot\cdot i_s} \left(\frac{A\begin{smallmatrix} 12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_1 \\ 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1 \end{smallmatrix}}{A\begin{smallmatrix} 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1 \\ 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1 \end{smallmatrix}} \right) \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_s} Y^{\bar{D}}_{t+u-s} , \tag{10}$$

où q , r , u prennent toutes les valeurs : $0 \leq q,r,u \leq p$.

Les résultats ont été indiqués encore pour $k_3 = 0$ de façon à simplifier les notations.

6. Intégration du système (5.8), (5.9), (5.10). Interprétation.

a) Considérons d'abord les équations qui ne comportent comme inconnues que des Y^B_t .

Soit :

$$\left\{ \begin{aligned} & \ell^{i_1} \ell^{i_2} \ldots \ell^{i_{X_1+X_2}} \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1+X_2}} Y^{\bar{\bar{D}}}_t = 0 \\ & \ell^{i_1} \ell^{i_2} \ldots \ell^{i_{X_1}} \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1}} Y^{\hat{\bar{C}}}_t - \frac{B\begin{smallmatrix} 12\ldots(\bar{\bar{D}}-1)\hat{\bar{C}}(\bar{\bar{D}}+1)\ldots k_2 \\ 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2 \end{smallmatrix}}{B\begin{smallmatrix} 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2 \\ 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_2 \end{smallmatrix}} \ell^{i_1} \ell^{i_2} \ldots \ell^{i_{X_1}} \partial_{i_1 i_2 \cdot\cdot i_{X_1}} Y^{\bar{\bar{D}}}_t = 0 \\ & Y^{\hat{C}}_t - \frac{A\begin{smallmatrix} 12\ldots(D-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k_1 \\ 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1 \end{smallmatrix}}{A\begin{smallmatrix} 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1 \\ 12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_1 \end{smallmatrix}} Y^{\bar{D}}_t = 0 \end{aligned} \right.$$

Par un changement de coordonnées linéaires dans E on peut prendre pour équation de la bicaractéristique déjà définie, des équations de la forme :

$$x^o = 0 \quad , \quad x^2 = 0 \quad , \quad x^3 = 0 \quad , \ldots \; x^n = 0 \quad ;$$

x^1 variera seul sur la bicaractéristique.

Le système (6.1) est donc simplement un système d'équations différentielles pour l'indéterminée x^1. Il s'intègre facilement. On obtient pour les Y_t^B des polynômes en x^1 dont les coefficients sont des combinaisons linéaires déterminées de séries formelles arbitraires en $x^2, .. x^n$.

Ces séries formelles arbitraires peuvent s'interpréter comme des données sur l'hyperplan $x^1 = 0$.

On trouve en fait :

$$(2)\quad \begin{cases} Y_t^{\bar{\bar D}} = a^{\bar{\bar D}}_{X_1+X_2-1}(x^1)^{X_1+X_2-1} + \dots\dots + a^{\bar{\bar D}}_{X_1-1}(x^1)^{X_1-1} + \dots\dots + a^{\bar{\bar D}}_o \\[2ex] Y_t^{\hat{\bar C}} = (B^{\hat{\bar C}}_{\bar{\bar D}})[a^{\bar{\bar D}}_{X_1+X_2-1}(x^1)^{X_1+X_2-1} + \dots\dots + a^{\bar{\bar D}}_{X_1}(x^1)^{X_1}] + b^{\hat{\bar C}}_{X_1-1}(x^1)^{X_1-1} + \dots + b^{\hat{\bar C}}_o \\[2ex] Y_t^{\hat E} = [(\mathcal{A}^{\hat E}_{\bar{\bar D}}) + (\mathcal{A}^{\hat E}_{\hat{\bar C}})(B^{\hat{\bar C}}_{\bar{\bar D}})]\,(a^{\bar{\bar D}}_{X_1+X_2-1}(x^1)^{X_1+X_2-s} + \dots\dots + a^{\bar{\bar D}}_{X_1}(x^1)^{X_1}) \\[2ex] \qquad + [(\mathcal{A}^{\hat E}_{\bar{\bar D}})a^{\bar{\bar D}}_{X_1-1} + (\mathcal{A}^{\hat E}_{\hat{\bar C}})\, b^{\hat{\bar C}}_{X_1-1}]\,(x^1)^{X_1-1} + \dots\dots + [(\mathcal{A}^{\hat E}_{\bar{\bar D}})a^{\bar{\bar D}}_o + (\mathcal{A}^{\hat E}_{\hat{\bar C}})\, b^{\hat{\bar C}}_o] \; ; \end{cases}$$

les $(\mathcal{A})$, (B) s'expriment en fonction des coefficients $P_B^{\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_t, A}$ et sont connus ; les a et les b sont des séries formelles arbitraires de $x^2, \dots x^n$.

On peut dire que les a représentent les "valeurs" des $(X_1 + X_2 - 1)$ premières dérivées en x^1 des polynômes en x^1 : $Y_t^{\bar{\bar D}}$ et des $Y_t^{\bar{\bar D}}$ eux-mêmes pour $x^1 = 0$ et que les b représentent les "valeurs" pour $x^1 = 0$ des $X_1 - 1$ premières dérivées en x^1 des polynômes en x^1 : $Y_t^{\hat{\bar C}}$ et des $Y_t^{\hat{\bar C}}$ eux-mêmes.

b) Le système des équations aux Y^B_{t+1} est aussi un système d'équations différentielles en x^1 , dont les premiers membres sont les mêmes que ceux de (6.1) après avoir remplacé Y^B_t par Y^B_{t+1} ; les seconds membres ne sont plus nuls mais sont des combinaisons linéaires différentielles des Y^B_t .

Ce système s'intègre aussi bien. On obtient encore pour les Y^B_{t+1} des polynômes en x^1 dont les coefficients sont des combinaisons linéaires différentielles déterminées de séries formelles arbitraires de $x^2, \dots x^n$.

Ces séries formelles sont les a, b déjà vus et aussi de nouvelles séries formelles arbitraires qu'on peut interpréter comme les "valeurs" pour $x^1 = 0$ des (X_1+X_2-1) premières dérivées en x^1 des polynômes $Y^{\bar{D}}_{t+1}$ et des $Y^{\bar{\bar{D}}}_{t+1}$ et les "valeurs" pour $x^1 = 0$ des (X_1-1) premières dérivées en x^1 des polynômes $Y^{\hat{\bar{C}}}_{t+1}$ et des $Y^{\hat{\bar{\bar{C}}}}_{t+1}$.

On continue ainsi de suite sans circonstances nouvelles.

Finalement pour obtenir tous les Y^B_p il faut et il suffit que l'on connaisse les "valeurs" des (X_1+X_2-1) premières dérivées en x^1 des polynômes $Y^{\bar{D}}_p$ et les "valeurs" pour $x^1 = 0$ des $Y^{\bar{\bar{D}}}_p$ et aussi les "valeurs" pour $x^1 = 0$ des (X_1-1) premières dérivées des $Y^{\hat{\bar{C}}}_p$ et les "valeurs" pour $x^1 = 0$ des $Y^{\hat{\bar{\bar{C}}}}_p$ eux-mêmes.

Autrement dit, il faut et il suffit, les inconnues y^B étant ordonnées cette fois en x^1 , que l'on connaisse les (X_1+X_2) premières séries formelles en $x^o, x^2, \dots x^n$ formant les (X_1+X_2) premiers coefficients du développement en x^1 de $y^{\bar{D}}$ et les X_1 premières séries formelles en x^o , x^2 , x^n formant les X_1 premiers coefficients du développement en x^1 de $y^{\hat{\bar{C}}}$.

7. Systèmes avec seconds membres et données de Cauchy sur P non nulle

Lorsque le système (4.1) admet des seconds membres séries formelles et que les données de Cauchy sur P ne sont plus nulles mais sont des séries formelles de $x^1, \ldots, x^n$, la détermination des Y_p^B se fait aussi bien : on a des équations différentielles qui ont les mêmes premiers membres que précédemment, mais qui possèdent un second membre déterminé en fonction de ces nouvelles données.

On peut donc énoncer le théorème suivant

Soit P un hyperplan non singulier, et R un hyperplan coupant la bicaractéristique de P, d'équation $x^1 = 0$.

Il existe une solution série-formelle du système et une seule correspondant aux données suivantes :

1°) sur P les séries formelles données de Cauchy supposées, cependant, satisfaisant à un système de ν équations aux dérivées partielles exprimant leur compatibilité.

2°) sur R des séries formelles indépendantes de x^1, représentant le début des développements en x^1 de certaines séries inconnues cherchées.*

Ainsi pour $k_3 = 0$, on se donne les (X_1+X_2) premiers coefficients du développement en x^1 de $y^{\bar{\bar{D}}}$ et les X_1 premiers coefficients de développement en x^1 de $y^{\hat{\bar{C}}}$. Il n'y a aucune difficulté autre que de compliquer les notations dans le cas général.

8. Forme canonique.

Les calculs qui ont conduit aux résultats précédents reviennent aussi à remplacer le système (4-1) par un système équivalent déduit par des combinaisons linéaires et des dérivations d'équations.

---

* On suppose évidemment les données compatibles sur l'intersection de P et de R .

Considérons le système plus général

$$(1) \qquad P_B^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t,A}\;\partial_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t}\, y^B = g^A \, ,$$

où les y^B et g^A sont des distributions, les autres conditions étant inchangées. On démontre que le système (8.1) est équivalent, (toujours pour $k_3 = 0$, par exemple), au système formé par :

$$(2.1)\left\{\begin{array}{l}
\partial_{(o)^t}\, y^{\hat{C}} - \dfrac{A^{12..(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)..k_1}_{12..............k_1}}{A^{12..............k_1}_{12..............k_1}}\;\partial_{(o)^t}\, y^{\bar{D}} = Q_B^{i\alpha_1..\alpha_{t-1},\hat{C}}\;\partial_{i\alpha_1..\alpha_{t-1}}\, y^B + g'^{\hat{C}} \\[2em]
\partial_{(1)^{X_1}(o)^t}\, y^{\hat{\bar{C}}} - \dfrac{B^{12..(\bar{D}-1)\hat{\bar{C}}(\bar{D}+1)..k_2}_{12..............k_2}}{B^{12..............k_2}_{12..............k_2}}\;\partial_{(1)^{X_1}(o)^t}\, y^{\bar{D}} \\[1em]
\qquad = Q_B^{\alpha_1\alpha_2..\alpha_{t-1}i_t i_{t+1}..i_{t+X_1},\hat{\bar{C}}}\;\partial_{\alpha_1\alpha_2..\alpha_{t-1}i_t..i_{t+X}}\, y^B + g'^{\hat{\bar{C}}} \\[3em]
\partial_{(1)^{X_1+X_2}(o)^t}\, y^{\bar{\bar{D}}} = Q_B^{\alpha_1\alpha_2..\alpha_{t-1}i_t..i_{t+X_1+X_2},\bar{\bar{D}}}\;\partial_{\alpha_1\alpha_2..\alpha_{t-1}i_t..i_{t+X_1+X_2}}\, y^B + g'^{\bar{\bar{D}}}
\end{array}\right.$$

où les Q sont des coefficients constants et les g' des distributions connues.

On a posé, par exemple : $\partial_{(o)^t} = \partial_{\underbrace{o\dots o}_{t \text{ fois}}}$

(2.2) Un système de ν équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants exprimant la nullité de distributions indépendantes de x^o . (Dans le cas de fonctions ce système exprime des conditions sur les données de Cauchy de P).

En admettant le système (2.2) satisfait, on peut partir de (2.1) pour résoudre les problèmes concernant (1).

9. <u>Solutions analytiques et solutions discontinues</u>.

A l'aide de la forme canonique précédente et de la méthode des fonctions majorantes, on démontre qu'il existe une solution analytique et une seule du système, dans un voisinage de l'intersection de P et de R correspondant à des données analytiques dans P et R dans des conditions analogues à celles du § 7 .

A l'aide de ce résultat on peut construire facilement des solutions du système qui soient de classe C_{t-1} et de classe C_{ω} par morceaux à la traversée de P . Ainsi on peut obtenir pour un système sans second membre une solution qui est nulle pour $x^{o} < 0$ et qui est de la forme $(x^{o})^{t}\, u$ pour $x^{o} > 0$, u étant une fonction analytique non nulle pour $x^{o} = 0$.

10. <u>Systèmes carrés linéaires et à coefficients constants dont les polynômes de dérivation ne sont plus forcément homogènes</u>.

On ramène l'étude de ces systèmes à celle des systèmes précédents où les polynômes de dérivation sont homogènes par une méthode de "montée" : à un système "non homogène pour les dérivations" correspond un système "homogène pour les dérivations" dans un espace ayant une dimension de plus. Des indications plus précises ont été données dans une Note précédente [2] et seront données dans un travail ultérieur.

Bibliographie sommaire

[1] J. Hadamard. - Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, Hermann, Paris, 1903.

Le Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris, 1932.

[2] J. Vaillant. - Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 255, 1962, p. 628 et t. 255, 1962, p. 1560. Gauthier-Villars, Paris.

[3] N. Bourbaki. - Algèbre multilinéaire, Hermann, Paris.

[4] N. Bourbaki. - Algèbre linéaire, Hermann, Paris.