E. Combet

Solutions élémentaires du laplacien généralisé

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1963-1964), p. 25-45
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___2_25_0>

par

E. COMBET

I. DISTRIBUTIONS DE GUELFAND ET CHILOV SUR $\underline{\underline{R}}^m$, pour $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$.

Dans ce § I, les nombres réels x^j $(j = 1,\dots,m)$ sont les coordonnées d'un point quelconque de $\underline{\underline{R}}^m$ où nous considérons les distributions $\mathcal{P}^\lambda$, $(P \pm io)^\lambda$, $\underset{\pm}{\lambda}$ $\delta^{(k)}_{1,2}(P)$ de Guelfand et Chilov ([1], ch. III, § 2) en rappelant exactement leurs définitions et leurs résultats, pour $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$.

1. Distribution $\mathcal{P}^\lambda$:

Soit sur $\underline{\underline{R}}^m$ la forme quadratique à coefficients complexes g_{rs} :

$$\mathcal{P} = g_{rs}\, x^r x^s = P + iP'$$

où P est une forme quadratique réelle quelconque non dégénérée et P' une forme quadratique réelle définie positive. Pour $\lambda \in \underline{\underline{C}}$, posons

$$\mathcal{P}^\lambda = \exp\left[\lambda(\operatorname{Log}|\mathcal{P}| + i \operatorname{Arg}\mathcal{P})\right] \quad \text{où} \quad 0 < \operatorname{Arg}\mathcal{P} < \pi .$$

Pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$, l'intégrale

$$< \mathcal{P}^\lambda, \varphi > = \int_{\underline{\underline{R}}^m} \mathcal{P}^\lambda \varphi\, dx , \text{ où } \varphi \in \mathcal{D}$$

converge et est une fonction analytique des coefficients de $\mathcal{P}$ et de λ. La distribution $\mathcal{P}^\lambda \in \mathcal{D}'$ ainsi définie est donc univoquement déterminée par ses valeurs sur l'ensemble des $\mathcal{P} = i\,P'$ pour lesquelles $P = 0$.

Pour $\mathcal{P} = i\,P' = i\,a_{rs}\, x^r x^s$, il vient :

$$< \mathcal{P}^\lambda, \varphi > = e^{i\pi\frac{\lambda}{2}} \int_{\underline{\underline{R}}^m} (a_{rs}\, x^r x^s)^\lambda \varphi\, dx .$$

On peut trouver un système de coordonnées x'^i où $P = (x'^1)^2 + \dots + (x'^m)^2 = r^2$.

Alors :

$$< \mathcal{P}^{\lambda}, \varphi > = \frac{e^{i\pi\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{a}} \int_{\underline{\underline{R}}^m} r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \frac{e^{i\pi\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{(-i)^m g}} \int_{\underline{\underline{R}}^m} r^{2\lambda} \varphi \, dx' ,$$

où $a = \text{dét}(a_{rs})$ et $g = \text{dét}(g_{rs})$.

Passons aux coordonnées polaires $x'^i = r\,\omega_i$:

$$\int r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \int_0^\infty r^{2\lambda+m-1} \psi(r) dr \quad \text{où} \quad \psi(r) = \int_{S_m} \varphi(r\,\omega_i) d\Omega ,$$

S_m = sphère unité de $\underline{\underline{R}}^m$.

On peut écrire :

$$\int r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \int_0^1 r^{2\lambda+m-1} (\psi(r) - \psi(0) dr + \int_1^\infty r^{2\lambda+m-1} \psi(r) dr + \frac{1}{2} \frac{\psi(0)}{\lambda + \frac{m}{2}}$$

où le second membre est analytique en λ dans le domaine $\text{Re}\,\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$ avec $\lambda \neq -\frac{m}{2}$. On obtient ainsi le prolongement analytique de $\mathcal{P}^{\lambda}$ dans ce domaine $\lambda = -\frac{m}{2}$ étant un pôle simple avec :

$$\underset{\lambda = -\frac{m}{2}}{\text{Résidu}} < \mathcal{P}^{\lambda}, \varphi > = \frac{e^{-i\pi\frac{m}{4}}}{2\sqrt{(-i)^m g}} \psi(0) = \frac{e^{-i\pi\frac{m}{4}}}{2\sqrt{(-i)^m g}} \varphi(0) \int_{\Omega} d\Omega = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} e^{-i\pi\frac{m}{4}}}{\sqrt{(-i)^m g}\,\Gamma(m/2)} \varphi(0) .$$

Finalement :

(1) $$\underset{\lambda = -\frac{m}{2}}{\text{Résidu}} \mathcal{P}^{\lambda} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{i\pi m}{4}}}{\Gamma(m/2)\sqrt{(-i)^m g}} \delta$$ (δ = distribution de Dirac à l'origine).

Pour $\mathcal{P} = P + iP'$, la distribution $\mathcal{P}^{\lambda}$ admet dans le domaine $\text{Re}\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$ le seul pôle (il est simple) $\lambda = -\frac{m}{2}$ où le résidu s'obtient en prolongeant analytiquement (1). Ce prolongement s'effectue de la manière suivante : on passe aux coordonnées $y^r = b^r_s x^s$ où $P = \sum_{i=1}^m \lambda_i (y^i)^2$ et $P' = \sum_{i=1}^m (y^i)^2$.

Alors :

$$(-i)^m g = (-i)^m b^2(\lambda_1 + i)\dots(\lambda_m + i) = b^2(1 - i\lambda_1)\dots(1 - i\lambda_m)$$

et l'on porte alors dans (1) l'expression analytique :

$$\sqrt{(-i)^m g} = |b|(1 - i\lambda_1)^{1/2}\dots(1 - i\lambda_m)^{1/2}$$

où

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{\frac{i \arg z}{2}}, \quad -\pi < \arg z < \pi .$$

Prenons en particulier

$$P = (x^1)^2 + \dots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \dots - (x^m)^2 = \text{forme quadr. hyperbolique de signature } (p+, q-)$$

$$P' = \varepsilon[(x^1)^2 + \dots + (x^m)^2] \quad \text{où} \quad \varepsilon > 0 ,$$

Alors :

$$\sqrt{(-i)^m g} = \underbrace{(\varepsilon - i)^{1/2}\dots(\varepsilon - i)^{1/2}}_{p \text{ termes}} \underbrace{(\varepsilon + i)^{1/2}\dots(\varepsilon + i)^{1/2}}_{q \text{ termes}} .$$

Avec ces expressions de P et P', Guelfand et Chilov posent :

$$(P + io)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}^\lambda .$$

Cette distribution $(P + io)^\lambda$ est régulière pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, sauf au point $\lambda = -\frac{m}{2}$ (pôle simple) et, compte tenu de (1) et de l'expression précédente de $\sqrt{(-i)^m g}$:

$$\text{(2)} \qquad \underset{\lambda = -\frac{m}{2}}{\text{Résidu}} \ (P + io)^\lambda = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} e^{-i\pi\frac{q}{2}}}{\Gamma(m/2)} \delta .$$

En raisonnant de la même façon sur les formes quadrat. à partie imaginaire définie négative, on obtient $(P - io)^\lambda$ et :

$$\text{(2')} \qquad \underset{\lambda = -\frac{m}{2}}{\text{Résidu}} \ (P - io)^\lambda = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} e^{+i\pi\frac{q}{2}}}{\Gamma(m/2)} \delta .$$

2. Distributions $P_{\pm}$ et $\delta^{(k)}_{1,2}(P)$

On suppose toujours que $P = \sum_{i=1}^{p} (x^i)^2 - \sum_{j=p+1}^{m=p+q} (x^j)^2$ est hyperbolique.

Pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$, considérons les distributions

$$< P_+^\lambda, \varphi > = \int_{P>0} P^\lambda \varphi\, dx \qquad \text{et} \qquad < P_-^\lambda, \varphi > = \int_{P<0} (-P)^\lambda \varphi\, dx$$

Soit P ultra hyperbolique (p et $q > 1$) : Passons aux coordonnées bipolaires $x^i = \rho\, \omega_i$ et $x^j = \sigma\, \omega_j$:

$$< P_+^\lambda, \varphi > = \int_{\rho > \sigma} (\rho^2 - \sigma^2)\, \varphi\, (\rho\omega_i, \rho\,\omega_j)\, \rho^{p-1} \sigma^{q-1}\, d\rho\, d\sigma\, d\,\Omega^{(p)} d\,\Omega^{(q)} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\rho (\rho^2 - \sigma^2)\, \psi(\rho, \sigma)\, \rho^{p-1} \sigma^{q-1} d\rho\, d\sigma$$

avec

$$\psi(\rho, \sigma) = \int_{S_p \times S_q} \varphi(\rho\omega_i,\ \omega_j) d\Omega^{(p)} d\,\Omega^{(q)}.$$

Posons ensuite $u = \rho^2$, $v = \sigma^2$, $\psi_1(u,v) = \psi(\rho, \sigma)$ et enfin $v = ut$:

$$< P_+^\lambda, \varphi > = \frac{1}{4} \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} du \int_0^1 (1-t)^\lambda\, t^{\frac{q-2}{2}}\, \psi_1(u, tu) dt\ .$$

Il en résulte que $< P_+^\lambda, \varphi >$ a la première série de pôles $\lambda = -k$ ($k = 1, 2, \ldots$) qui sont ceux de

$$\Phi(\lambda, u) = \frac{1}{4} \int_0^1 (1-t)^\lambda\, t^{\frac{q-2}{2}}\, \psi_1(u, tu) dt$$

avec

$$\underset{\lambda = -k}{\text{résidu}}\ \Phi(\lambda, u) = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} [t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, tu)]_{t=1}$$

d'où, pour $k > \frac{m}{2}$;

$$\underset{\lambda=-k}{\text{résidu}} < P_+^\lambda, \varphi> = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!} \int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} [t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u,tu)]\Big|_{t=1} u^{-k+\frac{m}{2}-1} du =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!} \int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}} [v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u,v)]\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}} du \quad .$$

Ce résidu introduit la distribution $\delta_1^{(k-1)}(P)$ portée par le cône $P = 0$, d'un type primitivement considéré par J. Leray :

$$<\delta_1^{(k)}(P), \varphi> = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k} [v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u,v)]\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}} du \quad .$$

Donc :

$$\underset{\lambda=-k> -\frac{m}{2}}{\text{résidu}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta_1^{(k-1)}(P) \quad .$$

Dans les mêmes conditions, on trouve :

$$\underset{\lambda=-k> -\frac{m}{2}}{\text{résidu}} P_-^\lambda = \frac{1}{(k-1)!} \delta_2^{(k-1)}(P)$$

où

$$<\delta_2^{(k)}(P), \varphi> = \frac{(-1)^k}{4} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial u^k} [u^{\frac{p-2}{2}} \psi_1(u,v)]\Big|_{u=v} v^{\frac{q-2}{2}} dv \quad .$$

De l'expression primitive de $<P_+^\lambda, \varphi>$ il découle que le point $\lambda = -\frac{m}{2}$ est aussi un pôle pour P_+^λ (nous nous bornons toujours à $\mathrm{Re}\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$). On trouvera l'expression de ces résidus dans l'ouvrage cité de Guelfand et Chilov.

Pour $\mathrm{Re}\lambda > 0$,

(3) $$(P \pm io)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda} P_-^\lambda$$

et cette égalité se prolonge pour $\mathrm{Re}\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, $\lambda \neq -\frac{m}{2}$.

Cette relation, jointe à l'expression des résidus de $(P \pm io)^{\lambda}$ et des $P_{\pm}^{\lambda}$ permet d'obtenir les égalités suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = 0 \quad \text{pour} \quad k < \frac{m}{2} - 1 \\ \delta_1^{(\frac{m}{2}-1)}(P) - \delta_2^{(\frac{m}{2}-1)}(P) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p}{2}} \pi^{\frac{m}{2}} \delta \quad \text{pour p et q pairs} \\ (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pi^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{\Gamma'(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} - \frac{\Gamma'(\frac{q}{2})}{\Gamma(\frac{q}{2})}\right] \delta \quad \text{pour p et q impairs.} \end{cases} \end{cases}$$

On peut inversement commencer par définir les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$, $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$ comme au n°2, puis démontrer (4) et enfin obtenir (2) et (2') en posant, par définition :

$$(P \pm io)^{\lambda} = P_{+}^{\lambda} + e^{\pm i\pi\lambda} P_{-}^{\lambda}$$

Ce procédé (voir [2], ch. I), en évitant d'introduire une métrique complexe, permet d'étendre ces distributions à une variété riemannienne V_m.

3. <u>Le cas hyperbolique normal</u> :

Supposons maintenant que $P = (x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^m)^2$ est hyperbolique-normale. On peut étendre tous les résultats précédents, en remplaçant ρ par x^1. De plus, le cône $P = 0$ comporte deux nappes Γ^+ et Γ^- et partage $\underline{\underline{R}}^m$ en 3 régions $\mathcal{E}^+$ (futur de l'origine : $P > 0$ et $x^1 > 0$), $\mathcal{E}^-$ (passé de l'origine : $P > 0$ et $x^1 < 0$) et Ω_- (ailleurs de l'origine : $P < 0$). On peut alors partager les distributions $\delta_1^{(k)}(P)$ et P_+^{λ} en sommes :

$$\delta_1^{(k)}(P) = \delta_1^{(k)+}(P) + \delta_2^{(k)-}(P) \quad \text{et} \quad P_+^{\lambda} = P_+^{\lambda+} + P_+^{\lambda-}$$

où les notations sont évidentes et où l'on procède comme précédemment par régularisation d'intégrales et par prolongement analytique (voir [2], ch.III). On peut montrer par exemple que, dans le domaine $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, les seuls pôles des différences $P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}$ sont les points $\lambda = -k$ et que

$$(5) \qquad \underset{\lambda=-k}{\text{Résidu}} \left(P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\delta_1^{(k-1)}{}_+(P) - \delta_2^{(k-1)}{}_-(P)\right)$$

II. LES DISTRIBUTIONS DE GUELFAND ET CHILOV SUR V_m :

V_m est une variété riemannienne hyperbolique orientée, de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dimension $\geqslant 3$, d'élément de volume η.

Soit x' un point fixé de V_m, Ω un voisinage de x' dont chaque point x puisse être joint à x' par un arc géodésique $\widehat{x'x}$ unique contenu dans Ω. A tout $u_{x'} \in T_{x'}$ (espace tangent en x' à V_m) correspond sur la géodésique $\widehat{x'x}$ tangente en x' à $u_{x'}$ un paramètre géodésique affine unique s tel que $s_{x'} = 0$. Si $T_{x'}$ est rapporté au repère quelconque $R^{x'}$, les m nombres bien déterminés :

$$x^\alpha = s\, u_{x'}^\alpha$$

définissent sur Ω le système de coordonnées normales d'origine x' et relatives à $R^{x'}$.

Dans ces coordonnées normales :

$$g_{\alpha\beta}(x)x^\alpha x^\beta = g_{\alpha\beta}(x')x^\alpha x^\beta .$$

Nous désignerons par $P(x)$ cette fonction et nous utiliserons dans toute la suite un repère $R^{x'}$ orthonormé. Alors :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{p} (x^i)^2 - \sum_{j=p+1}^{m=p+q} (x^j)^2 .$$

Dans ce système de coordonnées :

$$\eta(x) = \sqrt{|g(x)|}\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \quad \text{où} \quad g(x) = \text{dét}(g_{\alpha\beta}(x))$$

donc

$$|g(x')| = +1 \quad .$$

Nous pouvons alors définir les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$ et $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$ comme au § I,2 en posant

$$\psi(\rho, \sigma) = \int_{S_p \times S_q} \varphi(\rho\,\omega_i, \sigma\,\omega_j) \sqrt{|g(\rho\,\omega_i, \sigma\,\omega_j)|}\ d\Omega^{(p)}\ d\Omega^{(q)}$$

et en remplaçant δ par $\delta_{x'}$ (puisque $\sqrt{|g(x')|} = 1$) dans l'expression des résidus. Nous pouvons ensuite démontrer les relations (4) et définir :

$$(P \pm io)^{\lambda} = P_{+} + e^{\pm i\pi\lambda} P_{-}^{\lambda} \quad .$$

Nous obtenons alors les mêmes résultats qu'au § I (pour $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$). Dans le domaine considéré : pour les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$, les pôles $\lambda = 1, -2, \ldots > -\frac{m}{2}$ sont simples et :

(6) $$\underset{\lambda = -k}{\text{résidu}}\ P_{+} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\ \delta_1^{(k-1)}(P) \quad \text{et} \quad \underset{\lambda = -k}{\text{résidu}}\ P_{-}^{\lambda} = \frac{1}{(k-1)!}\ \delta_1^{(k-1)}(P) \quad .$$

Le point $\lambda = -\frac{m}{2}$ est le seul pôle (il est simple) de $(P \pm io)^{\lambda}$ et

(7) $$\underset{\lambda = -\frac{m}{2}}{\text{résidu}}\ (P \pm io)^{\lambda} = \frac{e^{\mp i\pi\frac{q}{2}}\ \pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(m/2)}\ \delta_{x'} \quad .$$

Ces résultats sont valables dans tous les cas hyperboliques. Dans le cas hyperbolique-normal, ils se complètent par les considérations du § I,3 : on a toujours la formule (5) .

III. CALCUL DE LAPLACIENS SUR V_m :

Les hypothèses sur V_m sont les mêmes qu'au § II. ∇ désigne la dérivation covariante (on l'écrit ∂ sur les scalaires). Rappelons que les dérivées successives d'une distribution sont des p-tenseurs distributions dont on trouvera la définition et l'étude dans un article de A. Lichnerowicz [3].

Nous faisons tous les calculs sur Ω en coordonnées normales d'origine x' avec $R^{x'}$ orthonormé et nous posons

$$\Delta = - g^{\alpha\beta}(x)\nabla_\alpha \partial_\beta \quad .$$

1. Calcul de Laplaciens :

Nous avons, en coordonnées normales les formules connues :

$$g_{\alpha\beta}(x)x^\alpha = g_{\alpha\beta}(x')x^\beta$$

$$g^{\alpha\beta}(x)\partial_\beta P(x) = 2x^\alpha \quad ; \quad g^{\alpha\beta}(x)\partial_\beta P(x).\partial_\alpha P(x) = 4\, P$$

$$g^{\alpha\beta}(x)\partial_\alpha P(x)\partial_\beta u(x) = 2\, s\,\partial_s u(x) \quad \text{(où } u(x) \text{ est différentiable}$$

$$\Delta P(x) = -2m - \frac{2s}{\sqrt{|g(x)|}}\partial_s \sqrt{|g(x)|} \quad .$$

Nous en déduisons immédiatement, pour $\mathrm{Re}\lambda > 1$, et l'entier $n \geqslant 0$:

$$\Delta(P \pm io)^{\lambda+n+1} = -(\lambda+n+1)(P \pm io)^{\lambda+n}[-\Delta P + 4\lambda + 4n] \,,$$

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda+n+1}u] = -4(\lambda + \frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda}(\lambda + n + 1)P^n u + (P \pm io)^{\lambda}P^{n+1}\Delta u$$

$$-(P \pm io)^{\lambda}P^n(\lambda + n + 1)\left\{4s\,\partial_s u + u(4n + \frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|})\right\} \,,$$

et, pour une somme du type introduit par Hadamard [4] :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{N} U_n(x)P^n(x) \qquad (N = \text{entier fini positif quelconque}) \,,$$

il vient :

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda+1} U] = -4(\lambda+\tfrac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' -$$

$$- (\lambda+1)(P \pm io)^{\lambda}[4s\,\partial_s U_o + U_o(\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|})] -$$

$$(8) \quad -(P \pm io)^{\lambda} \sum_{n=1}^{N} P^n[(\lambda+n+1)\left\{4s\,\partial_s U_n + U_n(4n + \frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|})\right\} - \Delta U_{n-1}] +$$

$$+ (P \pm io)^{\lambda+N+1}\,\Delta U_N \quad .$$

avec :

$$(9) \qquad U'(x) = \sum_{n=0}^{N} (\lambda+n+1)\, U_n(x)\, P^n(x).$$

2. <u>Paramétrix sur</u> V_m :

Nous pouvons utiliser (8) pour construire sur Ω une paramétrix pour le point x' : nous pouvons déterminer par récurrence des solutions $U_n(x)$ $\mathcal{C}^{\infty}$ des équations

$$4s\,\partial_s U_o + U_o(\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|}) = 0 \quad , \qquad U_o(x') = 1$$

$$(\lambda+n+1)\left\{4s\,\partial_s U_n + U_n(4n + \frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|})\right\} - \Delta U_{n-1} = 0$$

ce qui donne :

$$(10) \quad U_o(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{|g(x)|}} \quad \text{et} \quad U_n(x) = \frac{U_o(x)}{4(\lambda+n+1)s_n} \int_0^s \frac{t^{n-1}\Delta U_{n-1}(\xi)}{U_o(\xi)}\,dt \left\{\begin{array}{l}\text{intégrale}\\ \text{prise le}\\ \text{long de la}\\ \text{géodésique}\end{array}\right.$$

$\widehat{x'x}$.

et le Laplacien :

$$(11) \quad \Delta[(P \pm io)^{\lambda+1} U] = -4(\lambda+\tfrac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' + (P \pm io)^{\lambda+N+1}\Delta U_N$$

avec

$$(12) \qquad U'(x') = \lambda + 1 \ .$$

Compte tenu des expressions (10) et de l'expression (7) du résidu de $(P \pm io)^{\lambda}$ pour $\lambda = -\frac{m}{2}$, les deux membres de (11) restent égaux par prolongement analytique dans le domaine $\mathrm{Re}\,\lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, $\lambda \neq -2, -3, \ldots, -N-1$ pourvu que $N < \frac{m}{2} - 1$. D'après (12), on en déduit que :

$$\Delta[(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} U] = -4(1 - \tfrac{m}{2}) \frac{e^{\mp i\pi\frac{q}{2}} \pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \delta_{x'} + (P \pm io)^{N+1-\frac{m}{2}} \Delta U_N$$

ou encore

$$\Delta\left[\frac{e^{\pm i\pi\frac{q}{2}} \Gamma(\frac{m}{2} - 1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} (P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} U\right] = \delta_{x'} + \frac{e^{\pm i\pi\frac{q}{2}} \Gamma(\frac{m}{2} - 1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} (P \pm io)^{N+1-\frac{m}{2}} \Delta U_N$$

On peut déduire de ces formules une paramétrix due à Mme Choquet-Bruhat [5] .

IV. SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR V_m ANALYTIQUE.

En plus des hypothèses faites aux § II et III, nous supposons que V_m est analytique, à métrique analytique et nous nous proposons de construire, sur un voisinage de x' une solution élémentaire de Δ en ce point, c'est-à-dire une solution $E \in \mathcal{D}'$ de

$$\Delta E = \delta_{x'} \ .$$

La méthode que nous suivons est due à Hadamard [4]. Sauf avis contraire, V_m est supposée de type hyperbolique quelconque.

1. <u>Cas où</u> m <u>est impair</u> :

On prend dans ce cas

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) P^n(x) \quad \text{et} \quad U'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + 1) U_n(x) P^n(x) \ ,$$

où les $U_n(x)$ $(n = 0,1,\ldots)$ sont donnés par (10). Le laplacien (8) s'écrit, pour $\operatorname{Re}\lambda > 1$:

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda+1} U] = -4(\lambda + \tfrac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' \quad .$$

Pour démontrer la convergence des séries U et U' on peut utiliser pratiquement sans modification la méthode de J. Hadamard qui fait intervenir l'analyticité de V_m par l'emploi de la méthode des fonctions majorantes : les séries U et U' sont analytiques en x sur un voisinage suffisamment petit de x' et holomorphes en pour $\lambda \neq -2, -3, -4, \ldots$. Prolongeant analytiquement la relation ci-dessus jusqu'à $\lambda = -\frac{m}{2}$ on obtient :

$$\Delta[(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} U] = 4.\frac{e^{\mp i\pi\frac{q}{2}}\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}-1)}\,\delta_{x'}$$

m étant impair, les distributions $P_{\pm}^{1-\frac{m}{2}}$ sont régulières et :

$$(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} = P_+^{1-\frac{m}{2}} + e^{\pm i\pi(1-\frac{m}{2})} P_-^{1-\frac{m}{2}} \quad .$$

Le laplacien Δ admet donc au point x' , les solutions élémentaires complexes conjuguées :

$$\frac{e^{\pm i\pi\frac{q}{2}}\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\left(P_+^{1-\frac{m}{2}} + e^{\pm i\pi(1-\frac{m}{2})} P_-^{1-\frac{m}{2}}\right) U$$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n P^n \ ; \quad U_0 = |g|^{-1/4} \ ; \quad U_n = \frac{U_0}{4(-\frac{m}{2}+n+1)s^n}\int_0^s \frac{t^{n-1}\Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)}\,dt$$

$(n = 1, 2, \ldots)$

Supposons que V_m soit hyperbolique-normale : $q = m-1$ est pair et la solution élémentaire précédente s'écrit :

$$E = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} (P_+^{1-\frac{m}{2}+} + P_+^{1-\frac{m}{2}-})U .$$

Pour $\operatorname{Re} \lambda > 1$, on peut écrire

$$\Delta[(P_+^{\lambda+1+} - P_+^{\lambda+1-})U] = -4(\lambda+\frac{m}{2})(P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-})U' .$$

En prolongeant jusqu'à $\lambda = -\frac{m}{2}$, le second membre s'annule, d'après (5) puisque m est impair :

$$\Delta[(P_+^{1-\frac{m}{2}+} - P_+^{1-\frac{m}{2}-})U] = 0$$

D'après l'expression précédente de E, on obtient les deux solutions élémentaires

$$E^{\pm} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} P_+^{1-\frac{m}{2}\pm} U$$

2. Cas où m est pair :

Quand m est pair, la méthode précédente ne s'applique plus à cause du terme $U_{\frac{m}{2}-1}$ dont l'expression contient $\lambda + \frac{m}{2}$ au dénominateur.

Suivant Hadamard, posons

$$U = \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-2} U_n P^n \quad \text{et} \quad U' = \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-2} (\lambda+n+1) U_n P^n .$$

Avec les expressions (10) de ces U_n, il vient :

$$\Delta[U(P \pm io)^{\lambda+1}] = -4(\lambda+\frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' + (P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1} \Delta U_{\frac{m}{2}-2} .$$

Il faut alors introduire deux nouvelles séries V et W pour faire disparaître le terme $(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} \Delta U_{\frac{m}{2}-2}$.

a. Soit $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) P^n(x)$. Compte tenu de l'expression de U',

on a d'après (8), pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -\frac{m}{2} + 2$

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}} V] = -(\lambda + \tfrac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1}[4s\partial_s V_0 + V_0(\tfrac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda - 4)] -$$

(13)

$$-(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}}[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1}\left\{(\lambda + \tfrac{m}{2} + n)[4s\partial_s V_n + V_n(4n + 4m + 4\lambda - 4 + \tfrac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|})] - \Delta V_{n-1}\right\}]$$

Pour $\mathrm{Re}\,\mu > -\frac{m}{2}$, introduisons les distributions

$$(P \pm io)^{\mu} \mathrm{Log}(P \pm io) = \frac{\partial}{\partial\mu}(P \pm io)^{\mu}$$

En dérivant (13) par rapport à λ :

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}}\mathrm{Log}(P \pm io)V] = -(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1}[4s\partial_s V_0 + V_0(\tfrac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda - 4)]$$

$$-(\lambda + \tfrac{m}{2})[(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1}\mathrm{Log}(P \pm io)\left\{4s\partial_s V_0 + V_0(\tfrac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda - 4)\right. + 4(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1} V_0]$$

$$-(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}}\mathrm{Log}(P \pm io)[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1}\left\{(\lambda + \tfrac{m}{2} + n)(4s\partial_s V_n + V_n(4n + 4m + 4\lambda - 4 + \tfrac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|})) - \Delta V_{n-1}\right\}$$

$$-(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}}[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1}\left\{4s\partial_s V_n + V_n(4n + 4m + 4\lambda - 4 + \tfrac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}) + 4V_n(\lambda + \tfrac{m}{2} + n)\right\}].$$

Imposons aux V_n d'être solutions analytiques (en x) autour de x' des équations :

$$4s\partial_s V_o + V_o\left(\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda - 4\right) = \Delta U_{\frac{m}{2}-2}$$

$$\left(\lambda + \frac{m}{2} + n\right)\left[4s\partial_s V_n + V_n\left(4n+4m+4\lambda-4 + \frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}\right)\right] - \Delta V_{n-1} = 0$$

On obtient :

$$\Delta\left[(P \pm io)^{\lambda+1}U + (P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}}\operatorname{Log}(P \pm io)V\right] = -4\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)U'(P \pm io)^{\lambda} -$$

(14) $$-\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1}\left[4V_o + \operatorname{Log}(P \pm io)\Delta U_{\frac{m}{2}-2}\right] -$$

$$-(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1}\left\{4s\partial_s V_n + V_n\left(8n + 6m + 8\lambda - 4 + \frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}\right)\right\}\right],$$

tandis que (13) s'écrit

$$\Delta\left[(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}}V\right] = -\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1}\Delta U_{\frac{m}{2}-2}$$

que l'on peut prolonger jusqu'à $\lambda = -\frac{m}{2}$. La distribution $(P \pm io)^{-1}$ étant régulière :

$$\Delta V = 0$$

et, puisque $(P \pm io)^{o} = 1 = P_+^{o} + P_-^{o}$:

(15) $$\Delta(P_+^{o}\, V) = -\Delta(P_-^{o}\, V)$$

b. Dans l'expression (14), on fait disparaître le dernier terme du second membre en introduisant la série

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x)P^n(x) .$$

On peut écrire en effet :

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}+1} W] = -(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}}[(\lambda+\frac{m}{2}+1)(4s\,\partial_s W_o + W_o\{\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda\}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P^n\{(\lambda+1+\frac{m}{2}+n)(4s\,\partial_s W_n + W_n(4n+4m+4\lambda+\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|})) - \Delta W_{n-1}\}]$$

Imposons aux W_n d'être solutions analytiques des équations :

$$(\lambda+\frac{m}{2}+1)(4s\,\partial_s W_o + W_o\{\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\ {}_s \sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda\}) + 4s\,\partial_s V_1 +$$

$$+ V_1\{\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|} + 6m + 8\lambda + 4\} = 0$$

$$(\lambda+1+\frac{m}{2}+n)(4s\,\partial_s W_n + W_n\{4n+4m+4\lambda+\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|}\}) - \Delta W_{n-1} =$$

$$= -4s\,\partial_s V_{n+1} - V_{n+1}(8n+6m+8\lambda+4+\frac{2s}{\sqrt{|g|}}\partial_s \sqrt{|g|}) \ .$$

Nous obtenons :

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda+1} U + (P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}} \mathrm{Log}(P \pm io) V + (P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}+1} W] =$$

$$(16) \qquad = -4(\lambda+\frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' - (\lambda+\frac{m}{2})[(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1} \mathrm{Log}(P \pm io)\,\Delta U_{\frac{m}{2}-2} +$$

$$+ 4(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1} V_o] \ .$$

Les termes V_n et W_n s'expriment par des relations intégrales analogues à celles qui donnent U_n et les séries V et W convergent sur un voisinage suffisamment petit de x'.

Dans le second membre de (16), les distributions $(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1}$ et $(P \pm io)^{\lambda+\frac{m}{2}-1} \mathrm{Log}(P \pm io)$ sont régulières pour $\lambda = -\frac{m}{2}$. En prolongeant analytiquement (16) jusqu'à $\lambda = -\frac{m}{2}$, on obtient les solutions élémentaires complexes conjuguées :

$$E = \frac{e^{\pm i\pi\frac{q}{2}}\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\left[(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} U + \mathrm{Log}(P \pm io)V + PW\right] .$$

c. En vue de séparer les parties réelle et complexe de E, remarquons que, pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$,

$$(P \pm io)^{\mu}\,\mathrm{Log}(P \pm io) = \frac{\partial}{\partial\mu}(P \pm io)^{\mu} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\mu}\left[P_+^{\mu} + e^{\pm i\pi\mu} P_-^{\mu}\right] = P_+^{\mu}\,\mathrm{Log}\,P_+ + e^{\pm i\pi\mu} P_-^{\mu}\,\mathrm{Log}\,P_- \pm i\pi P_-^{\mu} ,$$

donc, pour $\mu = 0$:

$$\mathrm{Log}(P \pm io) = \mathrm{Log}\,P_+ + \mathrm{Log}\,P_- \pm i\pi P_-^{o} .$$

De plus, au voisinage de $\lambda = 1 - \frac{m}{2}$:

$$(P \pm io)^{\lambda} = P_+^{\lambda} + e^{\pm i\pi(1-\frac{m}{2})}\, e^{\pm i\pi(\lambda+\frac{m}{2}-1)}\, P_-^{\lambda} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-2}}{(\frac{m}{2}-2)!}\,\frac{\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P)}{\lambda+\frac{m}{2}-1} + \text{partie rég.}_1 +$$

$$+ e^{\pm i\pi(1-\frac{m}{2})}\left[1 \pm i\pi(\lambda+\frac{m}{2}-1)+\ldots\right]\left[\frac{1}{(\frac{m}{2}-2)!}\,\frac{\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P)}{\lambda+\frac{m}{2}-1} + \text{partie rég}_2\right]$$

d'où l'on déduit :

$$(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} = \pm i\pi\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!}\,\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) + P_+^{1-\frac{m}{2}} + (-1)^{1-\frac{m}{2}} P_-^{1-\frac{m}{2}} ,$$

où $P_{\pm}^{1-\frac{m}{2}}$ sont les parties régulières du développement des $P_{\pm}^{\lambda}$ autour de $\lambda = 1 - \frac{m}{2}$, prises pour $\lambda = 1 - \frac{m}{2}$. Avec ces expressions, on obtient :

$$E = \frac{e^{\pm i\pi\frac{q}{2}}\,\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\Big[\pm i\pi\left\{\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!}\,U\,\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) + VP^{o}_{\pm}\right\} +$$

$$+ U\left\{P_+^{1-\frac{m}{2}} + (-1)^{1-\frac{m}{2}}\,P_-^{1-\frac{m}{2}}\right\} + V\left\{\mathrm{Log}\,P_+\ \mathrm{Log}\,P_-\right\} + WP\Big]$$

ou encore, d'après (15) :

$$E = \frac{e^{\pm i\pi\frac{q}{2}}\,\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\Big[\pm i\pi\,\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!}\,U\,\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) - V\,P^{o}_{+}\Big\} \mp$$

$$+ U\left\{P_+^{1-\frac{m}{2}} +(-1)^{1-\frac{m}{2}}\,P_-^{1-\frac{m}{2}}\right\} + V\left\{\mathrm{Log}\,P_+ + \mathrm{Log}\,P_-\right\} + WP\Big]$$

d. Supposons maintenant que V_m soit hyperbolique-normale : $q = m-1$ est impair et on obtient

$$E = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\,\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}-1}}\left\{\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!}\,U\,\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) - VP^{o}_{+}\right\}$$

Ici aussi, on peut montrer (voir [2], ch.III) que

$$\Delta\Big[\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!}\,U(\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)+}(P) - \delta_1^{(\frac{m}{2}-2)-}(P)) - V(P^{o+}_{+} - P^{o-}_{+})\Big] = 0$$

et l'on obtient les deux solutions élémentaires :

$$E^{\pm} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{2\pi^{\frac{m}{2}-1}} \left[\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!} U \delta_1^{(\frac{m}{2}-2)\pm}(P) - V P_{+}^{o\pm}\right]$$

avec :

$$V_o = \frac{U_o}{4s^{\frac{m}{2}-1}} \int_0^s \frac{t^{\frac{m}{2}-2} \Delta U_{\frac{m}{2}-2}}{U_o} dt \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_o}{4ns^{n+\frac{m}{2}-1}} \int_0^s \frac{t^{n+\frac{m}{2}-2} \Delta V_{n-1}}{U_o} dt.$$

3. Invariance dans les isométries :

Soit L une isométrie de V_m, laissant fixe le point x', L' l'application linéaire tangente, L* la transposée de L'. Pour le tenseur métrique g, on a :

$$(L^*g)(x) = g(x) .$$

Sur les fonctions différentiables f, L agit par

$$(L^*f)(x) = f(Lx)$$

et f est dite invariante par L si

$$L^*f = f$$

Si une distribution T_λ est invariante par L* lorsque décrit un certain domaine Λ de $\underline{\underline{C}}$, c'est-à-dire si $< T_\lambda, L^{*-1}\varphi> = < T_\lambda, \varphi>$ pour $\lambda \in \Lambda$, alors la prolongée analytique de T_λ reste invariante par L* .

Sur les coordonnées normales x^α, l'isométrie L se traduit par la transformation orthogonale

$$x_x^\alpha = a_\beta^\alpha \, x_{Lx}^\beta$$

avec

$$g_{\alpha\beta}(Lx) = a_\alpha^\gamma \, a_\beta^\delta \, g_{\gamma\delta}(x) \ .$$

On en déduit immédiatement que les fonctions P et $U_0 = |g|^{-\frac{1}{4}}$ sont invariantes par L. Il en est de même des distributions $P_{\pm}^{\lambda}$, $(P \pm io)^{\lambda}$ et $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$. Considérons alors l'expression

$$U_n(x) = \frac{U_0(x)}{4(\lambda+n+1)s^n} \int_0^s \frac{t^{n-1} \, \Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)} \, dt \ .$$

Si $\xi(t)$ décrit la géodésique $\widehat{x'x}$, $L\xi(t)$ décrit la géodésique $\widehat{x'Lx}$. Supposons que $U_{n-1}(\xi)$ soit invariante par L, il en est de même de $\Delta U_{n-1}(\xi)$. De plus, sur une géodésique non isotrope, t peut-être considéré comme longueur de l'arc de géodésique $\widehat{x'\xi}$, arc qui est conservé par isométrie. En procédant par continuité pour les géodésiques isotropes, on en déduit que $U_n(x)$ est invariante par L quel que soit x.

Finalement, les solutions élémentaires que nous avons construites sont invariantes par L.

4. Remarques :

La construction précédente s'étend sans difficulté à l'opérateur $D = \Delta + B^\rho \partial_\rho + C$ où B^ρ est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\omega$ et C une fonction analytique : il convient de modifier les séries U, V et W.

Pour un espace harmonique $\mathcal{C}^\omega$ où

$$\Delta P = 2m + Pf(P)$$

on peut trouver des solutions élémentaires de la forme $\psi(P)(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}}$.

Enfin, ce procédé s'étend aux solutions élémentaires des Laplaciens tensoriels et spinoriels (sur V_4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUELFAND et CHILOV. Les distributions, Dunod, Paris 1962.

[2] E. COMBET. Solutions élémentaires des dalembertiens généralisés. Thèse de doctorat, Paris 1963, à paraître.

[3] A. LICHNEROWICZ. Propagateurs et commutateurs en Relativité générale. Publ. de l'Inst. des Hautes Etudes scientifiques n°10, Paris 1961.

[4] J. HADAMARD. Leçons sur le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles, Hermann, Paris 1932 ou Dover, New-York 1952.

[5] Mme CHOQUET-BRUHAT. Solutions élémentaires d'équations du second ordre. Colloque CNRS sur les équations aux dérivées partielles, Nancy 1956.

***