Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Lucien Waelbroeck

Calcul symbolique lié à la croissance de la résolvante

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1963-1964), p. 100-133
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___2_100_0>

CALCUL SYMBOLIQUE LIÉ A LA CROISSANCE DE LA RESOLVANTE

par

Lucien WAELBROECK

Résumé

Nous définissons une algèbre, qu'il peut être utile de considérer dans l'étude d'un opérateur sur un espace de Banach (ou d'un élément d'une algèbre de Banach) lorsque l'on connaît la fonction $\psi(s) = 1 / \| (a-s)^{-1} \|$, ou lorsqu'on a des renseignements suffisants sur l'allure de cette fonction. Cette algèbre peut être décrite, soit comme complétée d'une algèbre de fractions rationnelles (§ 1.2), soit par l'intermédiaire de son dual (§ 2), celui-ci étant un espace de fonctions holomorphes, soit enfin comme quotient d'une algèbre de fonctions par un idéal de cette algèbre (§ 3). Il faut enfin signaler qu'on établit qu'il s'agit d'une algèbre de Banach, fait qui n'est nullement évident d'après la définition du § 1.2.

I. INTRODUCTION

1.1. Soit A une algèbre de Banach complexe à unité, soit $a \in A$. Pour s complexe, $s \notin \operatorname{sp} a$, posons $\psi(s) = 1 / \| (a-s)^{-1} \|$, et pour $s \in \operatorname{sp} a$, posons $\psi(s) = 0$. La fonction ψ est Lipschitzienne de constante 1, et $\psi(s)/|s| \to 1$ si $s \to \infty$.

En effet, si $|t| < \psi(s)$, $|t| \cdot \| (a-s)^{-1} \| < 1$,

$$(a-s-t)^{-1} = (a-s)^{-1} + t\,(a-s)^{-2} + \dots$$

donc

$$\|(a-s-t)^{-1}\| < \frac{\|(a-s)^{-1}\|}{1-|t|.\|(a-s)^{-1}\|}$$

et $\psi(s+t) \geqslant \psi(s) - |t|$. De même, $\psi(s) \geqslant \psi(s+t) - |t|$.

Ceci montre que ψ est une fonction Lipschitzienne. Le comportement de ψ à l'infini s'établit aisément à partir du développement de Laurent de $(a-s)^{-1}$ au voisinage de l'infini

$$(a-s)^{-1} = - s^{-1} - a\, s^{-2} - \dots$$

1.2. Cette observation justifie le problème suivant.

Soit A une algèbre localement convexe complète à unité, $a \in A$. Soit d'autre part $\psi(s)$ une fonction Lipschitzienne non négative, telle que $\epsilon |s| < \psi(s) < M |s|$ au voisinage de l'infini. Quelles sont les propriétés de a qui découlent de l'hypothèse que $a-s$ est inversible dès que $\psi(s) \neq 0$, l'ensemble des produits $\psi(s).(a-s)^{-1}$ étant borné ?

En un certain sens, l'étude de ces propriétés se ramène à celles de l'algèbre universelle U ci-dessous :

Soit U_o l'algèbre des fractions rationnelles en une indéterminée z dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ensemble $\psi(s) \neq 0$. Mettons sur U_o la topologie localement convexe la plus fine telle que la multiplication soit continue, et telle que l'ensemble des fractions rationnelles $\psi(s)\ (z-s)^{-1}$ $(\psi(s) \neq 0)$ soit borné. Cette topologie peut ne pas être séparée. Soit α l'intersection des voisinages de l'origine de U_o . Alors α est un idéal, le quotient U_o/α est une algèbre localement convexe séparée.

Par définition, U est le complété de U_o/α . Nous appellerons encore z l'élément de U correspondant à la fraction rationnelle $z \in U_o$. (Il s'agit d'un abus de langage, notamment lorsque l'idéal α n'est pas nul).

(U, z) est caractérisé à un isomorphisme près par les propriétés suivantes :

a) U est une algèbre localement convexe complète, à unité ; $z \in U$; $z-s$ a un inverse dès que $\psi(s) \neq 0$, l'ensemble des produits $\psi(s)(z-s)^{-1}(\psi(s) \neq 0)$ étant borné.

b) Soit A une algèbre localement convexe complète à unité et à multiplication continue. Soit $a \in A$ un élément tel que $a-s$ ait un inverse dès que $\psi(s) \neq 0$, l'ensemble des produits $\psi(s)\ (a-s)^{-1}$ étant borné. Il existe alors un homomorphisme continu et un seul de U dans A, qui applique unité sur unité et z sur a.

Tout renseignement que l'on pourra obtenir au sujet de U sera utile dans l'étude d'un opérateur continu a sur un espace de Banach, tel que l'on connaisse l'allure de $\| (a-s)^{-1} \|$.

1.3. Nous montrerons que U est une algèbre de Banach (plus exactement, Banachisable). Et nous donnerons deux descriptions essentiellement différentes de U.

Le § 2 sera consacré à la première de ces descriptions. Celle-ci fait intervenir le dual U^* de U, la boule unité du dual, et la topologie faible de cette boule unité. Les renseignements donnés suffiront à caractériser U à un isomorphisme près, en vertu d'un théorème de Grothendieck [1] (cf. aussi [2] p. 27). On observera que le théorème de Grothendieck est utile non seulement pour pouvoir affirmer que la description donnée de U^* suffit pour caractériser U, mais aussi dans la démonstration du fait que U^* est l'espace considéré.

Le théorème de Grothendieck (plus exactement un corollaire de ce théorème dû à Pràk [3]) affirme que le complété d'un espace localement convexe F s'identifie avec l'espace des formes linéaires sur le dual F^* de F dont la restriction aux parties équicontinues de F^* est continue pour la topologie faible.

Nous utiliserons aussi la proposition suivante, qui ne paraît pas découler immédiatement du théorème de Grothendieck. Soit E un espace vectoriel. Soit B une partie convexe symétrique absorbante de E. Soit $\mathfrak{T}$ une topologie compacte sur B, induite par une topologie localement convexe de E. Soit alors F l'espace de Banach des formes linéaires sur E, dont la restriction à B est continue pour $\mathfrak{T}$, avec la norme de la convergence uniforme sur B. Alors E s'identifie avec le dual de F, la boule unité de E avec B, et la topologie faible de la boule unité avec $\mathfrak{T}$.

Cette proposition est établie dans [8]. Une analyse axiomatique plus fouillée de $\mathfrak{T}$ y est donnée, ainsi qu'une démonstration du théorème de Ptàk que nous utiliserons.

1.4. Dans le § 3, nous montrerons que U est isomorphe au quotient d'un algèbre X de fonctions (pour la multiplication usuelle) par un idéal Y de cette algèbre. L'isomorphisme avec U sera obtenu au moyen d'une intégrale, apparentée à l'intégrale de Cauchy, l'intégrale d'une forme sur un contour étant remplacée par celle de sa différentielle sur l'extérieur du contour.

La description de X est suffisamment explicite, bien qu'il ne soit pas toujours commode de dire si oui ou non une fonction appartient à X. La description de Y est moins satisfaisante, Y est la fermeture dans X de l'ensemble des éléments de X dont le support ne rencontre pas le compact $\psi(s) = 0$. Je ne connais aucun critère, me satisfaisant, et permettant d'affirmer qu'un élément de X appartient à Y.

Les raisonnements du paragraphe 2 ne suffisent à construire un homomorphisme de U dans A appliquant unité sur unité, et z sur un élément a dont la résolvante a telle ou telle propriété que si A est une algèbre localement convexe complète, à multiplication continue. Les raisonnements du § 3 par contre peuvent être appliqués si A est une algèbre à bornée complète (cf. [5], [6], ou [7]). Cela nous permettra encore d'appliquer les résultats du § 2 dans ce cas plus général, par exemple dans l'étude d'un élément d'une algèbre complète par suite, à produit séparément continu. Cette remarque peut être intéressante lorsque l'élément étudié est un opérateur sur un espace localement convexe.

1.5. Les § 2 et 3 sont largement indépendants et peuvent être lus séparément. Nous énoncerons les théorèmes principaux au début de chaque paragraphe et indiquerons quelques applications de ces théorèmes.

Pour éviter les répétitions, nous conserverons les notations du § 1.2. De plus, S sera l'ensemble compact $\psi(s) = 0$, et T sera le complément de S dans le corps des complexes.

2. ISOMORPHISME DE U^* AVEC $O(\psi)$.

2.1. Enoncé de quelques résultats. Soit $O(\psi)$ l'espace des fonctions de f , holomorphes sur T , telles que $\psi . f$ soit une fonction bornée, avec la norme

$$n(f) = \sup_{t \in T} \psi(t)|f(t)|$$

Nous identifierons U^* avec $O(\psi)$, la norme de U^* (dual de l'algèbre de Banach U) devenant équivalente à n, la topologie faible de U^* s'identifiant sur la boule unité de $O(\psi)$ avec la topologie de la convergence simple des fonctions.

Il faut observer ici que la convergence simple est une topologie compacte identique à la convergence compacte, sur la boule unité de $O(\psi)$.

Soit $O(\psi \times \ldots \times \psi)$, ou $O(\psi^{(k)})$ l'espace des fonctions holomorphes de k variables complexes, sur T^k, telles que $\psi(t_1)\ldots\psi(t_k)f(t_1,\ldots,t_k)$ soit une fonction bornée, avec la norme

$$n_k(f) = \sup \psi(t_1)\ldots\psi(t_k) \mid f(t_1,\ldots,t_k) \mid$$

La convergence simple est de nouveau une topologie compacte sur la boule unité de $O(\psi^{(k)})$, identique à la convergence compacte.

Nous montrerons que l'espace des formes multilinéaires continues sur U^k s'identifie avec $O(\psi^{(k)})$, que la norme de cet espace de Banach est équivalente à n_k, et que la convergence simple des formes multilinéaires continues s'identifie, sur la boule unité de $O(\psi^{(k)})$, avec la convergence simple des fonctions.

A la multiplication définie dans U correspond une application de U^* dans l'espace des formes bilinéaires continues sur $U \times U$, donc de $O(\psi)$ dans $O(\psi \times \psi)$. Il s'agit de l'application H définie par

$$Hf(t_1,t_2) = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}$$

Les éléments de U définissent des formes linéaires sur U^*, donc sur $O(\psi)$. La forme linéaire associée à l'unité de U applique $f \in O(\psi)$ sur $-f_1$, celle qui est associée à l'élément z applique f sur $-f_2$, si f a le développement en série de Laurent

$$f(z) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \ldots$$

à l'infini. (Les éléments de $O(\psi)$ sont des fonctions holomorphes nulles à l'infini). Enfin, la forme linéaire associée à $(z-s)^{-1}$ applique f sur $f(s)$ (si $s \in T$).

Pour terminer, disons que les propriétés de $U^* = O(\psi)$ données ci-dessus suffisent à caractériser effectivement U avec sa structure d'algèbre.

2.2. Applications.

Pour appliquer ces résultats à un opérateur a sur un espace de Banach (ou à un élément d'une algèbre de Banach) il faut avoir des renseignements au sujet de $\psi(s) = 1 / \| (a-s)^{-1} \|$ et pouvoir décrire l'espace $O(\psi)$. Je ne sais pas dans quelle mesure on connaît la fonction ψ associée à des opérateurs usuels. Il doit souvent être possible de décrire $O(\psi)$ lorsque a est un opérateur de Volterra, ou un élément du radical d'une algèbre de Banach. $O(\psi)$ est un espace de fonctions entières (c'est-à-dire, $f(1/s)$ est une fonction entière nulle à l'origine si $f \in O(\psi)$). Plus généralement, si a est une limite uniforme d'opérateurs de rang fini, $O(\psi)$ est un espace de fonctions méromorphes, ayant des pôles d'ordre donné aux points du spectre de a, et une singularité essentielle à l'origine. Le théorème de Mittag-Leffler permettra peut-être, au moins d'approcher $O(\psi)$ par des espaces de suites.

Dans cet ordre d'idées, il me semble que le plus intéressant serait d'étudier des opérateurs particuliers, la fonction ψ correspondante, et voir quelles propriétés de l'opérateur on peut établir en considérant l'espace $O(\psi)$, plutôt que de postuler que ψ a tel ou tel comportement, sans connaître d'opérateur pour lequel c'est effectivement le cas.

Deux cas particuliers doivent être signalés : Si ψ ne s'annule pas, $O(\psi)$ est nul (un élément de $O(\psi)$ est une fonction entière nulle à l'infini).

l'algèbre U est donc nulle (c'est-à-dire, $\alpha = U_o$, au § 1.2.). Ce fait est, au fonds apparenté au théorème affirmant que le spectre d'un élément d'une algèbre de Banach n'est pas vide.

Si ψ n'a qu'un nombre fini de zéros, chacun d'ordre fini, $O(\psi)$ est un espace de dimension finie, U est une algèbre de dimension finie, z est un élément algébrique de U. Nous retrouvons ainsi les théorèmes liant le polynôme minimal d'un élément d'une algèbre à l'allure de sa résolvante. Si les zéros de ψ sont aux points $t_1,\ldots,t_k$ et d'ordre $r_1,\ldots,r_k$ respectivement (si $\psi(t) >\epsilon\, |t-t_i|^{r_i}$ au voisinage de t_i), $P(z) \equiv (z-t_1)^{r_1} \ldots (z-t_k)^{r_k} = 0$ dans U. En d'autres mots, le polynôme P appartient à l'idéal α, dans la construction du § 1.2.

Et si a est un élément d'une algèbre de Banach, par exemple, tel que $\psi(t) = 1 / \|(a-t)^{-1}\|$ ait des zéros d'ordre $r_1,\ldots,r_k$ en $t_1,\ldots,t_k$, et ne s'annule pas sinon en ces points, alors $P(a) = 0$.

Bien entendu, ces deux cas particuliers peuvent être établis directement, sans considérer $O(\psi)$.

2.3. Immersion.

Pour tout $y \in U^*$, et pour tout $t \in T$, nous poserons

$$y_1(t) = \langle (z-t)^{-1}, y \rangle.$$

Nous montrerons dans cette section que $y_1 \in O(\psi)$, que l'application $y \to y_1$ est injective, applique les parties équicontinues de U^* sur des parties bornées de $O(\psi)$, et que la restriction de cette application à une partie équicontinue est bicontinue, si la partie équicontinue considérée est munie de sa topologie faible, son image étant munie de la topologie simple. Ultérieurement, après une analyse de la structure de $O(\psi)$ nous montrerons que la boule unité de $O(\psi)$ est l'image d'une partie équicontinue de U^*, donc que U^* est en un certain sens isomorphe à $O(\psi)$.

Par hypothèse, l'ensemble des produits $\psi(t)(z-t)^{-1} (t \in T)$ est une partie bornée de U. Si B est une partie équicontinue de U^*, l'ensemble des nombres complexes

$$<\psi(t).(z-t)^{-1}, y> = \psi(t) y_1(t) \quad (t \in T, y \in B)$$

est borné. Ceci montre que $y_1(t) \in O(\psi)$, et que l'application $y \to y_1$ applique une partie équicontinue sur une partie bornée, pour autant qu'il soit établi que y_1 est une fonction holomorphe sur son domaine.

Mais $\psi(t)$ est localement borné inférieurement sur T, $(z-t)^{-1}$ est donc localement borné sur T, puisque $\psi(t)(z-t)^{-1}$ est une fonction bornée. Et l'on sait que $(z-t)^{-1}$ est une fonction holomorphe de T sur tout ouvert où elle est localement bornée. Donc, $(z-t)^{-1}$ est une fonction holomorphe de t à valeurs dans U, et

$$y_1(t) = <(z-t)^{-1}, y>$$

est une fonction holomorphe de t à valeurs complexes.

L'application considérée est injective, y_1 détermine y. En fait, à l'infini, y_1 a le développement

$$y_1(t) = - <1, y> t^{-1} - <z, y> t^{-2} - \dots$$

tandis qu'autour de t_o, y_1 a le développement

$$y_1(t_o + h) = <(z-t_o)^{-1}, y> + <(z-t_o)^{-2}, y> h + \dots$$

Les coefficients du développement de Taylor et de Laurent d'une fonction étant déterminés par la fonction, y_1 détermine les produits scalaires

$$< z^k, y > (k \geqslant 0) \quad \text{et} \quad < (z-t)^{-k}, \quad y > (t \in T, k > 0)$$

Les fractions rationnelles appartenant à U sont combinaisons linéaires des monômes $z^k (k \geqslant 0)$, et $(z-t)^k (t \in T, k < 0)$.

Ces fractions rationnelles sont d'autre part denses dans U, d'où l'on tire le résultat.

Il reste à montrer que l'application $y \to y_1$ applique d'une manière bicontinue une partie équicontinue de U^* sur une partie bornée de $O(\psi)$, lorsque la partie équicontinue est munie de la topologie faible, et la partie bornée de la topologie simple. Cette application est bien entendu continue, de U^* faible dans $O(\psi)$ simple. Les parties équicontinues faiblement fermées de U^* sont faiblement compactes, l'application $y \to y_1$ est biunivoque, et $O(\psi)$ est séparé pour la topologie simple. Cela suffit à établir la propriété énoncée.

2.4. L'espace V.

Soit V l'espace des formes linéaires sur $O(\psi)$ dont la restriction à la boule unité de $O(\psi)$ est continue pour la topologie simple. Mettons sur V la norme

$$\gamma(v) = \sup \left\{ | <v, f> | \mid f \in O(\psi), \quad n(f) \leqslant 1 \right\}$$

Il est évident que V est un espace de Banach, On sait d'autre part (cf. § 1.3. ou [8]) que $O(\psi)$ est le dual de V, que n est la norme duale de γ, et que sur la boule unité de $O(\psi)$, la topologie simple coïncide avec la topologie faible.

Une partie X de V est totale, engendre un sous-espace dense de V si, et uniquement si elle sépare $O(\psi)$. C'est évident en vertu du théorème de Hahn-Banach, et du fait que $O(\psi)$ s'identifie avec V^* .

Pour $t \in T$, soit β_t la forme linéaire sur $O(\psi)$ définie par

$$\beta_t(f) = f(t)$$

Il est évident que $\beta_t \in V$, que $\nu(\beta_t) \leq 1 / \psi(t)$, et que l'ensemble des β_t, $(t \in T)$ sépare $O(\psi)$, est donc total dans V.

Enfin, l'application $t \to \beta_t$ de T dans V est holomorphe. En effet, elle est faiblement holomorphe, et continue puisque la boule unité de $O(\psi)$ est un ensemble équicontinu de fonctions.

2.5. <u>Formes multilinéaires sur V.</u>

Soit Y une forme multilinéaire sur V^k, et posons

$$Y_1(t_1,\dots,t_k) = Y(\beta_{t_1},\dots, \beta_{t_k})$$

Y_1 est une fonction holomorphe sur T^k,

$$\psi(t_1)\dots\psi(t_k) \quad Y_1 \ (t_1,\dots,t_k)$$

est une fonction bornée, c'est-à-dire, $Y_1 \in O(\psi^{(k)})$. L'ensemble des β_t étant total, l'application $Y \to Y_1$ est biunivoque.

Enfin, on constate aisément que l'image d'un ensemble équicontinu de formes multilinéaires est borné pour la norme n_k de $O(\psi^{(k)})$.

L'application $Y \to Y_1$ est d'autre part continue, pour la topologie faible des formes multilinéaires et la topologie simple de $O(\psi^{(k)})$. Sa restriction aux parties équicontinues est donc bicontinue pour ces topologies.

Réciproquement, supposons que $Y_1 \in O(\psi^{(k)})$. Pour $t_2,\dots,t_k$ constants $Y_1(t_1,t_2,\dots,t_k) \in O(\psi)$. Soit $v_1 \in V$. Nous pouvons prendre le produit scalaire de v_1 avec Y_1, considéré comme fonction de t_1 uniquement, soit

$$< v_1, \ Y_1(t_1,\dots,t_k) > = g(t_2,\dots,t_k)$$

Nous définissons ainsi une fonction sur T^{k-1}. Il est évident que

$$\psi(t_2)\dots\psi(t_k) \quad g(t_2,\dots,t_k)$$

est une fonction bornée, ne prend pas de valeur supérieure à $n_k(Y_1).\nu(v_1)$.

Nous voulons encore montrer que g est une fonction holomorphe, donc par exemple que

$$\frac{g(t_2+h,t_3,\dots,t_k) - g(t_2,t_3,\dots,t_k)}{h}$$

tend vers une limite lorsque $h \to 0$. Pour cela, nous considérons les éléments de $O(\psi)$

$$f_h(t_1) = \frac{Y_1(t_1,t_2+h,t_3,\dots,t_k) - Y_1(t_1,t_2,t_3,\dots,t_k)}{h}$$

$(t_2,\dots,t_k)$ constants, h un parmaètre voisin de zéro). L'ensemble de ces éléments est borné dans $O(\psi)$, si $h \to 0$, $f_h(t_1) \to \partial Y_1/\partial t_2$ pour la convergence simple.

Et

$$\frac{g(t_2+h,t_3,\dots,t_k) - g(t_2,\dots,t_k)}{h} = \langle v_1 , f_h \rangle$$

$$\to \langle v_1, \frac{\partial}{\partial t_2} Y_1(t_1,\dots,t_k) \rangle$$

puisque v_1 est simplement continue sur les parties bornées de $O(\psi)$.

Nous pouvons alors considérer g comme un élément de $O(\psi)$, en fonction de t_2, prendre son produit scalaire avec un élément $v_2 \in V$, et ainsi de suite. Nous obtenons finalement un scalaire

$$\langle v_k, \langle v_{k-1}, \langle \dots \langle v_1 , Y_1(t_1,\dots,t_k) \rangle \dots \rangle = Y(v_1,\dots,v_k)$$

Il est clair que Y est une forme multilinéaire sur V^k, dont la norme est au maximum égale à $n_k(Y_1)$. Enfin, l'application $Y_1 \to Y$ inverse l'application $Y \to Y_1$, c'est-à-dire

$$Y(\beta_{t_1},\ldots,\beta_{t_k}) = Y_1(t_1,\ldots,t_k)$$

Nous établissons ainsi l'isoporphisme de l'espace des formes multilinéaires sur V^k avec $O(\psi^{(k)})$, lorsque l'espace des formes multilinéaires est muni de la structure définie par l'ensemble de ses parties équicontinues et la topologie faible de chaque partie équicontinue, $O(\ ^{(k)})$ étant de son côté muni de la structure définie par l'ensemble de ses parties bornées, et la topologie simple de chaque partie bornée.

Nous écrivons encore

$$Y(v_1,\ldots,v_k) = < v_1 \otimes\ldots\otimes v_k, Y_1 >$$

si Y est une forme multilinéaire, et Y_1 l'élément correspondant de $O(\psi^{(k)})$.

2.6. <u>L'application H</u>.

a) Nous voulons construire sur V une structure d'algèbre à unité, et trouver un élément $v \in V$ tel que $v-t$ ait un inverse pour $t \in T$. L'inverse $(v-t)^{-1}$ sera même β_t . A la multiplication correspondra une application du dual de V dans l'espace des formes bilinéaires sur V, donc de $O(\psi)$ dans $O(\psi \times \psi)$.

Et, si H est cette application,

$$Hf(t_1,t_2) = < \beta_{t_1} \otimes \beta_{t_2} , Hf > = < \beta_{t_1} \cdot \beta_{t_2} , f >$$

$$= < \frac{\beta_{t_1} - \beta_{t_2}}{t_1 - t_2} , f > = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}$$

puisque

$$\beta_{t_1} \cdot \beta_{t_2} = (v-t_1)^{-1} \cdot (v-t_2)^{-1} = \frac{(v-t_1)^{-1} - (v-t_2)^{-1}}{t_1 - t_2}$$

$$= \frac{\beta_{t_1} - \beta_{t_2}}{t_1 - t_2}$$

Il est donc raisonnable d'étudier l'application H, définie pour $f \in O(\psi)$ par

$$Hf(t_1, t_2) = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}$$

(avec $Hf(t,t) = f'(t)$ bien entendu).

b) On sait que H applique une fonction holomorphe sur T sur une fonction holomorphe sur $T \times T$, et que cette application est continue lorsque les espaces de fonctions holomorphes sont munis de la topologie de la convergence compacte.

Nous allons montrer que H est une application de norme finie de $O(\psi)$ dans $O(\psi \times \psi)$. Il s'agit de trouver une constante M telle que

$$\psi(t_1)\,\psi(t_2)\,|\,Hf(t_1,t_2)\,| \leqslant M$$

dès que $t_1, t_2 \in T$, que f est holomorphe sur T et telle que

$$\psi(t)\ |f(t)| \leq 1$$

pour tout $t \in T$. Nous supposons que ψ a une constante de Lipschitz L. Les éléments t_1, t_2 de T jouent un rôle symétrique, nous pouvons donc supposer que $\psi(t_1) \geq \psi(t_2)$.

Considérons d'abord le cas où $|t_1-t_2| \geq \psi(t_1)/2L$,

$$\psi(t_1)\ \psi(t_2) \left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} \right| \leq 2L\,\psi(t_2)(|f(t_1)| + |f(t_2)|)$$

$$\leq 2L\ [\psi(t_1)\ |f(t_1)| + \psi(t_2)\,|f(t_2)|\ ]$$

$$\leq 4L$$

Dans le cas contraire, $|t_1-t_2| < \psi(t_1)/2L$. Soit t un point quelconque du segment reliant t_1 à t_2,

$$\psi(t) \geq \psi(t_1) - L|t-t_1| \geq \psi(t_1)/2$$

Le disque de centre t et de rayon $\psi(t)/2L$ est contenu dans T, même, si $|t-\tau| \leq \psi(t)/2L$,

$$\psi(\tau) \geq \psi(t)/2 \geq \psi(t_1)/4$$

Si j_t est le bord de ce disque

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{j_t} \frac{f(\tau)}{(\tau - t)^2}\, d\tau$$

Sur j_t, $|t-\tau| = \psi(t)/2 \geqslant \psi(t_1)/4$, tandis que $|f(\tau)| \leqslant 1/\psi(\tau) \leqslant 4/\psi(t_1)$, d'où il résulte que

$$|f'(t)| \leqslant \frac{16\,L}{\psi(t_1)^2}$$

pour tout t du segment reliant t_1 à t_2. Et donc

$$|Hf(t_1,t_2)| = \left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right| \leqslant \frac{16\,L}{\psi(t_1)^2}$$

et puisque $\psi(t_2) \leqslant \psi(t_1)$,

$$\psi(t_1)\ \psi(t_2)\ |Hf(t_1,\ t_2)| \leqslant 16\,L$$

Nous avons ainsi montré que H est une application linéaire de $O(\psi)$ dans $O(\psi\times\psi)$, qui applique les parties bornées de $O(\psi)$ sur des parties bornées de $O(\psi\times\psi)$, et que la restriction de H à une partie bornée de $O(\psi)$ est continue, lorsque celle-ci, et son image, sont munies de la topologie de la convergence simple.

c) Deux applications de $O(\psi\times\psi)$ dans $O(\psi\times\psi\times\psi)$ sont apparentées à H. Il s'agit de l'application H_1 définie par

$$H_1\,f(s_1,s_2,s_3) = \frac{f(s_1,s_3) - f(s_2,s_3)}{s_1 - s_2}$$

et de l'application H_2 définie par

$$H_2\,f(s_1,s_2,s_3) = \frac{f(s_1,s_2) - f(s_1,s_3)}{s_2 - s_3}$$

Les composées $H_1 \circ H$ et $H_2 \circ H$ sont égales. On vérifie aisément qu'elles appliquent toutes deux $f(s)$ sur

$$\frac{f(s_1)}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)} + \frac{f(s_2)}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)} + \frac{f(s_3)}{(s_3-s_2)(s_3-s_1)}$$

Cette relation nous permettra d'établir l'associativité de la multiplication que nous définirons dans V, la commutativité découlant de la relation

$$Hf(s_1,s_2) = Hf(s_2,s_1)$$

2.7. Structure d'algèbre de V.

a) Soient v_1, v_2 deux éléments de V, et y un élément de $O(\psi)$. Alors $Hy \in O(\psi \times \psi)$, et $< v_1 \otimes v_2, Hy >$ est un scalaire. De plus, l'application $y \to < v_1 \otimes v_2, Hy >$ est continue sur la boule unité de $O(\psi)$ dans une boule de rayon fini de $O(\psi \times \psi)$, et est continue lorsque ces deux ensembles sont munis de la topologie simple. Quant à l'application $Y \to < v_1 \otimes v_2, Y >$, de $O(\psi \times \psi)$ dans les scalaires, elle est continue sur les boules de rayon fini, celles-ci étant également munies de la topologie simple.

Il existe donc un élément de V, que nous appellerons $v_1 . v_2$, tel que

$$< v_1 \otimes v_2, Hy > = < v_1 . v_2 , y >$$

quelque soit y. Une structure multiplicative est ainsi définie sur V. Cette multiplication est continue, plus précisément

$$(v_1 . v_2) \leqslant M \ \nu(v_1) \ \nu(v_2)$$

si M est la norme de l'application H.

b) L'ensemble des éléments β_t étant total, il suffira de montrer que

$$\beta_{t_1} \cdot \beta_{t_2} = \beta_{t_2} \cdot \beta_{t_1}$$

et que

$$(\beta_{t_1} \cdot \beta_{t_2}) \cdot \beta_{t_3} = \beta_{t_1} \cdot (\beta_{t_2} \cdot \beta_{t_3})$$

pour établir la commutativité et l'associativité de la multiplication. Mais

$$< \beta_{t_1} \cdot \beta_{t_2} , y > = < \beta_{t_1} \otimes \beta_{t_2} , Hy >$$

$$= Hy(t_1, t_2) = < \beta_{t_2} \cdot \beta_{t_1} , y >$$

D'autre part

$$< (\beta_{t_1} \cdot \beta_{t_2}) \cdot \beta_{t_3}, y > = H_1 \circ Hy(t_1, t_2, t_3)$$

tandis que

$$< \beta_{t_1} \cdot (\beta_{t_2} \cdot \beta_{t_3}) , y > = H_2 \circ Hy(t_1, t_2, t_3)$$

Nous établissons ainsi l'associativité, et la commutativité de la multiplication définie dans V.

c) Les éléments de $O(\psi)$ sont des fonctions holomorphes, nulles à l'infini. Au voisinage de l'infini, elles ont un développement en série de Laurent

$$y(t) = y_1 t^{-1} + y_2 t^{-2} + \dots$$

Les formes linéaires e, v définies par

$$e(y) = -y_1 \quad , \quad v(y) = -y_2$$

sont simplement continues sur la boule unité de $O(\psi)$.

Elles appartiennent donc à V.

V a e pour unité. Il s'agit de montrer que

$$< e \otimes u, Hy > = < u, y >$$

pour tout $u \in V$. Mais

$$< e \otimes u, Hy > = < u, < e, Hy >> = < u, y(s_2) >> = < u, y >$$

En effet, pour s_2 constant, s_1 voisin de l'infini,

$$Hy(s_1, s_2) = \frac{y(s_1) - y(s_2)}{s_1 - s_2} = - y(s_2).s^{-1} + \dots$$

et

$$< e, Hy > = y(s_2)$$

D'autre part, $(v-se).\beta_s = e$ pour tout $s \in T$. Supposons en effet que

$$y = y_1, s^{-1} + y_2.s^{-2} + \dots$$

Nous devons montrer que

$$< (v-se) \otimes \beta_s \ , \ Hy > \ = \ - y_1$$

Bien entendu

$$< \beta_s, Hy > \ = \ \frac{y(s) - y(t)}{s - t}$$

$$= -y(s).t^{-1} + (y_1 - sy(s)).t^{-2} + \dots$$

Et par conséquent

$$< v-se, < \beta_s, Hy >> \ = \ - y_1$$

comme requis.

d) Nous avons ainsi défini sur V une structure d'algèbre de Banach à unité (à une équivalence de norme près). Nous avons trouvé un élément de V, soit v, tel que $v-s$ ait un inverse pour tout $s \in T$, et $\psi(s) \| (v-s)^{-1} \| \leq 1$

2.8. <u>Isomorphisme de</u> U <u>et</u> V.

Il existe un homomorphisme continu de U dans V, et un seul qui applique unité sur unité, et z sur v. En effet $v-s$ a un inverse pour tout $s \in \mathbb{T}$, $\psi(s)(v-s)^{-1}$ restant borné. Cet homomorphisme applique $(z-s)^{-1}$ sur $(v-s)^{-1} = \beta_s$.

Il lui correspond une application linéaire duale de V^* donc de $O(\psi)$ dans U^*. Cette application linéaire applique une partie bornée de $O(\psi)$ sur une partie équicontinue de U^* . L'image de la boule unité de $O(\psi)$ est notamment une partie équicontinue de U^*.

Nous allons montrer que cette partie équicontinue de U^* est appliquée sur la boule unité de $O(\psi)$, donc en fait que la composée des deux applications considérées est l'application identique de $O(\psi)$ dans $O(\psi)$. Mais soit $f \in O(\psi)$, soit $f_1 \in U^*$ son image,

$$< (z-s)^{-1}, f_1 > = < \beta_s, f > = f(s)$$

La boule unité de $O(\psi)$ est donc bien l'image d'une partie équicontinue de U^*, ceci établit l'isomorphisme de U avec V, et achève la démonstration des résultats annoncés.

3. L'ALGÈBRE X/Y.

3.1. Enoncés

Soit Σ un voisinage compact de S. Soit X l'espace des fonctions $f(s)$, continues à support dans Σ, telles que $\partial_{\bar{s}} f$ soit une fonction sommable, que $\partial_{\bar{s}} f = 0$ presque partout sur S (dans le cas où S a une mesure non nulle), et que

$$\|f\| = \sup_t \int_\Sigma \frac{|\partial_{\bar{s}} f| \, |d\bar{s}.ds|}{|s-t|} + \int_{\Sigma \setminus S} \frac{|\partial_{\bar{s}} f| \, |d\bar{s}\, ds|}{\psi(s)} < \infty$$

La multiplication ordinaire définit sur X une structure d'algèbre de Banach (à une équivalence près).

L'ensemble Y_o des éléments de X dont le support ne rencontre pas S est un idéal. Nous appellerons Y la fermeture de Y_o. Le quotient X/Y est une nouvelle algèbre de Banach.

Les éléments de X qui sont égaux à l'unité sur un voisinage de S appartiennent à une classe d'équivalence, module Y, qui est bien entendu l'unité de X/Y. Les fonctions $f(s) \in X$ telles que $f(s) = s$ sur un voisinage de S appartiennent elles aussi, toutes à la même classe d'équivalence module Y. Nous appellerons p l'élément de X/Y ainsi défini.

Nous montrerons dans ce paragraphe que $(X/Y,p)$ est isomorphe à (U, z), où U est l'algèbre définie au § 1.2. et z l'élément proviligié de cette algèbre qui s'y trouve défini.

3.2. L'algèbre X.

Nous montrons que X est effectivement une algèbre de Banach, donc que X est complet, et non seulement que la multiplication applique $X \times X$ dans X, mais encore que cette application est continue.

Les hypothèses assurent que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{df(s)\, ds}{s - t}$$

pour tout t complexe. Ceci montre que

$$|f(t)| \leqslant \|f\|$$

quelque soit t. Une suite de Cauchy pour la norme que nous considérons converge donc uniformément. Sa limite est une fonction continue. On vérifie alors aisément que la limite appartient à X, et que la suite converge pour la norme vers sa limite, utilisant comme d'habitude le fait que $\partial_{\bar{s}}$ est un opérateur fermé, et la semi-continhité de l'intégrale sur l'espace des fonctions positives.

Enfin, $\partial_{\bar{s}}(f.g) = f.\partial_{\bar{s}} g + \partial_{\bar{s}} f . g$. Reportant cette relation dans la définition de la norme, l'on voit que

$$\|f.g\| \leqslant \|f\| .\sup|g| + \sup|f| . \|g\| \leq 2 \|f\| . \|g\|$$

ce qui établit, à la fois le fait que la multiplication applique $X \times X$ dans X, et la continuité de cette application.

3.3. <u>La résolvante de</u> p.

D'après la définition de X/Y, il est évident que la résolvante de p est définie sur le complément du compact S. Nous allons évaluer cette résolvante, et montrer que $\psi(t)\|(p-t)^{-1}\|$ est borné indépendamment de $t \in T$.

a) Soit $\alpha(t)$ une fonction infiniment dérivable, égale à l'unité sur un voisinage de S, et ayant son support dans Σ. Soit $\beta(t)$ une fonction indéfiniment dérivable, nulle pour $|t| > 2/3$, et égale à l'unité pour $|t| < 1/3$. Soit L la constante de Lipschitz de ψ. Pour tout $\sigma \in T$ (c'est-à-dire, pour tout $\sigma \notin S$), soit

$$\beta_\sigma(t) = \beta\left(L \frac{t-\sigma}{\psi(\sigma)}\right)$$

La fonction β_σ est égale à l'unité si $L|t-\sigma| < \psi(\sigma)/3$. Elle s'annule si $L|t-\sigma| < 2\psi(\sigma)/3$.

Observons, si $\beta_\sigma(t) \neq 0$, que $L|t-\sigma| < 2\psi(\sigma)/3$, et que $\psi(t) \geqslant \psi(\sigma) - L|t-\sigma| \geqslant \psi(\sigma)/3$. En particulier, $\psi(t) \neq 0$.

Nous poserons alors

$$g_\sigma(t) = \alpha(t)\,\frac{1-\beta_\sigma(t)}{t-\sigma}$$

La fonction $g_\sigma(t)$ est égale à $1/(t-\sigma)$ si $\psi(t) < \psi(\sigma)/3$. Elle est donc holomorphe sur un voisinage de S. Son support est contenu dans Σ. Enfin, g_σ est indéfiniment différentiable partout, la singularité de $1/(t-\sigma)$ étant compensée par le facteur $(1-\beta_\sigma)$.

La fonction g_σ appartient donc à X. Et si γ_σ est la classe d'équivalence de g_σ, il est évident que $(p-\sigma).\gamma_\sigma = 1$, donc que γ_σ est l'inverse de $p-\sigma$.

b) Nous voulons montrer que $\psi(t)\ (p-t)^{-1}$ est borné. Il est évident que cette fonction est bornée sur toute partie de son domaine de définition qui ne rencontre pas S.

Soit Σ_1 un voisinage de S, tel que $\alpha(t) = 1$ sur un voisinage d'ordre ϵ de Σ_1, donc tel que $\alpha(t) = 1$ si $|(t-s)| < \epsilon$ pour un $s \in \Sigma_1$.

Nous montrerons que $\psi(\sigma)\ \| g_\sigma \|$ est borné indépendamment de $\sigma \in \Sigma_1$.

$$\| g_\sigma \| = \sup_t \int \frac{|\partial_{\bar{s}} g_\sigma|\ |d\bar{s}\ ds|}{|s-t|} + \frac{|\partial_s g_\sigma|\ |d\bar{s}\ ds|}{\psi(s)}$$

tandis que

$$|\partial_{\bar{s}} g_\sigma| = |\partial_{\bar{s}} \alpha(s).\ \frac{1-\beta_\sigma(s)}{\sigma - s} - \alpha(s)\ \frac{\partial_{\bar{s}}\ \beta_\sigma(s)}{\sigma - s}|$$

$$\leqslant \left| \frac{\partial_{\bar{s}}\ \alpha(s)}{\sigma - s} \right| + \frac{\partial_{\bar{s}}\ \beta_\sigma(s)}{\sigma - s}$$

Nous porterons ces évaluations dans la définition de g_σ.

Le premier terme est borné indépendamment de $\sigma \in \Sigma_1$, et de s complexe. En effet, $\partial_{\bar{s}} \alpha$ est une fonction bornée, et $1/|\sigma - s| < 1/\epsilon$ si $\partial_{\bar{s}} \alpha \neq 0$, et $\sigma \in \Sigma_1$, puisque $\alpha = 1$ sur le voisinage d'ordre ϵ de Σ_1. Nous savons d'autre part que $\int_\Sigma |d\bar{s}\, ds| / |s-t| < 2\pi R$, si R est le diamètre de Σ. D'autre part $1/\psi(s)$ est borné sur l'ensemble $\partial_{\bar{s}} \alpha \neq 0$. Il existe donc une constante M telle que

$$\sup_t \int \left| \frac{\partial_{\bar{s}} \alpha(s)}{\sigma - s} \right| \frac{|d\bar{s}\, ds|}{|s-t|} + \int \frac{|\partial_{\bar{s}} \alpha(s)|}{\psi(s)} \cdot \frac{|d\bar{s}\, ds|}{|s-t|} < M$$

Il reste à considérer $\partial_{\bar{s}} \beta_\sigma / (\sigma - s)$. On sait que $\partial_{\bar{s}} \beta_\sigma = 0$ sauf pour $2\psi(\sigma)/3L \geqslant |\sigma - s| \geqslant \psi(\sigma)/3L$, et que, sur ce domaine, $\psi(s) \geqslant \psi(\sigma)/3$. Par conséquent,

$$\frac{|\partial_{\bar{s}} \beta_\sigma|}{|\sigma - s|} \frac{|d\bar{s}\, ds|}{|s-t|} \leqslant \frac{3L}{\psi(\sigma)} \cdot I$$

et

$$\int \frac{|\partial_s \beta_\sigma|}{\psi(s)} \frac{|d\bar{s}\, ds|}{|s-t|} \leqslant \frac{3}{\psi(\sigma)} I$$

où

$$I = \int \frac{|\partial_{\bar{s}} \beta_\sigma|\, |d\bar{s}\, ds|}{|s-t|}$$

Le changement de variable linéaire

$$s' = \frac{s - \sigma}{L\,\psi(\sigma)} \quad , \quad s = \sigma + L\,\psi(\sigma)\; s'$$

montre que

$$I = \int \frac{|\partial_{\bar{s}} \beta|\,|d\bar{s}\, ds|}{|s - t'|}$$

où

$$t' = \frac{t - \sigma}{L\,\psi(\sigma)}$$

I est donc borné indépendamment de t, et $\psi(\sigma)\|g_\sigma\|$ est borné sur Σ_1.

c) Ce que nous venons d'établir assure en fait l'existence d'un homomorphisme continu, unique, de U dans X/Y, qui applique unité sur unité, et z sur p.

3.4. <u>Le calcul symbolique</u>.

Nous devons encore construire un homomorphisme de X/Y dans U, afin de montrer que les algèbres U et X/Y sont isomorphes.

Plus généralement, nous considérons une algèbre "à bornés complète", une "b-algèbre" (cf. [5], [6], ou [7]). Soit A cette algèbre, et soit a un élément de A. Nous supposons que $a-s$ a un inverse pour tout $s \in T$, et que $\psi(s)(a-s)^{-1}$ est une fonction bornée sur T, à valeurs dans A. On sait que ces hypothèses assurent que $(a-s)^{-1}$ est une fonction holomorphe sur T à valeurs dans A.

Nous allons construire un homomorphisme borné de X/Y dans A, qui applique unité sur unité, et p sur a.

a) Soit $f \in X$. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma \setminus S} (a-s)^{-1} \, df \, ds = f[a]$$

converge puisque $df\, ds/\psi(s)$ est une forme sommable, et que $\psi(s)(a-s)^{-1}$ est une fonction continue bornée sur T.

Le noyau de l'application $f \to f[a]$ contient Y_0. En effet, si f s'annule sur un voisinage de S, $(a-s)^{-1} \, df \, ds = d[(a-s)^{-1} f \, ds]$ est la différentielle d'une forme à support compact, définie sur tout le plan complexe. L'intégrale définissant $f[a]$ est donc nulle.

Cette application applique la boule unité de X sur une partie bornée de A. Son noyau est fermé, contient donc Y. Une application de X/Y dans A est donc définie.

b) Supposons que $f(s) = 1$ sur un voisinage de S. Soit j un chemin rectifiable de $\Sigma \setminus S$, qui soit le bord d'un voisinage de S sur lequel $f(s) = 1$. Alors

$$f[a] = \frac{1}{2\pi i} \int_j (s-a)^{-1} \, ds = 1$$

en vertu de la formule de Stokes.

On montre de même que $f[a] = a$ si $f(s) = s$ sur un voisinage de S. L'application de X/Y dans A que nous considérons applique donc unité sur unité, et p sur a.

c) Il faut encore montrer que cette application est un homomorphisme.

$$fg[a] = \frac{1}{2\pi i} \int (a-s)^{-1} \, d(fg) \, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int (a-s)^{-1} f \, dg \, ds + \frac{1}{2\pi i} \int (a-t)^{-1} \, df \, g \, dt$$

Nous savons d'autre part que

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int (s-t)^{-1} \, df(t) \, dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int (t-s)^{-1} \, dg(s) \, ds$$

et par conséquent

$$fg[a] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{(a-s)^{-1} - (a-t)^{-1}}{s - t} \, df(t)dt \, dg(s)ds$$

$$= f[a] \; g[a]$$

puisque

$$\frac{(a-s)^{-1} - (a-t)^{-1}}{s - t} = (a-s)^{-1} \; (a-t)^{-1}$$

3.5. <u>Isomorphisme de</u> X/Y <u>et</u> U.

Nous avons construit un homomorphisme continu : $\xi : U \to X/Y$ qui applique unité sur unité et z sur p, au § 3.3. Au § 3.4. nous avons construit un homomorphisme $\eta : X/Y \to U$ qui applique p sur z et unité sur unité.

La composée $\eta_o \xi$ est un endomorphisme continu de U, qui conserve l'unité et z. Il n'existe qu'un tel endomorphisme, celui-ci est par conséquent l'endomorphisme identique.

La composée $\xi_o \eta$ est un endomorphisme de X/Y qui conserve l'unité et p. Nous devons montrer qu'il s'agit de nouveau de l'endomorphisme identique.

Soit $f(t)$ un élément de X. L'application η applique sa classe d'équivalence sur

$$f[p] = \frac{1}{2\pi i} \int (p-s)^{-1} \, df \, ds$$

L'application ξ applique $(p-s)^{-1}$ sur l'élément de X/Y contenant g_s. Comme g_s dépend continument de s dans l'espace normé X, et que $\psi(s) \| g_s \|$ est borné sur un voisinage de S, l'intégrale

$$\int g_s(t) \, df \, ds$$

représente un élément de X, qui relève $\xi(f)[p])$ puisque g_s relève $\xi(p-s)^{-1}$.

Nous pouvons supposer le support de f contenu dans un voisinage arbitrairement petit de S. Et si ce support est suffisamment petit, les ensembles $\alpha(t) \neq 1$, $\beta_s(t) \neq 0$ sont disjoints pour tout t de ce support. Dans ces conditions

$$g_s(t) = \alpha(t) \frac{1 - \beta_s(t)}{s - t} = \frac{1}{s - t} - \frac{\beta_s(t)}{s - t} - \frac{1 - \alpha(t)}{s - t}$$

et $\xi(f[p])$ est une classe d'équivalence qui contient

$$\int \frac{df\, ds}{s - t} - \int (1 - \alpha(t)) \frac{df\, ds}{s - t} - \int \beta_s(t) \frac{df\, ds}{s - t}$$

$$= f(t) - g_1 - g_2$$

Nous devons montrer que $g_1+g_2 \in Y$. Il est évident que $g_1 \in Y_0$. Considérons alors une fonction continue u, prenant des valeurs comprises entre 0 et 1, égale à l'unité hors d'un voisinage de S, mais s'annulant identiquement sur un voisinage plus petit. Dans ces conditions, la fonction

$$\int u(s) \quad \beta_s(t) \quad \frac{df\, ds}{s - t}$$

appartient à Y_0, et est aussi voisine de g_2 qu'on le souhaite.

Il en résulte que g_2 appartient à Y, et par conséquent g_1+g_2 également. Les applications ξ et η sont inverses l'une de l'autre.

3.6. Algèbres de fonctions différentiables.

H.G. Tilmann [4] a construit un calcul symbolique appliquable à un opérateur a, dont le spectre S est réel, et tel que $\|(a-s)^{-1}\|$ ne croisse pas plus vite que $d(s, S)^{-r+1}$, $d(s, S)$ étant la distance de s à S. Il définit $f[a]$ si f est une fonction d'une variable réelle, $r+1$ fois différentiable sur S au sens de Whitney. ([9]; [10]).

Pour Tilmann, ce résultat est un corollaire d'un travail sur les distributions frontières de fonctions holomorphes vérifiant diverses conditions de croissance. Nous verrons que la théorie développée dans ce paragraphe permet de retrouver, et de généraliser ce théorème de Tilmann. Nous supposerons que ψ a les propriétés données au § 1.2. et que $\psi(s) \geq \epsilon\, d(s, S)^{r-1}$ sur un voisinage de l'ensemble $S : \psi(s) = 0$.

Soit u une fonction d'une variable réelle, qui est $r+1$ fois différentiable au sens de Whitney. Nous interpréterons u comme une fonction $r+1$ fois différentiable au sens de Whitney, d'une variable complexe, en remplaçant le développement limité

$$\Sigma_p\, a_{p.s}(x-s)^p \qquad (x \text{ réel})$$

par le développement complexe ayant les mêmes coefficients

$$\Sigma_p\, a_{p.s}(z-s)^p \qquad (z \text{ complexe}) \qquad (*)$$

Nous trouvons alors une fonction $v(z) = v(x+iy)$, définie pour tout z complexe, qui est $r+1$ fois continument différentiable en (x,y), et a le développement Taylorien $(*)$ en chaque point $s \in S$, en appliquant les théorèmes établis par Whitney. La fonction v est déterminée par u modulo l'idéal des fonctions qui s'annulent sur S avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $r+1$. Nous pouvons bien entendu supposer que v a son support dans Σ.

Soit Ξ l'espace de Banach des fonctions $r+1$ fois différentiables de (x,y), à support dans Σ, et dont le développement Taylorien en s est un polynôme de $(x+iy)$ pour tout $s \in S$. Soit $\boxminus$ l'ensemble des éléments de Ξ qui s'annulent avec toutes leurs dérivées sur S. Nous allons montrer que $E \subsetneq X$, que $X \subsetneq Y$, et que l'application identique est une application continue de dans X.

L'application identique induira donc une application continue de Ξ/H dans X/Y. C'est à cette application continue que le calcul symbolique de Tilmann correspond.

En fait, si $f \in \Xi$, $\partial_{\bar{s}} f$ s'annule sur S avec ses dérivées jusqu'à l'ordre r, donc

$$|\partial_{\bar{s}} f| \leqslant k\, d(s, S)^r$$

pour s voisin de S. Ceci montre que l'intégrale qui définit la norme de f dans X converge, donc que $f \in X$. De même, $\|f\|$ peut être majoré par une constante lorsque f reste borné dans Ξ. L'application identique est donc une application continue de Ξ dans X.

Reste à voir que $H \subsetneq Y$. Bien entendu, $Y \cap \Xi$ est une partie fermée de X. D'autre part, $H \cap Y_o \subsetneq Y$. Mais $H \cap Y_o$ est dense dans H, une fonction r+1 fois différentiable qui s'annule sur S avec ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à r+1 est une limite de fonctions nulles au voisinage de S pour la convergence uniforme de la fonction et de ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à r+1.

Le résultat obtenu est plus général que celui de Tilmann, parce que nous ne devons pas supposer que le spectre de a est réel. Le quotient Ξ/H s'identifie avec l'espace des fonctions r+1 fois différentiables sur S, dont le développement Taylorien est un polynôme de la variable complexe en chaque point $s \in S$.

Si S est contenu dans une courbe $r+1$ fois différentiable, Ξ/H s'identifie avec un espace de fonctions $r+1$ fois différentiables d'une variable réelle. Si S est l'adhérence d'un domaine, Ξ/H s'identifie avec l'espace des fonctions $r+1$ fois différentiables sur S, holomorphes sur l'intérieur de S.

De nombreux cas intermédiaires peuvent être envisagés. Si S est par exemple une courbe $r+1$ fois différentiable par morceaux, les éléments de Ξ/H sont des fonctions $r+1$ fois différentiables sur les morceaux de S, qui vérifient aux extrémités des morceaux des relations que l'on écrit aisément.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. GROTHENDIECK. Sur la complétion d'un espace vectoriel localement convexe. C.R. Acad. Sci. Paris, 230, 1950, pp. 605-606

[2] G. KÖTHE. Topologische Lineare Raüme. Springer, 1960.

[3] V. PTÀK. On complete topological space. Čehorl. Mat. $\bar{Z}$ 4, (79), 1954, pp. 301-364.

[4] H.G. TILLMANN. Distributionen als Randverteilungen Analytischen Fundtionen . M.Z., 76, 1961, pp. 5-21.

[5] L. WAELBROECK. Etude Spectrale des Algèbres Complètes. Acad. Royale de Belgique. Mémoire Cl. des Sc. Bruxelles 1960.

[6] . — Les espaces à bornés complets. Colloque sur l'analyse fonctionnelle. C.B.R.M. Louvain, 1960, pp. 51-55.

[7] — Etude Spectrale des b-algèbres. Seconde réunion des Mathématiciens, d'Expression Latine. Florence. Bologne, 1961, pp. 89-103.

[8] — Le complété d'un espace localement convexe selon Grothendieck. Bull. Soc. Math. de Belgique. A Paraître.

[9] H. WHITNEY. On analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets. Trans. Ann. Mat. Soc. 36, 1934.

[10] — On ideals of differentiable functions. Ann. Journal of Math. 70, 1948, pp. 635-658.