Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Leray

Flexion de la bande homogène isotrope à bords libres et du rectangle à deux bords parallèles appuyés

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1963-1964), p. 78-97
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___1_78_0>

FLEXION DE LA BANDE HOMOGÈNE ISOTROPE A BORDS LIBRES ET DU RECTANGLE A DEUX BORDS PARALLÈLES APPUYÉS

par

Jean LERAY

Introduction

La théorie de Saint-Venant de la flexion de la poutre a longtemps suffi aux besoins techniques. Aujourd'hui la construction de ponts-plaques en béton précontraint exige qu'on calcule la flexion du parallélogramme ayant deux bords parallèles libres, deux autres appuyés et des lignes d'appuis intermédiaires. Or on ne sait pas faire ce calcul de façon à la fois rigoureuse et explicite.

La théorie de Saint-Venant est simple parce que la longueur d'une poutre non pesante ne joue aucun rôle : supprimer ses deux bouts, au-delà des appuis et charges extrêmes, ne change rien. Aussi postule-t-on en résistance des matériaux ceci :

PRINCIPE DE SAINT-VENANT.- La flexion de LA BANDE élastique non pesante à bords libres et sur appuis quelconques diffère peu de celle de LA PLAQUE qui s'obtient en supprimant ses deux bouts, au-delà des appuis et charges extrêmes.

L'intérêt de ce principe est de réduire le calcul de la flexion d'une plaque, ayant deux bords libres parallèles, à celui de la bande ; or la bande homogène et isotrope ne dépend d'aucun paramètre ; sa flexion est donnée par des formules explicites ; elles s'obtiennent par la méthode des réflexions biharmoniques ; les conclusions du précédent article [6] et les chapitres II et III du présent article les énoncent. Ces formules permettent à l'Ingénieur de calculer, avec une aisance et une approximation suffisantes, toutes les réactions d'appui et tensions que créeront dans un pont-plaque tous les systèmes de charges qu'il aura à porter.

Justifier ce principe par des considérations théoriques est possible : le problème étudié équivaut à un problème de calcul des variations, où les deux bouts de la bande jouent des rôles négligeables (voir n°3).

Vérifier ce principe par la concordance de résultats numériques est possible, car de nombreux cas particuliers furent résolus par d'autres méthodes :

la tension de plaques en plexiglass fléchies a été mesurée expérimentalement par photoélasticité ;

la méthode des différences finies a été appliquée à divers cas particuliers ;

celle de l'approximation polynomiale également, par G. Fichera [3], M. Picone [8] et F. Conforto [1] ;

les plaques rectangulaires, ayant deux bords libres parallèles et deux bords appuyés, ont été calculées par E. Estanave [2], au moyen de séries de Fourier ;

elles peuvent l'être aussi, plus commodément, par les formules que donne le chapitre IV du présent article.

Cette vérification numérique du principe de Saint-Venant et l'application de ces formules au calcul des ponts-plaques ont été faites sur machine IBM 7.094 par M. Jean-Claude LERAY [7] à ma demande et à celle du Service spécial des Autoroutes.

Chapitre I

PROBLÈME DE LA FLEXION DE LA BANDE ÉLASTIQUE SANS APPUI

Ce chapitre rappelle les divers aspects de ce problème.

Historique.- Le problème de la flexion de la plaque mince fut abordé par Poisson ; ses conclusions furent corrigées par Kirchhoff [5], dont Rayleigh [9] confirma les vues. K. Friedrichs [4] a parachevé cette théorie en prouvant, par les méthodes directes du calcul des variations, que ce problème possède une solution unique ; il étudie une plaque de forme quelconque, mais de diamètre fini.

1. LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE.- Soit une bande, homogène, isotrope, de coefficient de Poisson ν . Notons $z = x + iy$ l'affixe d'un de ses points, son équation étant

$$|x| < a \;;$$

ses deux bouts sont donc

$$z = i\infty \quad \text{et} \quad z = -i\infty \;.$$

Elle supporte une charge, qui lui est orthogonale et dont la densité est une fonction $F(z)$ continûment dérivable ; la partie chargée de la bande est compacte et intérieure à la bande ; cette charge provoque une déformation de la bande, $w(z)$, qui lui est orthogonale.

Ce sont les principes variationnels et la mécanique qui permirent à Kirchhoff de mettre correctement ce problème en équations.

2. LE PROBLÈME DE CALCUL DES VARIATIONS.- L'énergie de la bande fléchie est (à un facteur constant près) :

$$(2.1)\quad E(w) = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{+\infty} [\tfrac{1}{2}(\Delta w)^2 - (1-\nu)(w_{x^2}\, w_{y^2} - w_{xy}^2)]\, dx\, dy\ ;$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ ;\ w_{x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\ ;$$

[...] est une forme quadratique définie >0 de $(w_{x^2}, w_{xy}, w_{y^2})$, car $|\nu|<1$.

D'après les principes variationnels de la mécanique, $w(z)$ doit minimiser.

$$(2.2)\qquad E(w) - \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, w(z)\, dx\, dy\quad .$$

3. JUSTIFICATION SOMMAIRE DU PRINCIPE DE SAINT-VENANT.- Il est évident que dans (2.1) [...], c'est-à-dire $(w_{x^2}, w_{xy}, w_{y^2})$ tendra rapidement vers 0 aux deux bouts de la bande : nous le vérifierons. Transformons la bande en une plaque, par suppression de ses deux bouts, sans altérer la partie chargée ; ce qui précède subsiste, $\iint$ étant étendue à la plaque : $(w_{x^2}, w_{xy}, w_{y^2})$ est petit sur ce qui subsiste des deux bouts. Le problème de calcul des variations à résoudre est donc très peu modifié ; cela justifie le principe de Saint-Venant.

4. LE CALCUL DE LA VARIATION DE E permettra de déterminer w. On a

$$(4.1)\qquad E(u+v) = E(u) + E(v) + 2E(u,v)\quad ,$$

$E(u,v)$ ayant l'expression suivante, quand on choisit pour D la bande $|x|<a$:

$$(4.2)\quad E(u,v) = \frac{1}{2}\iint_D [\Delta u.\Delta v - (1-\nu)(u_{x^2}\, v_{y^2} + u_{y^2}\, v_{x^2} - 2u_{xy}\, v_{xy})]\, dx\, dy\ .$$

Un emploi classique de la formule de Green (Rayleigh, t.1, chap.10 ; Friedrichs, p.225, note 30) exprime $E(u,v)$ par des intégrales portant sur u et sur sa dérivée normale extérieure $\frac{du}{dn}$:

$$(4.3) \quad 2E(u,v) = \iint_D u.\,\Delta^2 v \, dx\, dy$$

$$- \int_{\partial D} u\left\{\frac{d(\Delta v)}{dn}\, ds + (1-\nu)\, d[(v_{x^2} - v_{y^2})x'y' - v_{xy}(x'^2 - y'^2)]\right\}$$

$$+ \int_{\partial D} \frac{du}{dn}.[\Delta v - (1-\nu)(v_{x^2}\, x'^2 + 2v_{xy}\, x'y' + v_{y^2}\, y'^2)]\, ds \;;$$

D est le bord de D, orienté dans le sens positif ; s est son abscisse curviligne ; x' et y' sont les cosinus directeurs de sa tangente; la seconde intégrale est prise au sens de Stieltjès.

On suppose que u a des dérivées secondes sommables et v des dérivées quatrièmes continues.

5. LE PROBLÈME AUX LIMITES suivant est suggéré par la formule (4.3) quand on l'applique à la bande $|x| < a$:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \Delta^2 w = F(z) \quad \text{pour} \quad |x| < a \;; \\ w_{x^2} + \nu\, w_{y^2} = w_{x^3} + (2-\nu) w_{xy^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a \;; \\ w \text{ et ses dérivées d'ordres } \leqslant 4 \text{ sont continues ; ses dérivées} \\ \text{d'ordres 2, 3 et 4 tendent rapidement vers 0 à l'infini.} \end{cases}$$

Sa solution $w(z)$ est une fonction réelle, qui n'est évidemment définie qu'à l'addition près d'une fonction linéaire de (x,y).

Soit $u(z)$ une fonction définie sur cette bande $|x| < a$, à dérivées secondes de carrés sommables sur cette bande ; d'après un théorème classique de Sobolev, $u(z)$ est uniformément continue ; donc

$$|u(z)| < \text{const.} + \text{const.}\, |y| .$$

Quand u et w vérifient ces hypothèses, alors (4.3), où l'on prend pour D un rectangle tendant vers la bande, donne :

$$2\, E(u,w) = \int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, u(z)\, dx\, dy . \tag{5.2}$$

Portons ce résultat dans (4.1), en rappelant que, puisque $|\nu| < 1$:

$$E(u) \geqslant 0 \quad (= 0 \text{ si } u \text{ est linéaire} ; > 0 \text{ sinon}) ;$$

il vient

$$E(u+w) - \int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)[u(z) + w(z)]\, dx\, dy \geqslant E(w) - \int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) w(z)\, dx\, dy$$

$$(= \text{si } u \text{ est linéaire} ; > 0 \text{ sinon}).$$

Donc : <u>La solution</u> w <u>du problème</u> (5.1), <u>si elle existe, réalise le minimum de l'intégrale</u> (2.2) <u>et est la seule fonction qui réalise ce minimum ; cette solution</u> w <u>de</u> (5.1) <u>est donc unique.</u> Rappelons qu'elle n'est définie qu'à l'addition près d'une fonction linéaire.

<u>Note</u> 5.1.- Nous avons vu que cette solution w vérifie (5.2), où nous pouvons choisir u linéaire ; alors l'expression (4.3) de E donne : $E(u,w) = 0$; d'où

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, u(z)\, dx\, dy = 0 , \quad \text{quel que soit } u \text{ linéaire}$$

Autrement dit : <u>Le problème</u> (5.1) <u>n'est possible que si</u>

$$(5.3)\qquad \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} x\,F(z)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-o}^{\infty} y\,F(z)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dx\,dy = 0\ ,$$

<u>c'est-à-dire : si le système des charges données est équivalent à</u> 0 .

<u>Note</u> 5.2.- L'énergie de la bande fléchie par la charge de densité F est $E(w) \geqslant 0$, c'est-à-dire, vu (5.2)

$$(5.4)\qquad E(w) = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,w(z)\,dx\,dy \geqslant 0 \quad (> 0 \ \text{ si } \ F \neq 0)\ .$$

Chapitre II

CALCUL DE LA FLEXION DE LA BANDE ÉLASTIQUE SANS APPUI

Ce chapitre résout explicitement le problème de la flexion de la bande élastique sans appui, dont le chap. I vient de rappeler l'énoncé ; il le fait au moyen de la fonction de Green, que l'article précédent [6] (n°28) a défini et calculé explicitement par la méthode des réflexions biharmoniques.

6. LA FONCTION DE GREEN DE LA BANDE ÉLASTIQUE a été définie comme suit par cet article :

Définition.- $G(z,z')$ est la fonction des deux points z et z' de la bande $|x| \leqslant a$ qui vérifie les conditions suivantes :

(6.1) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 G(z,z') = \delta(z-z') \qquad (\delta \text{ : mesure de Dirac}) ;$$

(6.2) $$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 G}{dx\, dy^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a ;$$

G a des dérivées continues de tous ordres pour $|x| \leqslant a$, $|x'| \leqslant a$, $z \neq z'$; il existe un polynome en (z,z'), $\tilde{G}(z,z')$ tel que $G(z,z') - \tilde{G}(z,z')$ [resp. $G+\tilde{G}$] tende rapidement[1] vers 0 quand $y-y'$ tend vers ∞ [resp. $-\infty$] .

Note 6.- La condition (6.1) peut s'énoncer :

(6.3) $$G(z,z') - \frac{1}{8\pi}|z-z'|^2 \log|z-z'| \text{ est fonction biharmonique de } (x,y) .$$

Rappelons (n° 28 de [6]) les théorèmes suivants :

---

1) plus rapidement que $|y-y'|^{-k}$, quel que soit k .

THÉORÈME DE SYMÉTRIE.- $G(z,z')$ *et* $\tilde{G}(z,z')$ *sont respectivement symétriques et anti-symétriques* :

$$(6.4) \qquad G(z,z') = G(z',z) \ , \quad \tilde{G}(z,z') = - \tilde{G}(z',z) \ .$$

THÉORÈME SUR LE DEGRÉ DE $\tilde{G}(z,z')$.- $\tilde{G}(z,z')$ est un polynome en $(x, x', y-y')$ *de degré* 3.

THÉORÈME D'UNICITÉ.- *Considérons les fonctions* $F(z)$ *vérifiant les conditions suivantes* :

ce sont des fonctions de (x,y) *définies et biharmoniques pour* $|x| \leqslant a$; *elles vérifient les conditions aux bords* (6.2) ;

leurs dérivées d'ordres $\leqslant 6$ *sont continues et à croissance lente* .

Ces fonctions sont les combinaisons linéaires, à coefficients constants, des six polynomes :

$$(6.5) \qquad \begin{aligned} &\pi_1(x,y) = 1 \ , \ \pi_2 = x \ , \ \pi_3 = y \ , \ \pi_4 = xy \\ &\pi_5 = \nu x^2 - y^2 \ , \ \pi_6 = \nu x^2 y - \frac{y^3}{3} \ . \end{aligned}$$

Il est évident que $\tilde{G}$ est biharmonique et vérifie les conditions aux bords (6.2) ; d'après les théorèmes précédents, on a donc :

$$(6.6) \quad \tilde{G}(z,z') = \sum_{j,k} c_{jk}[\pi_i(x,y)\pi_k(x',y') - \pi_j(x',y')\pi_k(x,y)]$$

$$\text{où} \quad j < k \ , \quad c_{jk} = \text{const.} \ , \ c_{jk} = 0 \quad \text{si} \quad 4 \leqslant j < k \ ;$$

on le déduit d'ailleurs aisément de l'expression explicite de $\tilde{G}$ (n°28 de [6]).

7. FLEXION DE LA BANDE SANS APPUI.- Nous pouvons maintenant résoudre explicitement le problème 5.1, quand la donnée $F(z)$ vérifie la condition nécessaire (5.3) ; elle implique, vu le degré de $\tilde{G}$, que

$$(7.1) \qquad \tilde{w}(z) = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(z,z')\, F(z')\, dx'\, dy' \quad \text{est fonction linéaire de } (x,y) \;;$$

donc, vu les propriétés (6.1),(6.2) et (6.3) de G , la solution du problème 5.1 est

$$(7.2) \qquad w(z) = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} G(z,z')\, F(z')\, dx'\, dy'$$

à l'addition près d'une fonction linéaire de (x,y). Autrement dit, nous avons :

LA FORMULE DE FLEXION SANS APPUI : <u>la déformation de la bande élastique sans appui soumise à la charge de densité</u> F <u>est donnée par</u> (7.2), <u>à un déplacement près</u>.

Cette formule (7.2) vaut si la partie chargée de la bande est compacte ; elle s'étend de suite à d'autres cas, par exemple à des charges ponctuelles.

<u>Note</u> 7.1.- $w(z) - \tilde{w}(z)$ [resp. $w + \tilde{w}$] tend rapidement vers 0 quand $y-y'$ tend vers ∞ [resp. $-\infty$] .

<u>Note</u> 7.2.- Vu (5.4), l'énergie de la bande ainsi chargée est

$$(7.3) \qquad \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, G(z,z')\, F(z')\, dx\, dy\, dx'\, dy' \geqslant 0$$

$$(> 0 \quad \text{si} \quad F \neq 0) \;;$$

rappelons que cette inégalité (7.3) suppose que F vérifie (5.3).

Chapitre III

CALCUL DE LA FLEXION DE LA BANDE ÉLASTIQUE SUR UN NOMBRE FINI D'APPUIS SIMPLES INDÉFORMABLES

Ce calcul est celui auquel le principe de Saint-Venant ramène le calcul d'un pont-plaque.

8. LE CALCUL DES RÉACTIONS D'APPUIS.- Continuons à noter $F(z)$ la densité des charges et $w(z)$ la déformation de la bande ; soient z_k les affixes des appuis, qui ne doivent pas être alignés, w_k leurs cotes et R_k leurs réactions. La formule de flexion (7.2) de la bande sans appui donne :

$$(8.1) \quad w(z) = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} G(z,z')\, F(z')\, dx'\, dy' - \sum_k G(z,z_k)R_k - Ux - Vy - W \quad ;$$

les réactions d'appui R_k et les trois inconnues numériques U, V, W s'obtiennent en écrivant ceci :

1°) $w(z_k) = w_k$ en chaque appui ;

2°) les réactions d'appui et les charges constituent un système équivalent à 0.

Il vient :

CALCUL DES RÉACTIONS D'APPUI : <u>ces réactions</u> R_k <u>et les trois inconnues numériques</u> U, V, W <u>sont données par le système linéaire, où les</u> z_j <u>et</u> z_k <u>sont les affixes des appuis</u> ;

(8.2)
$$\begin{aligned}
&\sum_k G(z_j,z_k)R_k + x_jU + y_jV + W = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} G(z_j,z')\, F(z')\, dx'\, dy' - w_k \\
&\sum_k R_k = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} F(z')\, dx'\, dy' \quad , \\
&\sum_k x_k R_k = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} x'\, F(z')\, dx'\, dy' \quad , \\
&\sum_k y_k R_k = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} y'\, F(z')\, dx'\, dy' \quad .
\end{aligned}$$

La déformation de la bande a l'expression (8.1).

9. DISCUSSION DU SYSTÈME (8.2).- Prouvons que ce système possède une solutioh unique.

Il suffit de traiter le cas où $F = w_k = 0$. Alors les relations $(8.2)_2$, $(8.2)_3$ et $(8.2)_4$ expriment que les R_k constituent un système équivalent à 0 ; cela permet de déduire de $(8.2)_1$ la relation

$$\sum_{j,k} R_j\, G(z_j,z_k)\, R_k = 0$$

et d'en conclure, vu (7.3), que

$$R_k = 0 \quad .$$

(8.2) se réduit à

$$x_jU + y_jV + W = 0 \ ,$$

qui implique $U = V = W = 0$, puisque les appuis ne sont pas alignés. La preuve est achevée.

Chapitre IV

INTERPRÉTATIONS MÉCANIQUES DE G ET $\tilde{G}$

10. INTERPRÉTATION MÉCANIQUE DE $G \pm \tilde{G}$.- Supposons que, les charges restant fixes et voisines de l'origine, les appuis tendent vers $-i\infty$, sans s'aligner ; notons L la distance approximative des appuis aux charges : $L \to \infty$; supposons $w_k = \mathcal{O}(L^p)$ (p : entier $\geqslant 1$).

Les formules (8.2), où $G(z_j,z')$ est très voisin de $\tilde{G}(z_j,z')$, qui est du troisième degré en (z_j,z'), montrent que

$$(10.1) \qquad R_k = \mathcal{O}(L^p) \quad ;$$

$$(10.2) \quad \sum_k R_k = \iint F(z')\,dx'\,dy' \quad , \quad \sum_k x_k R_k = \iint x'\,F(z')\,dx'\,dy' \quad ,$$

$$\sum_k y_k R_k = \iint y'\,F(z')\,dx'\,dy'$$

sont indépendants de L .

Appliquons (8.2) à la partie de la bande où

$$(10.3) \qquad -\frac{3L}{4} < y \quad ;$$

puisque $G(z,z_k) - \tilde{G}(z,z_k)$ tend très rapidement vers 0, on peut, vu (10.1), remplacer $\sum_k G(z,z_k)\,R_k$ par $\sum_k \tilde{G}(z,z_k)\,R_k$; c'est-à-dire, vu (10.2) et le fait que $\tilde{G}$ est de degré 3, par

$$\iint \tilde{G}(z,z')\,F(z')\,dx'\,dy' \quad , \text{ à une fonction linéaire de } (x,y) \text{ près.}$$

La déformation de la partie (10.3) de la bande est donc

$$(10.4) \qquad \iint [G(z,z') - \tilde{G}(z,z')]\, F(z')\, dx'\, dy' ,$$

à un déplacement près ; cette déformation (10.2) s'annule rapidement au-delà des charges, du côté $i\infty$.

Autrement dit : placons la bande élastique sur des appuis voisins de $-i\infty$ [ou $+i\infty$] ; appliquons-lui au point z' la charge $+1$; donnons à ces appuis un déplacement tel que la déformation de la bande s'annule en $i\infty$ [ou $-i\infty$] ; alors cette déformation vaut au point z : $G(z,z') - \tilde{G}(z,z')$ [ou $G + \tilde{G}$].

II. INTERPRÉTATION MÉCANIQUE DES POLYNOMES $\pi_j(x,y)$.- Conservons les hypothèses du n° précédent ; dans la partie de la bande $-\frac{3L}{4} < y < \frac{L}{4}$, l'expression (10.4) de la déformation peut être remplacée par

$$- 2 \iint \tilde{G}(z,z')\, F(z')\, dx'\, dy' \quad , \text{ à un déplacement près ;}$$

vu l'expression (6.6) de $\tilde{G}$, cette déformation est donc une combinaison **linéaire** des six polynomes $\pi_i(x,y)$ que définit (6.5) ; les trois premiers représentent d'ailleurs des déplacements.

Il est évident qu'on peut, plus généralement, affirmer ceci, sous des conditions faciles à préciser : si la bande repose sur des appuis, voisins les uns de $i\infty$, les autres de $-i\infty$ et si les points d'application des charges sont voisins les uns de $i\infty$, les autres de $-i\infty$, alors, à distance finie de l'origine, sa déformation est une combinaison linéaire des six polynomes $\pi_j(x,y)$.

Chapitre V

FLEXION DU RECTANGLE ÉLASTIQUE AYANT DEUX BORDS PARALLÈLES LIBRES ET DEUX BORDS APPUYÉS

14. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.- La déformation d'un tel rectangle, en un point z, sous l'action de la charge 1 appliquée en z' est une fonction $\mathcal{G}(z,z')$, qui sera nommée <u>fonction de Green du rectangle fléchi</u>. D'après la mécanique, elle doit vérifier le théorème suivant, où $|\nu| < 1$:

THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ.- <u>Il existe une fonction</u> $\mathcal{G}(z,z')$ <u>et une seule ayant les propriétés suivantes</u> :

$\mathcal{G}(z,z')$ <u>est une fonction réelle de</u> z <u>et</u> z' <u>qui sont deux points du rectangle donné</u> ;

$$(12.1) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \mathcal{G}(z,z') = \delta(z-z') \qquad (\delta : \text{mesure de Dirac}) ;$$

$$(12.2) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \mathcal{G}}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 \mathcal{G}}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{sur les bords libres } x = \text{const.}$$

$$(12.3) \qquad \mathcal{G} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sur les bords appuyés : } y = \text{const. ;}$$

<u>on suppose que</u> $\mathcal{G}$ <u>possède des dérivées sixièmes continues, pour</u> $z \neq z'$.

D'après la mécanique (loi de réciprocité, résultant de la conservation de l'énergie), il faut que le théorème suivant soit vrai :

THÉORÈME DE SYMÉTRIE.- <u>On a</u>

$$(12.4) \qquad \mathcal{G}(z,z') = \mathcal{G}(z',z) .$$

Nous allons prouver ces deux théorèmes, en même temps que nous calculerons $\mathcal{G}$ explicitement comme suit :

THÉORÈME DE STRUCTURE.- Soit

$$|x| \leq a \quad , \quad 0 < y < b$$

le rectangle donné, ses bords $x = \pm a$ étant libres, ses bords $y = 0$ et $y = b$ appuyés. Alors $\mathcal{G}(z,z')$ se prolonge en une fonction biharmonique de z définie pour

$$|x| \leq a \ , \quad |x'| \leq a \ , \quad z-z' \not\equiv 0 \ , \quad z-\bar{z}' \not\equiv 0 \mod. 2\,i\,b$$

(c'est-à-dire : $z-z'$ et $z-\bar{z}'$ non multiples de $2\,ib$) ; $\mathcal{G}$ est une fonction impaire et de période $2\,b$ de y et de y' ;

$$(12.5) \qquad \mathcal{G}(z,z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(z,z' + 2\,inb) + \operatorname{sgn}(n)\,\tilde{G}(z,z' + 2\,inb)$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(z,\bar{z}' + 2\,inb) - \operatorname{sgn}(n)\,\tilde{G}(z,\bar{z}' + 2\,inb) + K(z,z') \ ,$$

où n est entier,

$$\operatorname{sgn}(n) = 1 \ \text{pour}\ n > 0 \ , = -1 \ \text{pour}\ n < 0 \ , = 0 \ \text{pour}\ n = 0 \ ;$$

$K(z,z')$ est un polynome en (x,y,x',y') de degré 4 .

L'EXPRESSION EXPLICITE de $K(z,z')$ est la suivante :

$$(12.6) \qquad 8\rho\,K(z,z') = \frac{(1+\rho)(3\rho-1)}{4(1-\rho)ab}(x^2 + x'^2)yy' - \frac{1+\rho}{2\,ab}\,xx'\,yy' \ +$$

$$+ \frac{(1+\rho)^2}{12(1-\rho)ab}(y^2 + y'^2 + 2\,b^2)yy' + \frac{(1+\rho)(1-5\rho+6\rho^2)a}{3\rho(1-\rho)^2 b}\,yy'$$

$$\text{où} \quad \rho = \frac{1-\nu}{3+\nu}$$

13. PREUVE DU THÉORÈME D'UNICITÉ.- Il s'agit de prouver qu'une fonction numérique réelle $F(z)$ est nécessairement nulle quand elle possède les propriétés suivantes :

elle est biharmonique dans le rectangle $|x|< a$, $0 < y < b$ et elle possède des dérivées quatrièmes continues sur ses bords ;

$$(13.1)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a \ ;$$

$$(13.2)\qquad F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad \text{et pour} \quad y = b \ .$$

Or (4.3) prouve que ces hypothèses impliquent $E(F) = 0$; donc $F_{x^2} = F_{xy} = F_{y^2} = 0$; donc $F = 0$, vu (13.2).

<u>Note</u>.- Voici une autre preuve, qui suppose les dérivées sixièmes de F continues aux bords : (13.2) montre que $F(z)$ se prolonge dans toute la bande $|x|< a$ en une fonction biharmonique, vérifiant (13.1), qui, par rapport à y, est impaire et de période $2\,b$. Le théorème d'unicité du n°6 prouve que c'est une combinaison linéaire des polynomes (6.5), vérifiant (13.2) ; elle est donc nulle.

<u>Note</u>.- Le raisonnement que fait la note précédente montre que $\mathcal{G}(z,z')$ doit se prolonger en une fonction de z définie dans la bande $|x|< a$, impaire et périodique en y , biharmonique en (x,y) pour $z - z' \not\equiv 0$ et $z' - \bar{z}' \not\equiv 0 \bmod 2\,ib$. Ce raisonnement suggère la construction de $\mathcal{G}(z,z')$ que voici.

14. CONSTRUCTION DE $\mathcal{G}(z,z')$.- Construisons d'abord la série, évidemment convergente, puisque G est anti-asymptotique à $\tilde{G}$:

$$(14.1)\quad H(z,z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(z,z' + 2\,inb) + \operatorname{sgn}(n)\,\tilde{G}(z,z' + 2inb) .$$

Ses propriétés sont évidemment les suivantes :

$$(14.2)\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 H(z,z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z - z' - 2\,inb) ;$$

H vérifie les conditions aux bords (12.2) ;

$$(14.3)\quad H(z,z') = H(z',z) ,$$

car $G(z,z')$ [et $\tilde{G}$] est symétrique [antisymétrique] et ne dépend que de $(x,x',\ y-y')$;

$$(14.4)\quad H(z,z') = H(\bar{z},\ \bar{z}')$$

car

$$G(z,z') = G(\bar{z},\bar{z}') ,\quad \tilde{G}(z,z') = -\,\tilde{G}(\bar{z},\bar{z}') ,$$

vu leurs expressions explicites : [6], n°28 ;

$$(14.5)\quad H(z + 2\,ib,\ z') - H(z,z') = \tilde{G}(z + 2\,ib,\ z') + \tilde{G}(z,z') .$$

Vu (14.4) ,

$$H(z,z') - H(z,\bar{z}') = H(z,z') - H(\bar{z},z')$$

est une fonction impaire de y' et de y .

Donc :

$$\mathcal{G}(z,z') = H(z,z') - H(z,\bar{z}') + K(z,z')$$

a les propriétés (12.1), (12.2), (12.3) et (12.4) si $K(z,z')$ est une fonction symétrique de (z,z'), biharmonique de (x,y), vérifiant les conditions aux bords (12.2), telle que $\mathcal{G}(z,z')$ soit impaire et de période $2\,b$ en y. Ces conditions peuvent s'énoncer ainsi :

$K(z,z')$ est symétrique ;

$K(z,z')$ est une combinaison linéaire des polynomes (6.5) à coefficients fonctions de z' ;

$K(z,z')$ est une fonction impaire de y ;

$$K(z+2\,ib,z') - K(z,z') = \tilde{G}(z+2\,ib,\bar{z}') + \tilde{G}(z,\bar{z}') - \tilde{G}(z+2\,ib,z') - \tilde{G}(z,z').$$

Or il est aisé de vérifier que le polynome (12.6) satisfait toutes ces conditions, ce qui prouve les résultats énoncés n° 12.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. CONFORTO, Neue Fortschritte in der numerischen Lösung der partiellen Differentialgleichungen der höheren Technik, Archiv der Mathematik, t.2, 1949, p.135-138.

[2] E. ESTANAVE, Contribution à l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés sur un cadre, Annales de l'Ecole normale supérieure, t.36, 1900, p.295-358.

[3] G. FICHERA, Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all' Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo, Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), t.3 (1950), p.1-81.

[4] K. FRIEDRICHS, Randwertprobleme bei elastischen Platten, Math. Annalen, t.98, 1928, p.205-247.

[5] G. KIRCHHOFF, Über das Gleichgewicht und die Bewegungen einer elastischen Scheibe, Journal für reine und angewandte Math., t.40, 1850, p.51.

[6] J. LERAY, Calcul, par réflexions, des fonctions M-harmoniques dans une bande plane, vérifiant aux bords M conditions différentielles à coefficients constants.

[7] J.C. LERAY, Calcul numérique des plaques (en préparation).

[8] M. PICONE, Exposition d'une méthode de calcul numérique des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles, mise en oeuvre à l'Institut national pour les applications du calcul, Les machines à calculer et la pensée humaine, Colloque CNRS, 37, Paris (1953).

[9] RAYLEIGH, The theory of sound, t.1, ch. 10, Vibration of plates.