Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Bernard Malgrange

Quelques problèmes de convexité pour les opérateurs différentiels à coefficients constants

Séminaire Jean Leray (1962-1963), p. 190-223
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1962-1963____190_0>

QUELQUES PROBLEMES DE CONVEXITÉ POUR LES OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

par BERNARD MALGRANGE

I - Equations en $\partial/\partial\bar{z}$.

Les résultats dont il va être question dans cet exposé et le suivant prolongent ceux qui ont été donnés l'an dernier dans ce même séminaire (4) (5). Nous suivrons la présentation de (6), que nous allons rappeler rapidement.

Soit A l'anneau des polynomes $\underline{\underline{C}}[X_1,..,X_n]$; si Ω est un ouvert $\subset \underline{\underline{R}}^r$, nous désignerons par $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace des fonctions (indéfiniment) dérivables sur Ω, à valeurs complexes, et nous désignerons par $\mathcal{E}$ le faisceau $\Omega \rightsquigarrow \mathcal{E}(\Omega)$. On fait opérer A dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}(\Omega)$ par la formule $X_j\, f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, et on le fait opérer de la même manière dans les espaces de distributions.

Soit alors M un A- module de type défini. Considérons une présentation de M ,i.e. une suite exacte:

$$A^q \to A^p \to M \to 0$$

dont nous notons P^* la première application. Par application de $\mathrm{Hom}_A(.,\mathcal{E}(\Omega))$, et en tenant compte du fait évident qu'on a $\mathrm{Hom}_A(A^p,\mathcal{E}(\Omega)) \simeq \mathcal{E}(\Omega)^p$, nous obtenons une suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(M,\mathcal{E}(\Omega)) \to \mathcal{E}(\Omega)^p \to \mathcal{E}(\Omega)^q$$

(ici et dans la suite on écrira Hom ou Ext^k au lieu de Hom_A , Ext^k_A) . La der-

-nière application est définie par la matrice P transposée de P^*. Il en résulte que $\mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{E}(\Omega))$ est isomorphe au noyau de cette application, i.e. à l'espace des solutions d'un système différentiel à coefficients constants sans second membre ; réciproquement, un tel espace de solutions pourra toujours s'écrire de cette manière.

Considérons maintenant une suite exacte à un terme de plus

$$A^r \xrightarrow{Q^*} A^q \xrightarrow{P^*} A^p \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

on en déduit une suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{E}(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \xrightarrow{P} \mathcal{E}(\Omega)^q \xrightarrow{Q} \mathcal{E}(\Omega)^r$$

et l'on a (d'après la définition de Ext^*)

$$\mathrm{Ext}^1\,(M, \mathcal{E}(\Omega)) \simeq \ker Q \,/\, \mathrm{im}\, P$$

L'un des résultats fondamentaux de (4) est le suivant : si Ω est convexe, on a, quelque soit M, $\ker Q = \mathrm{im}\, P$, donc $\mathrm{Ext}^1\,(M, \mathcal{E}(\Omega)) = 0$. Comme A est noethérien, cela s'énonce aussi

<u>Si Ω est convexe</u>, $\mathcal{E}(\Omega)$ <u>est un</u> A-<u>module injectif</u>.

(réciproquement, si Ω est connexe et $\mathcal{E}(\Omega)$ A-injectif, il est élémentaire de vérifier que Ω est convexe. Voir des indications sur la démonstration dans (6).

Nous allons donner une variante de ce théorème. Considérons pour cela un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (identifié à $\mathbb{R}^{2n}$), et faisons opérer $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ de la manière suivante : $X_j\, f = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$. Nous allons établir le théorème suivant, qui généralise un résultat bien connu sur la " $d_{\bar{z}}$ - cohomologie" :

<u>Théorème 1</u>. <u>Si Ω est holomorphiquement convexe</u> $\mathcal{E}(\Omega)$ <u>est un</u> A- <u>module injectif</u>.

Nous démontrerons le théorème 1 par dualité. Fixons d'abord quelques notations : soit $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω, $\mathcal{P}$ l'espace $\mathbb{C}[\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n]$, considéré comme sous-espace de $\mathcal{E}(\Omega)$, et $\mathcal{H}\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{P}$ l'espace des polynomes en $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$; à coefficients holomorphes dans Ω. Si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, nous posons, comme d'habitude

$\lambda z = \sum \lambda_j z_j$. Les fonctions de la forme $F = f\, e^{\lambda \bar{z}}$, avec $f \in \mathcal{H}\mathcal{P}(\Omega)^p$, $\lambda \in \underline{\underline{C}}^n$ seront appelées " p - pseudo exponentielles - polynomes sur Ω" ce qu'on écrira en abrégé : $f \in p - EP(\Omega)$.

Désignons encore par $\mathcal{E}'(\Omega)$ le dual de $\mathcal{E}(\Omega)$ i.e. l'espace des distributions à support compact dans Ω ; d'autre part, si $P \in A$, on définit $\hat{P}$ par $\hat{P}(X) = P(-X)$. Cela posé, on a le théorème suivant :

Théorème 2. Soit Ω un ouvert holomorphiquement convexe $\subset \underline{\underline{C}}^n$, et soit $P \in \mathrm{Hom}(A^p, A^q)$. Pour que $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega)^p$ soit de la forme $\varphi = \hat{P}^* \psi$, avec $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega)^q$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

(3) Pour tout $G \in p.EP(\Omega)$ vérifiant $PG = 0$, on a $\langle G, \varphi \rangle = 0$

Remarque : On vérifie aussitôt que, pour tout $F \in \mathcal{E}(\Omega)^p$, et tout $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega)^q$, on a $\langle F, \hat{P}^* \psi \rangle = \langle PF , \psi \rangle$. La condition (3) est donc trivialement nécessaire !.

Montrons d'abord que le théorème 2 entraîne le théorème 1. Soit donc M un A - module de type fini ; considérons une suite exacte

$$A^r \xrightarrow{Q^*} A^q \xrightarrow{P^*} A^p \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et la suite obtenue par application de $\mathrm{Hom}(\cdot , \mathcal{E}(\Omega))$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M , \mathcal{E}(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \xrightarrow{P} \mathcal{E}(\Omega)^q \xrightarrow{Q} \mathcal{E}(\Omega)^r$$

tout revient à démontrer que cette suite exacte, i. e. qu'on a $\ker Q = \mathrm{im}\, P$. Pour cela nous démontrerons successivement :

a) $\mathrm{im}\, P$ est fermé dans $\mathcal{E}(\Omega)^q$

b) $\mathrm{im}\, P$ est dense dans $\ker Q$.

Démonstration de a) - Par transposition, il devient au même d'établir que l'application $\hat{P}^* : \mathcal{E}'(\Omega)^q \longrightarrow \mathcal{E}'(\Omega)^p$ a une image fermée ; or cela résulte aussitôt du théorème 2 .

Démonstration de b) - Elle va résulter des deux lemmes suivants :

Lemme 4. Soit $F \in q - EP(\Omega)$, vérifiant $Q\,F = 0$. Il existe $G \in p - EP(\Omega)$ vérifiant $P\,G = F$.

Plus précisément nous allons voir que si l'on a $F = f\,e^{\lambda \bar{z}}$, $f \in \mathcal{H}\mathcal{P}(\Omega)^q$, on peut prendre $G = g\,e^{\lambda \bar{z}}$, avec $g \in \mathcal{H}\mathcal{P}(\Omega)^q$. Il suffit de traiter le cas $\lambda = 0$, puisqu'on a $Q\,F = (Q_\lambda f)\,e^{\lambda \bar{z}}$, $P\,G = (P_\lambda g)\,e^{\lambda \bar{z}}$, Q_λ et P_λ étant déduits respectivement de Q et P par la translation $(-\lambda)$. Autrement dit, il suffit d'établir que $\mathcal{H}\mathcal{P}(\Omega)$ est un A - module injectif. Or, il est connu (et facile à établir) que $\mathcal{P}$ est un A - module injectif. Il en résulte (exactitude de $\otimes_{\underline{c}}$) que $\mathcal{H}\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \otimes_{\underline{c}} \mathcal{P}$ est un A - module injectif.

Lemme 5. Si Ω est holomorphiquement convexe, $\mathcal{E}'(\Omega)$ est un A - module plat.

En interprétant la platitude en termes de relations (1) , cela revient à démontrer ceci : P et Q ayant la même signification que ci-dessus, tout $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega)^q$ vérifiant $\hat{P}^* \psi = 0$ est de la forme $\hat{Q}^* \chi$, avec $\chi \in \mathcal{E}'(\Omega)^r$.

D'après le théorème 2 (appliqué à Q) il suffit de vérifier que, pour tout $F \in q - EP(\Omega)$ vérifiant $Q\,F = 0$, on a $\langle F, \psi \rangle = 0$. Or, d'après le lemme 4, on a $F = P\,G$, avec $G \in p - EP(\Omega)$, et, par conséquent

$$\langle F, \psi \rangle = \langle P\,G, \psi \rangle = \langle G, P^* \psi \rangle = 0 \text{ ; d'où le lemme.}$$

Démontrons maintenant b). Par dualité, il suffit d'établir ceci : tout $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega)^q$ orthogonal à $\operatorname{im} P$ est orthogonal à $\ker Q$. Or, si ψ est orthogonal à $\operatorname{im} P$, on a $\hat{P}^* \psi = 0$; d'après le lemme 5, on a $\psi = \hat{Q}^* \chi$, avec $\chi \in \mathcal{E}'(\Omega)^r$, d'où le résultat.

Il nous faut maintenant démontrer le théorème 2 . Pour cela, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et F un faisceau analytique cohérent sur Ω, $F(\Omega)$ et $\mathcal{E}'(\Omega)$ peuvent être considérés comme des $\mathcal{H}(\Omega)$ modules (pour $F(\Omega)$, par définition ; pour $\mathcal{E}'(\Omega)$ en faisant opérer dessus les fonctions holomorphes par multiplication). On peut donc considérer $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\Omega)}(F(\Omega), \mathcal{E}'(\Omega))$, qu'on munit de la structure de A - module déduite de celle de $\mathcal{E}'(\Omega)$. Cela étant, on a la proposition suivante,

<u>Proposition</u> 6 . <u>Si</u> Ω <u>est convexe (au sens ordinaire), le</u> A - <u>module</u> $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\Omega)}(F(\Omega), \mathcal{E}'(\Omega))$ <u>est plat</u>.

(en fait, une fois établi le théorème 2, on pourrait démontrer ce résultat par la même méthode pour Ω holomorphiquement convexe).

Par un argument de limite inductive, on peut remplacer Ω par un ouvert convexe relativement compact dans Ω . D'après la théorie des faisceaux analytiques cohérents (2), et le théorème des syzygies, on peut donc supposer que $F(\Omega)$ admet une résolution finie :

$$0 \to \mathcal{H}(\Omega)^{p_\ell} \to \dots \to \mathcal{H}(\Omega)^{p_0} \to F(\Omega) \to 0$$

D'autre part il résulte de la théorie de la division des distributions (3) que $\mathcal{E}'(\Omega)$ est un $\mathcal{H}(\Omega)$ - module injectif. Par conséquent la suite déduite de la précédente

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\Omega)}(F(\Omega), \mathcal{E}'(\Omega)) \to \mathcal{E}'(\Omega)^{p_0} \to \dots \to [\mathcal{E}'(\Omega)]^{p_1} \to 0$$

est encore exacte.

Enfin on déduit immédiatement de la théorie des systèmes différentiels à coefficients constants (4), (6) que $\mathcal{E}'(\Omega)$ est un A - module plat ; d' autre part, les homomorphismes de la suite exacte précédente sont des homomorphismes de A - modules (évident). Le résultat s'en déduit, par récurrence sur ℓ .

Nous utiliserons la proposition 6 sous la forme suivante :

Proposition 7 . Soit Ω un ouvert convexe $\subset \underline{\underline{C}}^n$, un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{H}$, et soit $P \in \mathrm{Hom}\,(A^p, A^q)$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega)^p$, vérifiant $\mathfrak{J}(\Omega)\varphi = 0$ et $\varphi = \hat{P}^* \psi$, avec $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega)^q$. Il existe alors $\psi' \in \mathcal{E}'(\Omega)^q$ tel qu'on ait $\mathfrak{J}(\Omega)\psi' = 0$ et $\varphi = \hat{P}^* \psi'$.

Considérons en effet la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{J}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega)/\mathfrak{J}(\Omega) \longrightarrow 0$$

(dont le dernier terme est d'ailleurs égal à $(\mathcal{H}/\mathfrak{J})(\Omega)$, d'après (2)). On en déduit une suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\Omega)}\,(\mathcal{H}(\Omega)/\mathfrak{J}(\Omega)\,,\ \mathcal{E}'(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\Omega)}\,(\mathfrak{J}(\Omega)\,,\ \mathcal{E}'(\Omega)) \longrightarrow 0$$

qui est encore exacte à cause de l'injectivité de $\mathcal{E}'(\Omega)$ en tant que $\mathcal{H}(\Omega)$- module.

On voit d'abord que l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega)$ qui annulent $\mathfrak{J}(\Omega)$ s'identifie au premier terme de cette suite exacte (ce point n'utilise d'ailleurs pas l'injectivité de $\mathcal{E}'(\Omega)$, mais seulement les propriétés générales d'exactitude de Hom). D'autre part les homomorphismes de cette suite sont compatibles avec les structures de A - modules (évident).

Soit alors M un A - module. Il résulte de la proposition 6 (appliquée à $F = \mathfrak{J}$) que, si l'on applique le foncteur $M \otimes_A$ à la suite précédente, on obtient encore une suite exacte, en particulier l'application

$$M \otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\Omega)}\,(\mathcal{H}(\Omega)/\mathfrak{J}(\Omega)\,,\ \mathcal{E}'(\Omega)) \longrightarrow M \otimes_A \mathcal{E}'(\Omega)$$

est injective. Prenant $M = \ker \left\{ \hat{P}^* : A^q \to A^p \right\}$, on trouve exactement la proposition 7, au langage près (la traduction est laissée au lecteur).

Nous allons maintenant démontrer le théorème 2 ; pour cela, nous remarquerons que ce théorème est déjà connu lorsque Ω est convexe (en particulier lorsque Ω est un polydisque), grâce à (4) ; nous ramènerons le cas général à ce cas particulier par un argument de plongement inspiré de celui de Cartan - Oka (2).

Prenons $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega)^p$ vérifiant la condition (3), et soit K le support de φ. On sait (2) qu'on peut trouver un voisinage ouvert $\Omega' \subset \Omega$ de K, possédant la propriété suivante :

Il existe des fonctions $f_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ $(1 \leq j \leq k)$ qui définissent un plongement (i.e une application injective, propre, partout de rang n) de Ω' dans le polydisque de $\underline{\underline{C}}^k : |\zeta_j| < 1$.

On peut encore supposer que Ω' est relativement compact dans Ω ; supposons, pour fixer les idées, que, sur Ω', on ait $|z_i| < 1$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors l'application

$$i : (z_1, \ldots, z_n) \rightsquigarrow (z_1, \ldots, z_n, f_1, \ldots, f_k)$$

est encore un plongement de Ω' dans le polydisque $\Pi \subset \underline{\underline{C}}^{n+k} : |z_i| < 1 ; |\zeta_j| < 1$

Soit $\mathcal{J}$ le faisceau analytique d'ideaux dans Π défini par $i(\Omega')$; il est visible que, en tout point $a \notin i(\Omega')$, $\mathcal{J}_a = \mathcal{H}_a$, et qu'aux points de $i(\Omega')$, $\mathcal{J}_a$ est engendré par les $\zeta_j - f_j$ (on se gardera de croire que $\mathcal{J}(\Pi)$ est engendré par les $\zeta_j - f_j(z)$ vu que ces fonctions ne sont pas nécessairement définies sur Π tout entier, mais seulement au voisinage de $i(\Omega')$).

A φ, nous associons son image directe $\tilde{\varphi} = i(\varphi) \in \mathcal{E}'(\Pi)^p$, i.e. la dis-

-tribution définie par la formule suivante

pour $h \in \mathcal{E}(\eta)^p$, $\langle i(\varphi), h\rangle = \langle \varphi, h \circ i\rangle$. Cette image possède les propriétés suivantes

a) le support de $\tilde{\varphi}$ est égal à $i(K)$ (évident)

b) On a $\mathcal{J}(\eta)\tilde{\varphi} = 0$

En effet, d'après (a) il suffit de se placer au voisinage de $i(\Omega')$; or par définition de $\tilde{\varphi}$, on a

$$\zeta_j - f_j(z))\tilde{\varphi} = 0$$

c) $\tilde{\varphi}$ est orthogonal aux exponentielles polynomes H en $z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}$ (au sens ordinaire) à p composantesqui vérifient $P\,H = 0$, $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{\zeta}_j} = 0$ $(1 \leq j \leq k)$.

En effet, un tel H s'écrit $H = h(z, \zeta, \bar{z})\, e^{\mu z + \nu\zeta + \lambda\bar{z}}$

h étant un polynome (à composantes) en $z, \zeta, \bar{z}$. On aura donc

$H \circ i = h(z, f(z), \bar{z})\, e^{\mu z + \nu f(z) + \lambda \bar{z}} = h'(z, \bar{z})\, e^{\lambda \bar{z}}$ avec $h' \in \mathcal{HP}(\Omega)^p$, et

comme P n'opère que sur $\bar{z}$, on aura $P(H \circ i) = 0$. L'essertion c) résulte alors du fait que φ vérifie la condition (3).

On déduit de (c) et de (4) que $\tilde{\varphi}$ est de la forme suivante

(8) $\tilde{\varphi} = \hat{P}^{*}\zeta + \sum \dfrac{\partial \chi_j}{\partial \bar{\zeta}_j}$, avec $\zeta \in \mathcal{E}'(\eta)^q$, $\chi_j \in \mathcal{E}'(\eta)^p$ $(1 \leq j \leq k)$.

D'après (b) et la proposition 7, on peut supposer qu'on a $\mathcal{J}(\eta)\zeta = 0$, $\mathcal{J}(\eta)\chi_j = 0$. En particulier, comme les seuls zéros de $\mathcal{J}(\eta)$ sont les points de $i(\Omega')$ (2) , les supports de ζ et des χ_j seront contenus dans $i(\Omega)$

Désignons maintenant par D^r un monôme de dérivation par rapport aux $\frac{\partial}{\partial \zeta_j}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j}$; d'après un théorème de L. SCHWARTZ ((7), théorème), toute distribution $\sigma \in \mathcal{E}'(\Pi)$ s'écrit d'une manière unique comme une somme finie

$$\sigma = \sum D^r \widetilde{\tau_r(\sigma)} \quad , \text{ avec } \quad \tau_r(\sigma) \in \mathcal{E}'(\Omega') .$$

De là, et de (8), on déduit

$$\varphi = \tau_o(\hat{P}^* \rho) .$$

Posons $\psi = \tau_o(\rho)$; nous aurons achevé la démonstration du théorème 2, si nous montrons qu'on a $\varphi = \hat{P}^* \psi$, autrement dit, si nous établissons la formule

$$\tau_o(\hat{P}^* \rho) = P^* \psi .$$

Par récurrence sur le degré des composantes de P, il suffit de montrer qu'on a

$$(9) \qquad \tau_o\left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_i}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}$$

Or, la formule $\rho = \widetilde{\psi} + \sum_{|r| \geqslant 1} D^r \widetilde{\tau_r(\rho)}$, on déduit

$$\tau_o\left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_i}\right) = \tau_o \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \bar{z}_i} .$$

Par conséquent, pour éttablir (9), il suffit d'établir la formule

$$(10) \qquad \tau_o\left(\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \bar{z}_i}\right) = \widetilde{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}\right)}$$

Pour cela, il suffit d'expliciter les deux membres :

$$\left\langle \widetilde{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_i}\right)}, H \right\rangle = - \left\langle \psi, \frac{\partial}{\partial \bar z_i}(H \circ i) \right\rangle = - \left\langle \psi, \frac{\partial H}{\partial \bar z_i} \circ i \right\rangle - \sum_j \left\langle \psi, \frac{\partial \bar f_j}{\partial \bar z_i}\left[\frac{\partial H}{\partial \xi_j} \circ i\right]\right\rangle$$

c'est à dire

$$\widetilde{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_i}\right)} = \frac{\partial\tilde\psi}{\partial\bar z_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial\xi_j} \widetilde{\left(\psi \frac{\partial f_j}{\partial \bar z_i}\right)}$$

Ceci entraîne la formule (10), et le théorème 2 .

Corollaire 11 . Dans les hypothèses du théorème 2 , les $G \in p\text{-}E\,P(\Omega)$ qui vérifient $P\,G = 0$ sont totales dans $N(P,\Omega) = \ker\{P : \mathcal{E}(\Omega)^p \to (\Omega)^q\}$.
En effet, si $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega)^p$ est orthogonal à $N(P,\Omega) \cap p - E\,P(\Omega)$, on a d'après le théorème 2 : $\varphi = P^* \psi$, avec $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega)^q$; donc φ est orthogonal à $N(P,\Omega)$.

Corollaire 12 . Dans les mêmes hypothèses, soit Ω' un ouvert contenant Ω , tel que $\mathcal{H}(\Omega')$ soit dense dans $\mathcal{H}(\Omega)$. Alors $N(P,\Omega')$ est dense dans $N(P,\Omega)$.

D'après le corollaire 11, il suffit de prouver que $N(P,\Omega') \cap p\text{-}E\,P(\Omega')$ est dense dans $N(P,\Omega) \cap p - E\,P(\Omega)$. On se ramène comme au lemme 4 à examiner le cas des p-pseudo-exponentielles-polynomes pour lesquelles $\lambda = 0$, i e. à montrer que $N(P,\Omega') \cap \mathcal{H}\mathcal{P}(\Omega')^p$ est dense dans $N(P,\Omega) \cap \mathcal{H}P(\Omega)^p$. Or ce point résulte immédiatement de l'hypothèse "$\mathcal{H}(\Omega')$ dense dans $\mathcal{H}(\Omega)$" et du fait qu'on a $\mathcal{H}\mathcal{P}(\Omega) \simeq \mathcal{H}(\Omega) \otimes_{\underline{\underline{C}}} \mathcal{P}$.

En particulier, si Ω est un "ouvert de Runge" (i e holomorphiquement convexe, et $\mathcal{H}(\underline{\underline{C}}^n)$ dense dans $\mathcal{H}(\Omega')$, $N(P, \underline{\underline{C}}^n)$ sera dense dans $N(P,\Omega)$. Par conséquent, d'après la théorie des systèmes à coefficients constants les exponentielles-polynomes ordinaires en z, $\bar z$, (et même les exponentielles polynomes en $\bar{z}$, à coefficients polynomes en z) seront totaux dans $N(P,\Omega)$.

Remarque 13. Tous les résultats précédents subsistent, avec la même démonstration, si l'on prend pour Ω une variété holomorphiquement convexe étalée (sans ramifications) au-dessus de $\underline{\underline{C}}^n$.

Remarque 14. En raisonnant comme dans (5), 2ème partie, on déduirait des résultats précédents des théorèmes de prolongement à travers une hypersurface pseudo-convexe généralisant les exemples classiques de Hartogs. Nous laissons cette question au lecteur.

Pour terminer, nous allons établir la réciproque du théorème 1.

Théorème 15 . *Soit Ω un ouvert $\subset \underline{\underline{C}}^n$, tel que $\mathcal{E}(\Omega)$ soit un A-module injectif. Alors Ω est holomorphiquement convexe.*

Une équation du type $d_{\bar{z}}\varphi = \psi$, ($\varphi$, ψ des formes différentielles) est évidemment un cas particulier des systèmes considérés ici ! Par suite l'hypothèse implique que, pour tout $p > 0$, le $d_{\bar{z}}$ - cohomologie de Ω est nulle ; donc pour tout $p > 0$, on a $H^p(\Omega,\mathcal{H}) = 0$. Il suffit donc d'établir ceci :

Proposition 16. *Si, pour tout $p \geqslant 1$, on a $H^p(\Omega,\mathcal{H}) = 0$, est holomorphiquement convexe.*

Ce résultat est dû à H. Cartan (cf.(8)) ; rappelons-en la démonstration.

Soit P un hyperplan complexe affine de $\underline{\underline{C}}^n$, disons $z_1 = 0$ pour fixer les idées ; considérons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}_\Omega \xrightarrow{z_1} \mathcal{H}_\Omega \to \mathcal{H}_{\Omega\cap P} \to 0$$

où $\mathcal{H}_\Omega$ (resp. $\mathcal{H}_{\Omega\cap P}$) désigne le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur Ω (resp. $\Omega \cap P$) ; prenons sa suite exacte de cohomologie ; en utilisant l'hypothèse ; on trouve ceci

a) - L'application $H^{0}(\Omega; \mathcal{H}_{\Omega}) \longrightarrow H^{0}(\Omega \cap P; \mathcal{H}_{\Omega \cap P})$ est surjective ; autrement dit toute fonction holomorphe sur $\Omega \cap P$ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

b) - Pour tout $p \geqslant 1$, on a $H^{p}(\Omega \cap P, \mathcal{H}_{\Omega \cap P}) = 0$. Donc $\Omega \cap P$ vérifie les hypothèses de la proposition 16. En recommençant, on trouve ceci si D est une droite complexe affine de $\underline{\underline{C}}^{n}$, toute fonction holomorphe sur $\Omega \cap D$ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω .

Cela étant, supposons que Ω ne soit pas holomorphiquement convexe. On peut alors trouver un compact $K \subset \Omega$, un point $a \in \Omega$ et un polydisque ouvert $\mathcal{P}$ de centre a contenu dans Ω possédant les propriétés suivantes : a appartient à l'enveloppe de K par rapport à $\mathcal{H}(\Omega)$, $\bar{\mathcal{P}}$ rencontre la frontière $\partial\Omega$ de Ω , mais les translatés de $\bar{\mathcal{P}}$ centrés en n'importe quel point de K sont contenus dans Ω . D'après un raisonnement de <u>Cartan</u> - <u>Thullen</u>, toute fonction holomorphe dans Ω devrait être bornée dans $\mathcal{P}$; nous allons voir que c'est absurde.

Soit, en effet, b un point de $\bar{\mathcal{P}} \cap \partial\Omega$, et soit D la droite complexe contenant le segment réel $[a, b[$. Il existe (théorie des fonctions d'une variable complexe) une fonction f holomorphe sur $\Omega \cap D$, et non bornée sur $[a, b[$; et f se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω , qui n'est pas bornée dans $\mathcal{P}$. D'où la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

(1) N. Bourbaki Algèbre commutative, chap. I (Hermann, Paris 1961)

(2) H. Cartan Séminaire 1951/1952

(3) B. Malgrange Division des distributions, Séminaire L. Schwartz 1959/1960 Exposés 21 - 25

(4) B. Malgrange Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire J. Leray 1961/1962 et Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Paris 1962

(5) B. Malgrange Sur les systèmes différentiels à coefficients constants (suite) Séminaire J. Leray 1961/1962

(6) B. Malgrange Systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Bourbaki, Décembre 1962

(7) L. Schwartz Théorie des distributions, tome 1 (Hermann, Paris 1950)

(8) J.P. Serre Quelques problèmes globeux relatifs aux variétés de Stein, Colloque de Bruxelles, 1953, p. 57 - 68

QUELQUES PROBLEMES DE CONVEXITE POUR LES OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS

par Bernard MALGRANGE

II - OUVERTS CONCAVES ET THEOREMES DE DUALITE

N.B. Cet exposé rédigé en Octobre-Novembre 1963, est beaucoup plus développé que l'exposé oral qui ne traitait que l'exemple 3, et par une méthode un peu différente.

1 - INTRODUCTION

Nous reprenons ici les notations de (12) : A désigne l'anneau des polynomes $\underline{\underline{C}}\,[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{D}'$) le faisceau des germes de fonctions indéfiniment dérivables (resp. de distributions) sur $\underline{\underline{R}}^n$; A opère dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}'$ par la formule $X_j f = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, et X_j a pour transposé $-X_j$.

Si M est un A-module de type fini, nous noterons $\mathcal{E}^M$ (resp. $\mathcal{D}'^M$) le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_A\,(M, \mathcal{E})$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_A\,(M, \mathcal{D}')$), en considérant M et A comme des faisceaux constants.

Dans la suite, nous écrirons toujours Hom pour Hom_A, $\otimes$ pour $\otimes_A$ etc...

Soit U un ouvert convexe de $\underline{\underline{R}}^n$. On sait (12) qu'on a

$$(1-1) \qquad H_c^k\,(U\,;\mathcal{D}'^M) \simeq \mathrm{Ext}^k\,(M, A) \otimes \mathcal{E}'(U)$$

$$(1-2) \qquad H_c^k\,(U\,;\,\mathcal{E}^M) \simeq \mathrm{Ext}^k\,(M, A) \otimes \mathcal{D}\,(U)$$

où l'indice "c" désigne la famille des parties compactes de U , et où $\mathcal{E}'(U)$ (resp. $\mathcal{D}(U)$) sifnifie comme d'habitude $\Gamma_c(U ; \mathcal{D}')$ (resp. $\Gamma_c(U ; \mathcal{E})$) .

De la première relation on déduit un accouplement

$$(1-3) \qquad H^k_c(U ; \mathcal{D}'^M) \times \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^k(\hat{M}, A), \mathcal{E}(U)) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

($\hat{M}$ désigne le symétrique de M par rapport à l'origine)
et l'on voit facilement que l'on peut topologiser cet accouplement en munissant le premier terme d'une topologie d'espace $(\mathcal{D}\mathcal{F})$ et le second d'une topologie d'espace $(\mathcal{F})$, de façon à faire de cet accouplement une dualité (i.e. chaque terme est le dual vectoriel topologique de l'autre). Nous laisserons au lecteur le soin d'examiner cette question, car nous allons en traiter une voisine, mais plus délicate : indiquons seulement qu'il faudrait définir ces topologies par un procédé analogue au paragraphe 2, et qu'ici ces topologies seraient séparées à cause de [12], théorème 3 - 2.

De même, en partant de (1, 2), on obtiendra un accouplement

$$(1-4) \qquad H^k_c(U ; \mathcal{E}^M) \times \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^k(\hat{M}, A), \mathcal{D}'(U)) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

Mais ici, il se présente des difficultés vectorielles topologiques, que nous n'avons pas résolues.

Soit maintenant K un compact convexe de $\underline{\underline{R}}^n$. Considérant l'accouplement (1 - 4) pour tous les U convexes contenant K , et passant à la limite, on obtient un accouplement

$$\varprojlim_{U \supset K} H^k_c(U ; \mathcal{E}^M) \times \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^k(\hat{M}, A), \mathcal{D}'(K)) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

Rappelons maintenant la définition des "groupes de cohomologie à support dans K" (8) : si U est un ouvert de $\underline{\underline{R}}^n$, K un compact de U et F un faisceau de groupes abéliens sur U, on désigne par $\Gamma_K(U; F)$ le groupe des sections de F sur U à support dans K, et par $H^k_K(U; .)$ le kième foncteur dérivé de $\Gamma_K(U; .)$ au sens de (7). Comme $\Gamma_K(U; .)$ est visiblement exact à gauche, on a $H^o_K(U; F) \simeq \Gamma_K(U; F)$; en outre, si $V = U - K$, rappelons qu'on a une suite exacte illimitée à droite, et dépendant fonctoriellement de F :

$$0 \longrightarrow H^o_K(U; F) \longrightarrow H^o(U; F) \longrightarrow H^o(V; F) \longrightarrow H^1_K(U; F) \longrightarrow \dots$$

Enfin, si U' est un autre ouvert avec $K \subset U' \subset U$, on a des isomorphismes fonctoriels en F : $H^k_K(U; F) \simeq H^k_K(U', F)$. Pour simplifier l'écriture, nous identifierons ces groupes et les écrirons simplement $H^k_K(F)$.

Cela étant, de l'application définie de façon évidente

$H^k_K(F) \longrightarrow H^k_C(U, F)$ on déduit une application

$$(1-6) \qquad H^k_K(F) \longrightarrow \varinjlim_{U \supset K} H^k_c(U; F)$$

Prenant en particulier $F = \mathcal{E}^M$, et K convexe, on en déduit un accouplement

$$(1-7) \qquad H^k_K(\mathcal{E}^M) \times \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Ext}^k(\hat{M}, A), \mathcal{D}'(K)) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

L'objet de cet exposé est précisément l'étude de cet accouplement.

Il y aurait lieu évidemment d'étudier aussi l'accouplement analogue déduit de (1 - 3), mais il se présente des difficultés vectorielles topologiques supplémentaires. Par ailleurs, le lecteur qui désirerait voir la signification de cette étude pourra commencer par examiner les exemples (paragraphe 5).

REMARQUE (1 - 8) On voit facilement que pour $k = 0$, (1 - 6) est un isomorphisme, mais que pour $k > 0$, (1 - 6) est surjectif, mais non injectif en général. Dans le cas où $F = \mathcal{E}^M$, nous dirons plus loin un mot de cette question.

2 - UN THEOREME DE DUALITE.

Soit Ω un ouvert de $\underline{\underline{R}}^n$, et M un A-module de type fini. Considérons une résolution libre de M .

$$(2-1) \qquad \ldots \xrightarrow{P_2^*} A^{p_1} \xrightarrow{P_1^*} A^{p_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Par application de Hom $(M, \mathcal{E}(\Omega))$, on en déduit une suite

$$(2-2) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{E}(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^{p_0} \xrightarrow{P_1} \mathcal{E}(\Omega)^{p_1} \xrightarrow{P_2} \ldots$$

et par application de $\cdot \otimes \mathcal{E}'(\Omega)$ une autre suite

$$(2-3) \qquad \ldots \xrightarrow{\hat{P}_2^*} \mathcal{E}'(\Omega)^{p_1} \xrightarrow{\hat{P}_1^*} \mathcal{E}'(\Omega)^{p_0} \longrightarrow \hat{M} \otimes \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow 0$$

où le symbole $*$ désigne la transposition, et le symbole $\hat{}$ la symétrie par rapport à l'origine, ceci pour que (2 - 2) et (2 - 3) soient en dualité.

De (2 - 2), on déduit $\mathrm{Ext}^k (M, \mathcal{E}(\Omega)) \simeq \ker P_{k+1} / \mathrm{im}\, P_k$; comme $\ker P_{k+1}$ est muni d'une topologie d'espace $(\mathcal{F})$, $\mathrm{Ext}^k (M, \mathcal{E}(\Omega))$ est muni d'une topologie de quotient <u>non nécessairement séparé</u> d'espace $(\mathcal{F})$ en abrégé "$q - \mathcal{F}$[1]"; en utilisant le fait que deux résolutions libres de M sont homotopiquement équivalentes, on voit que cette topologie ne dépend pas de la résolution choisie. Pour $k = 0$, on trouve évidemment une topologie séparée.

De même, à partir de la suite (2 - 3), on munit

$\mathrm{Tor}\ (\hat{M}, \mathcal{E}'(\Omega)) \simeq \ker \hat{P}^*_k / \mathrm{im}\ \hat{P}^*_{k+1}$ d'une topologie d'espace $(\underline{a} - \mathcal{DF})$, indépendante de la résolution de M choisie (rappelons que $\mathcal{E}(\Omega)$ est un espace de SCHWARTZ, et que, par conséquent, tout son espace fermé de $\mathcal{E}'(\Omega)$ muni de la topologie induite est un $(\mathcal{DF})$ (5)).

<u>Proposition</u> (2 - 4) <u>L'accouplement</u> $\mathrm{Ext}^k\ (M, \mathcal{E}(\Omega)) \times \mathrm{Tor}_k\ (\hat{M}, \mathcal{E}'(\Omega)) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ <u>défini par</u> (2 - 2) et (2 - 3) <u>est séparément continu</u>, <u>et met en dualité les séparés associés</u> (i.e. chacun des séparés associés est le dual fort de l'autre). <u>D'autre part</u> $\mathrm{Ext}^k\ (M, \mathcal{E}(\Omega))$ <u>est séparé si et seulement si</u> $\mathrm{Tor}_{k-1}\ (\hat{M}, \mathcal{E}'(\Omega))$ <u>est séparé</u> (cette condition étant vide par définition si $k = 0$).

La démonstration de la première assertion est immédiate. Pour la seconde, il suffit de remarquer que l'image de P_k est fermée si et seulement si l'image de $\hat{P}^*_k$ est fermée (d'après (2), et le fait que $\mathcal{E}(\Omega)$ est réflexif).

<u>N.B.</u> Les raisonnements du type précédent se trouvent explicités pour la première fois dans (14) à notre connaissance. Nous leur donnons ici une forme due à A. MARTINEAU.

Posons maintenant $K = \underline{\underline{R}}^n - \Omega$; dans toute la suite, nous supposerons K <u>compact</u> (ce qui d'ailleurs ne deviendra utile qu'à partir de (2 - 7)). On sait (12) qu'on a

$$H^k\ (\Omega\ ; \mathcal{E}^M) \simeq \mathrm{Ext}^k\ (M, \mathcal{E}(\Omega)) \qquad \text{pour} \quad k \geq 0$$

et, en particulier $H^k\ (\underline{\underline{R}}^n\ ; \mathcal{E}^M) = 0 \quad$ pour $\quad k \geq 1$

On déduit de là et de la suite exacte des H_K , rappelés dans l'introduction les propriétés suivantes :

(2 - 5) On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{\circ}_K(\mathcal{E}^M) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{E}(\underline{\underline{R}}^n)) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{E}(\Omega)) \longrightarrow H^1_K(\mathcal{E}^M) \longrightarrow 0$$

(2 - 6) Pour $k \geq 2$, on a un isomorphisme

$$H^k_K(\mathcal{E}^M) \simeq \mathrm{Ext}^{k-1}(M, \mathcal{E}(\Omega))$$

Nous munirons les espaces $H^k_K(\mathcal{E}^M)$ des topologies d'espace $(q - \mathcal{F})$ définies par ces relations (pour $k = 0$, cette topologie est évidemment séparée). D'autre part, la proposition (2 - 4) nous donne leurs duals (i.e. ceux des séparés associés), pour $k \geq 2$. Examinons les cas $k = 0$ et $k = 1$. Nous devons pour cela considérer l'application (déduite de l'injection évidente $\mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}'(\underline{\underline{R}}^n)$)

$$\hat{M} \otimes \mathcal{E}'(\Omega) \xrightarrow{i} \hat{M} \otimes \mathcal{E}'(\underline{\underline{R}}^n)$$

Nous poserons $N_1 = \ker(i)$, $N_o = \mathrm{im}(i)$.

Comme $\hat{M} \otimes \mathcal{E}'(\underline{\underline{R}}^n)$ est séparé (cela résulte aussitôt de (10), théorème 3-2, ou (12), théorème 3 - 2), N_o peut encore être muni d'une topologie d'espace $(q - \mathcal{D}\mathcal{F})$. Pour que N_o soit séparé, il faut et il suffit que l'image de i soit fermée ; comme i est continue (évident), il revient au même de vérifier que l'image de l'application $\tilde{\imath}$ déduite de i en passant aux séparés associés est continue ; en transposant, on obtient donc ceci :

N_o <u>est séparé si et seulement si</u> $H^1_K(\mathcal{E}^M)$ <u>est séparé</u>.

Reste à examiner N_1 ; on a un isomorphisme (algébrique)

$$N_1 \simeq \mathcal{E}'(\Omega)^{p_o} \cap \hat{P}^*_1\ \mathcal{E}'(R^n)^{p_1} / \hat{P}^*_1\ \mathcal{E}'(\Omega)^{p_1}$$

Comme $\hat{P}_1^* \mathcal{E}'(\underline{\underline{R}}^n)^{p_1}$ est fermé ((10), théorème 3 - 2), N_1 peut encore être muni d'une topologie d'espace (q - $\mathcal{D}$F) ; il sera séparé si et seulement si $\hat{P}_1^* \mathcal{E}'(\Omega)^{p_1}$ est fermé ; en transposant on trouve donc ceci :

N_1 <u>est séparé si et seulement si</u> $\mathrm{Ext}^1 (M, \mathcal{E}'(\Omega)) \simeq H_K^2 (\mathcal{E}^M)$ <u>est séparé</u>. On voit encore que ceci a lieu si et seulement si $\hat{M} \otimes \mathcal{E}'(\Omega)$ est séparé ; on voit aussi que, dans tous les cas, la topologie que nous venons de définir sur N_1 coïncide avec celle que l'on déduit de l'injection $N_1 \longrightarrow \hat{M} \otimes \mathcal{E}'(\Omega)$. Enfin, (raisonner comme à la proposition (2 - 4)) les séparés associés à $H_K^o (\mathcal{E}^M)$ et N_o (resp. $H_K^1 (\mathcal{E}^M)$ et N_1) sont en dualité.

Considérons maintenant la suite exacte (ici, l'hypothèse "K compact" est essentielle)

$$(2 - 7) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}'(\underline{\underline{R}}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(K) \longrightarrow 0$$

Tensorisant avec $\hat{M}$, et tenant compte de la platitude de $\mathcal{E}'(\underline{\underline{R}}^n)$ sur A (12), on trouve les résultats suivants

(2 - 8) On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1 (\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) \longrightarrow \hat{M} \otimes \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \hat{M} \otimes \mathcal{E}'(\underline{\underline{R}}^n) \longrightarrow \hat{M} \otimes \mathcal{D}'(K) \longrightarrow 0$$

d'où des isomorphismes (qui seront, par définition, des isomorphismes topologiques)

$$N_o \simeq \hat{M} \otimes \mathcal{D}'(K)$$

$$N_1 \simeq \mathrm{Tor}_1 (\hat{M}, \mathcal{D}'(K))$$

(2 - 9) Pour $k \geq 1$, on a des isomorphismes (encore topologiques, par définition)

$$\mathrm{Tor}_{k+1} (\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) \simeq \mathrm{Tor}_k (\hat{M}, \mathcal{E}'(\Omega)) .$$

Finalement, on obtient le résultat suivant :

<u>THEOREME</u> (2 - 10) <u>Soit</u> K <u>un compact de</u> $\underline{\underline{R}}^n$

a) <u>Pour tout</u> $k \geqslant 0$, <u>l'accouplement défini par</u> (2 - 4) ....(2 - 9)

$$H_K^k(\mathcal{E}^M) \times \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

<u>est séparément continu et met en dualité les séparés associés.</u>

b) <u>Pour que</u> $H_K^k(\mathcal{E}^M)$ <u>soit séparé, il faut et il suffit que</u> $\mathrm{Tor}_{k-1}(\hat{M}, \mathcal{D}'(K))$ <u>soit séparé</u> (cette condition étant vide par définition si $k = 0$).

3 - QUELQUES CONSIDERATIONS VECTORIELLES TOPOLOGIQUES.

A - Nous allons étudier la topologie de $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(K))$. Pour cela remarquons que si U désigne un ouvert, on a un isomorphisme algébrique

$$\mathcal{D}'(K) \simeq \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{D}'(U)$$

d'où un isomorphisme algébrique

$$(3-1) \quad \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) \simeq \varinjlim_{U \supset K} \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(U)).$$

Si maintenant L est un voisinage compact de K , on considère le dual de $\mathcal{D}(L)$, noté $\widetilde{\mathcal{D}(L)}'$; si $L \subset U$, on a des applications de restriction évidentes

$$\mathcal{D}'(U) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}(L)}' \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathring{L})$$

Donc on a encore

$$(3-2) \quad \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) \simeq \varinjlim_{\mathring{L} \supset K} \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \widetilde{\mathcal{D}(L)}')$$

Nous munirons $\widetilde{\mathcal{D}(L)}'$ de sa topologie de dual fort de $\mathcal{D}(L)$; c'est donc un espace $(\mathcal{D}\mathcal{F})$; comme au paragraphe 2, les $\mathrm{Tor}_k\ (\hat{M}, \widetilde{\mathcal{D}(L)}')$ sont alors munis de topologies d'espaces $(q - \mathcal{D}\mathcal{F})$ et leur limite inductive de la topologie de "limite inductive localement convexe". On a alors le résultat suivant :

<u>Proposition</u> (3 - 3) <u>L'isomorphisme</u> (3 - 2) <u>est un isomorphisme topologique, lorsque le premier membre est muni de la topologie définie au paragraphe</u> 2, <u>et le second de celle qui vient d'être définie</u>.

Nous nous bornerons à établir ce résultat pour $k \geqslant 2$, en laissant au lecteur le soin d'examiner les cas $k = 0, 1$.

Montrons d'abord que l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_k\ (\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) = \varinjlim_{\overset{\circ}{L} \supset K} \mathrm{Tor}_k\ (\hat{M}, \mathcal{D}'(L))$$

est un isomorphisme vectoriel topologique lorsqu'on munit le second membre de la topologie de limite inductive localement convexe. Posant $\Omega_L = \underline{\underline{R}}^n - L$, cela revient, par définition à établir l'isomorphisme vectoriel topologique

$$\mathrm{Tor}_{k-1}\ (\hat{M}, \mathcal{E}'(\Omega)) \simeq \varinjlim_{\overset{\circ}{L} \supset K} \mathrm{Tor}_{k-1}\ (\hat{M}, \mathcal{E}'(\Omega_L))$$

Pour cela, désignons par $N_{k-1}(\Omega)$ le noyau de l'application

$$\mathcal{E}'(\Omega)^{p_{k-1}} \xrightarrow{\hat{P}^*_{k-1}} \mathcal{E}'(\Omega)^{p_{k-2}}$$

muni de la topologie induite par $\mathcal{E}'(\Omega)^{p_{k-1}}$, et définissons de même $N_{k-1}(\Omega_L)$ on a évidemment une application continue

$$\varinjlim_{\overset{\circ}{L} \supset K} N_{k-1}(\Omega_L) \longrightarrow N_{k-1}(\Omega)$$

qui est un isomorphisme algébrique. Comme $\mathcal{E}(\Omega)$ est un espace $(\mathcal{F})$ de SCHWARTZ, c'est encore un isomorphisme topologique (cf (5), théorème 12 et théorème 3). En passant au quotient, on trouve facilement le résultat cherché.

Pour établir (3 - 3), il suffit maintenant de démontrer ceci :

a) l'application $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(L)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \widetilde{\mathcal{D}(L)'})$ est continue

b) si $L' \subset \mathring{L}$, l'application $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \widetilde{\mathcal{D}(L)'}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(L'))$ est continue.

Ces deux faits résultent facilement du lemme suivant (détails laissés au lecteur)

<u>Lemme</u> (3 -4) <u>Soit</u> E <u>un espace</u> $(q - \mathcal{F})$ <u>dont le séparé associé est complètement réflexif</u>, E' <u>un espace</u> $(q - \mathcal{DF})$, <u>et</u> α <u>une forme bilinéaire séparément continue</u> $E \times E' \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ <u>induisant une dualité entre les séparés associés</u>. <u>Soit</u> (F, F', β) <u>un autre système vérifiant les mêmes hypothèses</u> ; <u>soit</u> u <u>une application linéaire</u> $E \longrightarrow F$ <u>et</u> u' <u>une application linéaire</u> $E' \longrightarrow F'$ <u>transposées l'une de l'autre</u> i.e. <u>vérifiant</u> $\forall e \in E, \forall f' \in F' \quad \beta(u(e), f') = \alpha(e, u'(f'))$.
<u>Alors</u> u <u>et</u> u' <u>sont continues</u>.

Montrons d'abord ceci : si $e \in E$ est adhérent à 0, $u(e)$ est adhérent à 0. En effet, on a alors, $\forall f \in F : \alpha(e, f) = 0$ et ceci caractérise l'adhérence de 0. Pour tout $f' \in F'$, on a donc $\beta(u(e), f') = \alpha(e, u'(f')) = 0$, d'où le résultat. On voit de même que, si $f' \in \overline{0}$, on a $u'(f') \in \overline{0}$.

Pour achever la démonstration, il suffit de démontrer que les applications $\tilde{u}$ et $\widetilde{u'}$ déduites de u et u' par passage aux séparés associés sont continues. Or, elles sont transposées l'une de l'autre, donc faiblement continues. Donc (théorème du graphe fermé) $\tilde{u}$ est continue ; et, par conséquent, $\widetilde{u'}$ est aussi continue. (En fait, l'hypothèse "complètement réflexif" n'est intervenue que parce qu'on sup-

-posait chacun des séparés associés $\widetilde{E}$, $\widetilde{E}'$ dual fort de l'autre. Il suffirait en fait de supposer que E est un espace $(q-\mathcal{F})$ et que $\widetilde{E}'$ est le dual de $\widetilde{E}$ et de faire les mêmes hypothèses sur F et F').

REMARQUE (3 - 5) Prenons $M = A$; on voit immédiatement que la topologie qu'on a mise sur $\mathcal{D}'(K) \simeq A \otimes \mathcal{D}'(K)$ admet $\widetilde{\mathcal{D}(K)'}$ pour séparé associé (donc n'est jamais séparée elle-même). On pourrait penser à topologiser $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(K))$ en le considérant comme le k-ième groupe de cohomologie de la suite exacte déduite de (2 - 1) par application de $\cdot \otimes \mathcal{D}'(K)$, et en utilisant la topologie précédente sur $\mathcal{D}'(K)$. On voit facilement que l'on obtient ainsi une topologie plus faible que celle que nous avons précédemment obtenue [utiliser le lemme précédent ; l'application "transposée" à considérer sera la suivante, que nous laissons au lecteur le soin de définir

$$\mathrm{Ext}^k(M, \mathcal{D}(K)) \longrightarrow H^k_K(\mathcal{E}^M) \ ]$$

Des exemples simples montrent que cette seconde topologie est en général strictement plus faible que la première. Par exemple, si K est un point, le séparé associé à $\mathrm{Tor}_k(M, \mathcal{D}'(K)$ pour la seconde topologie est toujours 0, alors que pour la première, cet espace est séparé si p. ex. M est elliptique (c.f. paragraphe 4).

B - En vue d'étudier l'accouplement (1 - 7), nous allons topologiser $\mathrm{Hom}(M, \mathcal{D}'(K)$; pour cela, L étant un compact vérifiant $\mathring{L} \supset K$, nous considérons la suite exacte déduite de (2 - 1) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(M, \widetilde{\mathcal{D}(L)'}) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}(L)'}^{\,p_o} \xrightarrow{P_1} \mathcal{D}(L)'^{\,p_1}$$

(naturellement, si nous prolongions cette suite, elle ne serait plus exacte, et conduirait à des Ext que nous n'étudierons pas ici).

On met sur $\mathrm{Hom}\,(M, \widetilde{\mathcal{D}(L)'})$ la topologie de sous espace de $\widetilde{\mathcal{D}(L)'}^{\,p_o}$; c'est donc un espace $(\mathcal{D}F)$ (séparé) ; et on met sur $\mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{D}'(K))$ la topologie localement convexe déduite de l'isomorphisme algébrique

(3 - 7) $$\mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{D}'(K)) = \varinjlim_{\overset{\circ}{L} \supset K} \mathrm{Hom}\,(M, \widetilde{\mathcal{D}(L)'}).$$

On peut probablement démontrer que $\mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{D}'(K))$, muni de cette topologie, est un espace $(q - \mathcal{D}F)$ (nous le vérifierons en tout cas au prochain paragraphe lorsque K est convexe, et lorsque M est un module de torsion, ou bien est sans torsion). Ce qui nous importe ici pour les applications est le résultat suivant :

<u>THEOREME</u> (3 - 8) <u>L'espace</u> $\mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{D}'(K))$ <u>est séparé si et seulement si</u> M <u>est elliptique</u>

(Rappelons que M est elliptique si, pour tout ouvert Ω, le noyau de l'application $P_1 : \mathcal{E}(\Omega)^{p_o} \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^{p_1}$ est formé de fonctions analytiques ; pour que M soit elliptique, il faut et il suffit que le support de M n'ait pas de points réels à l'infini ([11], [13])).

Tout d'abord, si M est elliptique, le résultat est bien connu ; rappelons-en rapidement la démonstration :

On a visiblement un homorphisme topologique (U ouvert)

$$\mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{D}'(K)) \simeq \varinjlim_{U \supset K} \mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{D}'(U))$$

Mais, M étant elliptique, est à fortiori hypoelliptique, d'où un isomorphisme topologique

$$\mathrm{Hom}\ (M, \mathcal{D}'(K)) \simeq \varinjlim_{U \supset K} \mathrm{Hom}\ (M, \mathcal{E}(U))$$

(en particulier les éléments de $\mathrm{Hom}\ (M, \mathcal{D}'(K))$ sont des germes sur K de fonctions indéfiniment dérivables, donc analytiques).
Il en résulte que si a est un point de K, $\hat{M} \otimes \mathcal{E}'(a)$ s'envoie dans l'espace des formes linéaires continues sur $\mathrm{Hom}\ (M, \mathcal{D}'(K))$. Prenons alors $f \in \mathrm{Hom}(M, \mathcal{D}'(K))$ dire que, $\forall a \in K$, ces formes linéaires annulent f signifie que f est nul ainsi que toutes ses dérivées sur K. Par prolongement analytique, f est donc nul.

Réciproquement, supposons que M ne soit pas elliptique. Il existe alors (9) (13) un $f \in \mathrm{Hom}\ (M, \mathcal{D}'(\underline{\underline{R}}^n))$ dont le support rencontre K, mais est contenu dans un demi-espace P vérifiant $\overset{\circ}{P} \cap K = \emptyset$. L'image $\bar{f}$ de f dans $\mathrm{Hom}\ (M, \mathcal{D}'(K))$ n'est donc pas nulle ; mais f est limite dans $\mathrm{Hom}\ (M, \mathcal{D}'(R^n))$ d'une suite de ses translatées dont le support ne rencontre pas K. On en déduit aussitôt que toute forme linéaire continue sur $\mathrm{Hom}(M, \mathcal{D}'(K))$ annule f ; donc f est adhérent à 0. C.Q.F.D.

4 - CAS OU K EST CONVEXE.

Nous supposons maintenant K convexe. Je dis qu' alors l'homorphisme canonique (algébrique)

$$(4-1) \qquad M \otimes \mathcal{D}'(K) \longrightarrow \mathrm{Hom}\ (\mathrm{Hom}\ (M, A), \mathcal{D}'(K))$$

est un isomorphisme. En effet, reprenons la résolution (2 - 1) de M ; par application de Hom (., A), on trouve une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\ (M, A) \longrightarrow A^{p_0} \xrightarrow{P_1} A^{p_1}$$

et par application de $\mathrm{Hom}\,(\cdot, \mathcal{D}'(K))$ on trouve, parce que $\mathcal{D}'(K)$ est injectif (12), la suite exacte

$$\mathcal{D}'(K)^{p_1} \xrightarrow{p_1^*} \mathcal{D}'(K)^{p_0} \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}(M, A), \mathcal{D}'(K) \longrightarrow 0$$

comparant avec la suite exacte déduite de (2 - 1) par application de $\cdot \otimes \mathcal{D}'(K)$, on trouve le résultat cherché.

Dans (4 - 1), considérons les deux membres comme des foncteurs en M ; prenant les foncteurs dérivés, il vient en utilisant encore l'injectivité de $\mathcal{D}'(K)$, des isomorphismes :

$$(4-2) \qquad \mathrm{Tor}_k\,(M, \mathcal{D}'(K)) \simeq \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}(M, A), \mathcal{D}'(K)) \qquad (k \geqslant 0)$$

Compte tenu du théorème (2 - 10), nous avons donc bien obtenu l'accouplement (1 - 7) par une autre méthode (le lecteur vérifiera que c'est bien le même). Au point de vue topologique, on a le résultat suivant.

THEOREME (4 - 3) <u>Les isomorphismes</u> (4 - 2) <u>sont topologiques</u> (<u>lorsque le premier terme est muni de la topologie définie au paragraphe</u> 2, <u>et le second de la topologie définie au paragraphe</u> 3.B).

La proposition (3 - 3) et la définition (3 - 7) nous ramènent à comparer deux limites inductives : prenons L et L' convexes avec $K \subset \overset{\circ}{L'}$, $L' \subset \overset{\circ}{L}$; en utilisant l'isomorphisme (4 - 2) avec K remplacé par L' et l'homomorphisme de restriction $\widetilde{\mathcal{D}(L)}' \longrightarrow \mathcal{D}'(L') \text{ --- } \widetilde{\mathcal{D}(L')}'$, on trouvera des applications

$$(4-4) \qquad \mathrm{Tor}_k\,(M, \widetilde{\mathcal{D}(L)}') \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Ext}^k\,(M, A), \widetilde{\mathcal{D}(L')}')$$

$$(4-5) \qquad \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Ext}^k\,(M, A), \widetilde{\mathcal{D}(L)}') \longrightarrow \mathrm{Tor}_k\,(M, \widetilde{\mathcal{D}(L')}')$$

et tout revient à démontrer qu'elles sont continues ; faisons-le par exemple pour la première ; d'après le lemme (3 - 4), il suffit de définir une application transposée

$$\mathrm{Ext}^k (M, A) \otimes \mathcal{D}(L') \longrightarrow \mathrm{Ext}^k (M, \mathcal{D}(L))$$

on l'obtient immédiatement en considérant l'application canonique

$$\mathcal{D}(L') \longrightarrow \mathcal{D}(\mathring{L}) \longrightarrow \mathcal{D}(L)$$

et en utilisant le fait que, puisque $\mathcal{D}(\mathring{L})$ est plat, on a

$$\mathrm{Ext}^k (M, \mathcal{D}(\mathring{L})) \simeq \mathrm{Ext}^k (M, A) \otimes \mathcal{D}(\mathring{L}) \qquad \text{(cf. introduction)}$$

Combinant les théorèmes (2 - 10), (3 -8) et (4 - 3), nous obtenons finalement le résultat suivant

THEOREME (4 - 4) Si K est un compact convexe :

a) l'accouplement (1 - 7) est séparément continu et met en dualité les séparés associés aux deux termes (dont les topologies ont été définies aux paragraphes 2 et 3).

b) $H^0_K(\mathcal{E}^M)$ est séparé, et, pour $k \geq 1$, les propriétés suivantes sont équivalentes

1 - $H^k_K(\mathcal{E}^M)$ est séparé

2 - $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^{k-1}(M, A), \mathcal{D}'(K))$ est séparé

3 - $\mathrm{Ext}^{k-1}(M, A)$ est elliptique.

REMARQUE (4 - 5) Pour $k = 1$, les conditions précédentes signifient que M est de ~~sans~~ torsion (ou si l'on préfère, que c'est "un système surdéterminé").

En effet $\mathrm{Hom}\,(M, A)$ est toujours sans torsion, et un module elliptique est un module de torsion, donc on doit avoir $\mathrm{Hom}\,(M, A) = 0$.

REMARQUE (4 - 6) Dans le cas où K est un compact quelconque et où $F = \mathcal{E}^M$ on peut voir par dualité que le noyau de l'application (1 - 6) est adhérent à 0 dans $H^k_K(\mathcal{E}^M)$. Il en résulte que, si $H^k_K(\mathcal{E}^M)$ est séparé, (1 - 6) est un isomorphisme. D'autre partt, lorsque K est convexe, on peut voir que le noyau de (1 - 6) <u>coincide</u> avec l'adhérence de 0 dans $H^k_K(\mathcal{E}^M)$, et que, par conséquent, (1 - 6) est bijectif <u>si et seulement si</u> $H^k_K(\mathcal{E}^M)$ est séparé.

REMARQUE (4 - 7) Soient K et L deux compacts avec $K \subset L$. Considérons l'application $H^k_K(\mathcal{E}^M) \longrightarrow H^k_L(\mathcal{E}^M)$ (déduite de l'injection évidente $H^0_K(\cdot) \longrightarrow H^0_L(\cdot)$ par passage aux foncteurs dérivés. Pour que l'image de cette application soit dense, il faut et il suffit que la "transposée" $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(L)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathcal{D}'(K))$ ait un noyau adhérent à 0 . Supposons en particulier K et L convexes; en utilisant l'isomorphisme (4 - 3), on voit que ceci aura lieu si $\mathrm{Ext}^k(M, A)$ est elliptique. En traduisant le résultat précédent au moyen des isomorphismes (2 - 5) et (2 - 6), on en déduit un théorème d'approximation dans Ω qui généralise des théorèmes connus du type de Runge.

5 - EXEMPLES

<u>Exemple 1</u> . Soit $P \in A$, $P \neq 0$. Prenons $M = A/AP$. On a une résolution de M :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{P} A \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

d'où immédiatement $\mathrm{Ext}^1(M, A) \simeq M$. D'autre part $\mathcal{E}^M$ est ici le faisceau des germes de solutions de l'équation $Pf = 0$. On trouve alors ceci (tout est nul pour $k > 2$).

A) $\begin{cases} H^{0}_{K}(\mathcal{E}^{M}) = 0 \\ H^{1}_{K}(\mathcal{E}^{M}) \simeq \operatorname{coker} \{ \mathcal{E}^{M}(\underline{R}^{n}) \longrightarrow \mathcal{E}^{M}(\Omega) \} \\ H^{2}_{K}(\mathcal{E}^{M}) \simeq \mathcal{E}(\Omega) / P\, \mathcal{E}(\Omega) \end{cases}$

B) $\operatorname{Tor}_{0}(\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) = 0$; donc $H^{1}_{K}(\mathcal{E}^{M})$ est séparé (ce qui était évident à priori).

$\operatorname{Tor}_{1}(\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) = \operatorname{Hom}(\hat{M}, \mathcal{D}'(K))$ est séparé si et si seulement M est elliptique.

$\operatorname{Tor}_{2}(\hat{M}, \mathcal{D}'(K)) = 0$ Donc le séparé associé à $H^{2}_{K}(\mathcal{E}^{M})$ est nul (évident à priori).

Finalement on obtient les résultats suivants

C) $P\,\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ si et seulement si P est elliptique (cf. (9), chap. 3)

D) On a un accouplement $\mathcal{E}^{M}(\Omega) \times \operatorname{Hom}(\hat{M}, \mathcal{D}'(K))$, nul sur $\operatorname{im}\{\mathcal{E}^{M}(\underline{R}^{n}) \longrightarrow \mathcal{E}^{M}(\Omega)\}$ qui n'est autre que l'accouplement défini par la formule de Green. Voir une étude de ce genre de questions dans (6), par exemple.

Remarquons encore qu'ici, l'hypothèse " K convexe" est inutile, (on le voit en établissant directement les résultats précédents).

<u>Exemple 2</u> . Supposons M de torsion et $\operatorname{Ext}^{1}(M, A) = 0$.
Alors, si K est un compact convexe, on aura

$H^{0}_{K}(\mathcal{E}^{M}) = H^{1}_{K}(\mathcal{E}^{M}) = 0$. Autrement dit l'application

$\mathcal{E}^{M}(\underline{R}^{n}) \longrightarrow \mathcal{E}^{M}(\Omega)$ est bijective. Ici encore l'hypothèse "K convexe" est inutile, il suffirait que $\complement K$ n'ait pas de composantes connexes relativement compactes (i. e. soit connexe. Cette question est étudiée dans (3) (C'est d'ailleurs ce travail qui est à l'origine du présent exposé)

Remarquons que, dans (11) et (12), nous avions établi ceci : sous la seule hypothèse $\mathrm{Ext}^1 (M, A) = 0$, si U est un ouvert convexe relativement compact, l'application $\mathcal{E}^M (\underline{\underline{R}}^n) \longrightarrow \mathcal{E}^M (\underline{\underline{R}}^n - U)$ est surjective. L'hypothèse "M de torsion" permet ici de passer à la limite suivant les voisinages U de K.

<u>Exemple 3</u>. Supposons $\mathrm{Ext}^1 (M, A)$ elliptique et $\mathrm{Ext}^2 (M, A) = 0$. Pour K compact convexe, on a alors $H^2_K (\mathcal{E}^M) = 0$; autrement dit $\mathrm{Ext}^1 (M, \mathcal{E}(\Omega)) = 0$; donc (cf. (2 - 2)) tout $f \in \mathcal{E}(\Omega)^{p_1}$ vérifiant $P_2 f = 0$ est de la forme $P_1 g$, $g \in \mathcal{E}(\Omega)^{p_0}$

Le même phénomène se produit ici ainsi que dans l'exemple précédent : en supposant seulement $\mathrm{Ext}^2 (M, A) = 0$, on aurait ce résultat avec Ω remplacé par $\underline{\underline{R}}^n - U$; l'autre hypothèse permet le passage à la limite.

<u>Exemple 4</u>. Supposons M elliptique. Alors, tous les $\mathrm{Ext}^k (M, A)$ sont elliptiques (en effet, on sait que le support de $\mathrm{Ext}^k (M, A)$ est toujours contenu dans celui de M). Par conséquent, dans ce cas, tous les espaces intervenant dans le théorème (4 - 4) sont séparés.

Prenons en particulier $n = 2m$, et identifions $\underline{\underline{C}}^m$ à $\underline{\underline{R}}^n$ en posant $z_j = x_j + i\, x_{m+j}$ ($1 \leq j \leq m$) ; prenons pour M le quotient de A par l'idéal engendré par les $X_j + i\, X_{m+j}$; $\mathcal{E}^M$ s'identifie alors au faisceau des germes de fonctions holomorphes Θ.

On a (calcul immédiat) $\mathrm{Ext}^k (M, A) = 0$ si $k \neq m$, $\mathrm{Ext}^m (M, A) \simeq M$.
On trouve donc ici, pour K compact convexe

$$H^k_K(\mathcal{O}) = 0 \qquad \text{si} \quad k \neq m$$

$H^m_K(\mathcal{O})$ est séparé, et son dual est isomorphe à $\mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{D}'(K)) \simeq \mathcal{O}(K)$. Si maintenant F est un faisceau analytique cohérent au voisinage de K, on trouve en prenant une résolution libre de F, une dualité

$$H^k_K(F) \times \mathrm{Ext}^{m-k}(K; F, \mathcal{O}) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

(en fait, il suffirait ici de supposer que K est un compact possédant un système fondamental de voisinages ouverts d'holomorphie). Ces résultats sont dus à FRENKEL (4) et GROTHENDIECK (non publié). Comparer avec le cas "algébrique", traité dans (8), et avec certains résultats de ANDREOTTI - GRAUERT (1).

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. ANDREOTTI et H. GRAUERT, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962) p. 193 - 259 .

(2) J. DIEUDONNE et L. SCHWARTZ, La dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{LF})$, Ann. Inst. Fourier (1949) p. 61 -101 .

(3) L. EHRENPREIS, A new proof and extension of Hartog's theorem, Bull. A.M.S. 67 - 5 (1961) p. 507 - 509 .

(4) J. FRENKEL, Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. Math. France 85 (1957) p. 135 - 230 .

(5) A. GROTHENDIECK, Sur les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{LF})$, Summa Brasil. Math. 3 (1954) p. 57 - 123 .

(6) A. GROTHENDIECK, Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles. Journal Anal. Math. Jérusalem II (1952/53) p. 243 - 280 .

(7) A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohokû Math. Journal (1957) p. 120 - 221 .

(8) A. GROTHENDIECK, Local cohomology, notes by R. Hartshorne, Harvard University 1961 .

(9) L. HORMANDER, Linear partial differential operators, Springer 1963

(10) B. MALGRANGE, Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire J. Leray 1961/62 et Colloque sur les équations aux dérivées partielles, C.N.R.S. Paris 1962 .

(11) B. MALGRANGE, Sur les systèmes différentiels à coefficients constants (suite) Séminaire J. Leray 1961/62 .

(12) B. MALGRANGE, Systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Bourbaki, décembre 1962 .

(13) S. MATSUURA, On general systems of partial differential operators with constant coefficients, Journal Math. Soc. Japan 13 - 1 (1961) p. 94 - 103 .

(14) J.P. SERRE, Un théorème de dualité, Comm. Math. Helvet. 29 (1955) p. 9 - 26 .