Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jindřich Nečas

Application de l'égalité de Rellich aux problèmes aux limites

Séminaire Jean Leray (1962-1963), p. 143-167
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1962-1963____143_0>

APPLICATION DE L'ÉGALITE DE RELLICH AUX PROBLÈMES AUX LIMITES

par

Jindřich NEČAS (Prague)

Introduction

On considère les domaines bornés avec frontières lipschitziennes et les opérateurs elliptiques autoadjoints du deuxième ordre, du quatrième ordre, ainsi que les systèmes elliptiques du deuxième ordre. En utilisant les égalités de Rellich (cf. [2], [7], [14]), on obtient des inégalités qui expriment la régularité de la solution au voisinage de la frontière. Par dualité on résout alors les problèmes aux limites pour des données plus générales que celles admissibles pour la méthode variationnelle.

Voici un résultat typique : soit A l'opérateur du deuxième ordre, soit u la solution du problème de Dirichlet $Au = f$ dans Ω, $u = 0$ sur $\dot{\Omega}$, la frontière de Ω. Alors on a l'inégalité :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{L_2(\dot{\Omega})} \leq \text{const} \left| f \right|_{L_2(\Omega)} ,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée selon la conormale.

Soit v la solution du problème de Dirichlet $Av = 0$ dans Ω, $v = h$ sur $\dot{\Omega}$. On a l'inégalité duale :

$$\left| v \right|_{L_2(\Omega)} \leq \text{const} \left| h \right|_{L_2(\dot{\Omega})} ,$$

d'où la possibilité de prendre pour le problème de Dirichlet h de carré sommable sur la frontière.

§ 1. L'opérateur du deuxième ordre

1. Notations.

Ω signifie dans la suite un domaine borné de frontière lipschitzienne $\dot{\Omega}$ qui est une variété fermée de dimension $n-1$ dans l'espace euclidien E_n, Ω étant d'un coté de $\dot{\Omega}$.

On suppose qu'il existe : m systèmes des cartes, soient $[x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn-1}, x_{rn}]$, $r = 1, 2, \dots, m$, notées $[X_r, X_{rn}]$, de sorte qu'on peut représenter tout point de $\dot{\Omega}$ sous la forme $[X_r, a_r(X_r)]$. a_r, $r = 1, 2, \dots, m$ est une fonction lipschitzienne dans la boule

$$\Delta_r = |X_r| < \alpha \ (\forall X_r, Y_r \in \Delta_r \Rightarrow |a_r(X_r) - a_r(Y_r)| \leq c\,|X_r - Y_r|^{(1)}.$$

On désigne par $\mathcal{N}^{(0),1}$ l'ensemble des domaines de ce type, par $\mathcal{N}^{(\infty)}$ le sousensemble de $\mathcal{N}^{(0),1}$ des domaines de frontières indéfiniment différentiables.

LEMME 1.1. Soit $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}$.

$\exists\, \bar{\Omega}_s \subset \Omega$, $\Omega_s \in \mathcal{N}^{(\infty)}$, $\dot{\Omega}_s$ sont représentables dans les cartes $[X_r, x_{rn}]$, $r = 1, 2, \dots, m$ par $[X_r, a_{rs}(X_r)]$ et on a

$$\forall X_r, Y_r \in \Delta_r \Longrightarrow |a_{rs}(X_r) - a_{rs}(Y_r)| \leq c\,|X_r - Y_r| \quad \text{(c ne dépend pas de } s\text{)},$$

$$\lim_{s\to\infty} \Big(\sup_{X_r \in \Delta_r} |a_{rs}(X_r) - a_r(X_r)| \Big) = 0,$$

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Delta_r} \left[\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_{ri}}(X_r) - \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}(X_r) \right]^2 dX_r = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Pour la démonstration cf. [9].

---

(1) On désigne dans la suite la plupart des constantes numériques par le même symbole.

On désigne par $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles, continues avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k dans la fermeture $\bar{\Omega}$ de Ω, par $C^{(k),\mu}(\Omega)$, $0 < \mu < 1$ le sous-espace de $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ des fonctions, dont les k-ièmes dérivées sont μ-höldériennes dans $\bar{\Omega}$.

Par $\mathcal{D}(\Omega)$ on désigne le sous-espace de $C^{(\infty)}(\bar{\Omega})$ des fonctions à support compact dans Ω.

Par $W_p^{(k)}(\Omega)$ on désigne la fermeture de $C^{(\infty)}(\bar{\Omega})$ pour la norme

$$\left|u\right|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \Big(\sum_{|i| \leq k} \int_\Omega \left|D^i u\right|^p dX\Big)^{1/p} \text{ (1)}$$

et par $\overset{o}{W}{}_p^{(k)}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans cette norme. On suppose $1 < p$.

On désigne par $W_q^{(-k)}(\Omega)$ le dual de $\overset{o}{W}{}_p^{(k)}(\Omega)$ où $(1/q) + (1/p) = 1$.

On considère l'opérateur elliptique du deuxième ordre, autoadjoint A :

$$A = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b \tag{1.1}$$

en supposant $a_{ij} \in C^{(0),1}(\bar{\Omega})$, b mesurable, bornée sur Ω,

$$a_{ij} = a_{ij}, \quad [\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n] \in E_n \Rightarrow a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad b \geq 0. \text{ (2)}$$

2. Problème de Dirichlet homogène (3).

On se donne $f \in L_2(\Omega)$; soit u la solution du problème de Dirichlet $Au = f$ dans Ω, $u = 0$ sur $\dot{\Omega}$; soient u_s les solutions du problème de

(1) $D^i u = \dfrac{\partial^{i_1+i_2+\dots i_n} u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\partial x_3^{i_3}\dots\partial x_n^{i_n}}$

(2) La convention usuelle de sommation est utilisée.

(3) Pour les détails cf. [6].

Dirichlet $Au_s = f$ dans Ω_s et $u_s = 0$ sur $\dot{\Omega}_s$(1).

L'opérateur A est V-elliptique avec $V = \overset{o}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$. L'existence et l'unicité de la solution dans l'espace V est garantie. Pour les détails cf. [5].

On a :

(2.1) $$\left| u_s \right|_{W_2^{(2)}(\Omega_s)} \leq c(s) \left| f \right|_{L_2(\Omega_s)}. \quad (\text{Cf. } [13]).$$

Posons $u_s = 0$ hors de Ω_s. On a

(2.2) $$u_s \to u \text{ dans } W_2^{(1)}(\Omega) \quad . \quad (\text{Cf. } [4]) .$$

Soit $[h_1, h_2, \ldots h_n]$ un vecteur avec composants de $C^{(1)}(\overline{\Omega})$. On a presque partout

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[(h_k a_{ij} - 2h_i a_{kj})\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right] = 2h_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i} Au_s - 2h_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i} bu_s +$$
$$+ \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k} a_{ij} - 2\frac{\partial h_i}{\partial x_k} a_{kj} + h_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_j} .$$

Par la formule de Green on obtient :

(2.3) $$\int_{\dot{\Omega}_s} (h_k a_{ij} - 2h_i a_{kj})\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\nu_k dS = \int_{\Omega_s}\Big(2h_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i} f - 2h_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i} bu_s +$$
$$+ b_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\Big)dX.$$

Ici $b_{ij} = \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k} a_{ij} - 2\frac{\partial h_i}{\partial x_k} a_{kj} + h_k\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right)$, $[\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n]$ est le vecteur de la normale extérieure.

On nomme (2.3) l'égalité de Rellich.

---

(1) Cf. lemme 1.1.

Naturellement, on prend $\frac{\partial u_s}{\partial x_i}$ sur $\dot{\Omega}_s$ au sens des traces (cf. [1]). Le vecteur $(h_i a_{kj} - h_k a_{ij})\nu_k$, j fixe, est orthogonal à la normale, alors $(h_i a_{kj} - h_k a_{ij})\nu_k \frac{\partial u_s}{\partial x_i} = 0$. On met l'intégrale sur $\dot{\Omega}_s$ de (2.3) sous la forme

$$-\int_{\dot{\Omega}_s} h_k \nu_k a_{ij} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} dS.$$

Pour la suite Ω_s on peut trouver $[h_1, h_2, \dots h_n]$ de sorte que $h_i \nu_i \geqslant c > 0$ (cf. [6]), alors en désignant par $\frac{\partial u_s}{\partial \nu} = a_{ij} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \nu_i$ (conormale), on tire de (2.3) :

$$\left|\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right|_{L_2(\dot{\Omega}_s)} \leqslant c \left| f \right|_{L_2(\Omega_s)}, \tag{2.4}$$

où c ne dépend pas de s.

Considérons $\frac{\partial u_s}{\partial \nu}$ par projection comme les éléments de $L_2(\Delta_r)$. Il existe $\beta > 0$ de sorte que les points

$$[X_r, x_{rn}], r = 1,2,\dots m, X_r \in \Delta_r, a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)$$

sont dans Ω et les points

$$[X_r, x_{rn}],\ X_r \in \Delta_r, a_r(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$$

sont hors de $\overline{\Omega}$. Soit $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ à support dans l'ensemble $X_r \in \Delta_r, a_r(X_r) - \beta < x_{rn} \leqslant a_r(X_r)$. On a :

$$\int_{\Omega_s} vf dX = -\int_{\dot{\Omega}_s} v \frac{\partial u_s}{\partial \nu} dS + \int_{\Omega_s} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} + bvu_s\right) dX .$$

En écrivant

$$\int_{\dot{\Omega}_s} v \frac{\partial u_s}{\partial \nu} dS = \int_{\Delta_r} v \frac{\partial u_s}{\partial \nu} p_s \, dX_r$$

on tire de (2.2), en tenant compte du lemme 1.1, que

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Delta_r} v\, p \frac{\partial u_s}{\partial \nu}\, dX_r$$

existe. On peut construire v de manière qu'au voisinage de $\dot{\Omega}$ v ne dépend pas de x_{rm}. L'ensemble des fonctions vp ainsi construites étant dense dans $L_2(\Delta_r)$, on obtient en tenant compte de (2.4) :

$$\frac{\partial u_s}{\partial \nu} \rightharpoonup w_r \quad \text{dans} \quad L_2(\Delta_r). \tag{2.5}$$

Désignons par U_r les ensembles $X_r \in \Delta_r, a_r(X_r) - \beta < x_{rm} < a_r(X_r) + \beta$. On peut trouver $\varphi_r \in \mathcal{D}(U_r)$, $0 \leqslant \varphi_r \leqslant 1$ de sorte que

$$X \in \Omega \Rightarrow \sum_{r=1}^{m} \varphi_r(X) = 1.$$

On pose

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{r=1}^{m} w_r \varphi_r . \tag{2.6}$$

On a ainsi démontré :

THÉORÈME 1. Il existe exactement une application T de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\dot{\Omega})$ linéaire et bornée, définie par $T(f) = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, de sorte que $\forall\, v \in W_2^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} vf dX = - \int_{\dot{\Omega}} v \frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_{\Omega} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + bvu\right) dX . \tag{2.7}$$

On a $\frac{\partial u_s}{\partial \nu} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial \nu}$ dans $L_2(\Delta_r)$, $r = 1, 2, \ldots m$.

Remarque 2.1.

On peut déduire du théorème 1 les différents théorèmes sur l'unicité. En voici un : soit $v \in \overset{o}{W}{}^{(1)}_{\frac{2}{n+1}}(\Omega)$, $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ et soit $Av = 0$ dans Ω au sens faible $(\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega (a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + b\varphi v)dX = 0)$. alors $v = 0$.

Pour le voir on utilise le fait que $v \in W^{(1)}_{\frac{2}{n+1}}(\Omega) \Rightarrow \lim_{s\to\infty} \int_{\dot\Omega} v^2 dS = 0$.

(cf. [1] et que $v \in W_2^{(1)}(\Omega')$ pour chaque $\Omega' \subset \Omega$, cf. [13]).

<u>Remarque</u> 2.2.

L'assertion de la remarque précédente est en défaut pour

$$v \in \overset{o}{W}{}^{(1)}_p(\Omega),\quad \Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}\ ,\ p < \frac{2n}{n+1}\ .$$

<u>Remarque</u> 2.3.

En général, f étant de $L_2(\Omega)$, $T(f)$ n'est pas dans $L_p(\dot\Omega)$, $p > 2$.

3. <u>Problème de Dirichlet non-homogène</u>.

Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. On désigne par $W_2^{(1)}(\dot\Omega)$ le sous-espace de $L_2(\dot\Omega)$ des fonctions, dont les projections sur Δ_r appartiennent à $W_2^{(1)}(\Delta_r)$, muni de la norme

$$|g|_{W_2^{(1)}(\dot\Omega)} = (\sum_{r=1}^m |g|^2_{W_2^{(1)}(\Delta_r)})^{1/2}\ .$$

Soit $f \in L_2(\Omega)$, $g \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Soit u la solution du problème de Dirichlet $Au = f$ dans Ω , $u = g$ sur $\dot\Omega$. g étant dans $W_2^{(1)}(\dot\Omega)$, on peut la prolonger sur Ω en une fonction de $W_2^{(1)}(\Omega)$; alors la méthode variationnelle (cf. [5]) nous donne une solution unique.

Par le procédé de 2. on démontre

THÉORÈME 2. Il existe exactement une application linéaire et bornée, soit T, de $L_2(\Omega)\times W_2^{(1)}(\dot\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$. En posant $T([f,g]) = \frac{\partial u}{\partial\nu}$ on a :

(3.1) $\int_\Omega vfdX = -\int_{\dot\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu}dS + \int_\Omega (a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + bvu)dX$. ($Au = f$ dans Ω , $u = g$ sur $\dot\Omega$).

Pour les détails cf. [10].

4. Problème de Dirichlet non-homogène, intégrale de Dirichlet non-bornée.

On désigne par $W_2^{(1/2)}(\Omega)$ l'espace des traces des fonctions de $W_2^{(1)}(\Omega)$. (Cf. [5]). On a pour $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}$

$$\overline{W_2^{(1/2)}(\dot{\Omega})} = L_2(\Omega) \quad \text{(cf. [6])}. \tag{4.1}$$

Soit $h \in W_2^{(1/2)}(\Omega)$ et $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$, $Av = 0$ dans Ω, $v = h$ sur $\dot{\Omega}$. On a

$$|v|_{L_2(\Omega)} \leq c|h|_{L_2(\dot{\Omega})} \cdot \tag{4.2}$$

En effet, en utilisant (2.7), on a

$$\int_\Omega vf dX = -\int_{\dot{\Omega}} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

En posant $f = v$ dans Ω on obtient

$$\int_\Omega v^2 dX = -\int_{\dot{\Omega}} hT(v) dS \leq |h|_{L_2(\dot{\Omega})} |T(v)|_{L_2(\dot{\Omega})} \leq c|h|_{L_2(\dot{\Omega})} |v|_{L_2(\Omega)}$$

en vertu du théorème 1, d'où (4.2).

On désigne par R l'application linéaire et bornée de $W_2^{(1/2)}(\dot{\Omega})$ dans $W_2^{(1)}(\Omega)$ définie par $R(h) = v$.

Alors (4.1) et (4.2) entraînent :

THÉORÈME 3. On peut prolonger R par continuité en une application linéaire et bornée de $L_2(\dot{\Omega})$ dans $L_2(\Omega)$.

Remarque 4.1.

Posant $R(h) = v$ on obtient la solution du problème de Dirichlet pour la condition aux limites de carré sommable sur $\dot{\Omega}$. Utilisant [13] on a

$v \in W_2^{(2)}(\Omega')$ pour $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, àlors $Av = 0$ presque partout dans Ω.

Pour les domaines strictement convexes, on obtient que R applique $L_2(\Omega)$ dans $W^{(1)}_{2,\rho}(\Omega)$, qui est le sous-espace de $L_2(\Omega)$ des fonctions pour lesquelles

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \rho \, dX < \infty .$$

Ici ρ est la distance du point générique de la frontière, les dérivées sont prises au sens des distributions. v étant dans $W^{(1)}_{2,\rho}(\Omega)$ et $Av = 0$, on démontre que v a une trace dans $L_2(\dot{\Omega})$. Pour ces questions, cf. [8].

Remarque 4.2.

R est aussi le prolongement de l'opérateur qui associe à une fonction continue sur $\dot{\Omega}$ la solution classique du problème de Dirichlet.

Remarque 4.3.

On ne peut pas prolonger R en une application linéaire et continue de $L_p(\dot{\Omega})$ dans n'importe quel espace topologique pour $p < 2$. ($\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$!)

5. Régularité de la solution au voisinage de la frontière.

LEMME 5.1. Soit $K \in \mathfrak{N}^{(\infty)}$. Alors l'opérateur A est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_p(K)$ sur $W^{(-1)}_p(K)$ pour $p > 1$.

Pour la démonstration cf. [3].

Supposons $\bar{\Omega} \subset K$, $K \in \mathfrak{N}^{(\infty)}$, A défini dans K et jouissant ici des propriétés exigées. On a :

THÉORÈME 4. L'application T peut être prolongée par continuité en une application linéaire et bornée de $L_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega) \times W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$ dans $L_2(\dot{\Omega})$.

Rappelons :

$$T([f,g]) = \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad f \in L_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega), \quad g \in W_2^{(1)}(\Omega), \quad Au = f \text{ dans } \Omega, \quad u = g \text{ sur } \dot{\Omega}.$$

On définit l'opérateur R sur le produit $W_2^{(-1)}(\Omega)\times L_2(\dot{\Omega})$ en posant $R([f,h]) = v$ où $f\in W_2^{(-1)}(\Omega)$, $h\in L_2(\dot{\Omega})$, $Av = f$ dans Ω, $v = h$ sur $\dot{\Omega}$. On pose $v = v_1 + v_2$, $Av_1 = f$ dans Ω, $v_1 = 0$ sur $\dot{\Omega}$ (pour trouver v_1 on utilise la méthode variationnelle, cf. [5]) et $R(h) = v_2$ d'après l'ancienne définition. R est alors une application linéaire et bornée de

$$W_2^{(-1)}(\Omega)\times L_2(\dot{\Omega})$$

dans $L_2(\Omega)$. On a :

THÉORÈME 5. (a) L'application R peut être prolongée par continuité en une application linéaire et bornée de $W_{\frac{2n}{n+1}}^{(-1)}(\Omega)\times W_2^{(0)}(\dot{\Omega})$ dans $L_{\frac{2n}{n-1}}(\Omega)$.

(b) L'application R transforme $W_{\frac{2n}{n+1}}^{(0)}(\Omega)\times W_2^{(1)}(\Omega)$ dans $W_{\frac{2n}{n-1}}^{(1)}(\Omega)$.

On commence par la démonstration du point (b) th. 5 : étant $h\in W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$, on peut la prolonger sur Ω en une fonction de $W_2^{(1)}(\Omega)$ de sorte que $h\in C^{(\infty)}(\bar{\Omega}_s)$ pour $s = 1, 2,\ldots$ (1) et que

(5.1) $$|h|_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega}_s)} \leqslant c|h|_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega})},$$

où c ne dépend pas de s.

Pour le moment on suppose $f\in L_2(\Omega)$. Soit $Au_s = f$ dans Ω_s, $u_s = h$ sur $\dot{\Omega}_s$, $Au_s = 0$ dans $K-\bar{\Omega}_s$, $u_s = h$ sur Ω_s, $u_s = 0$ sur $\dot{K}$. On a $u_s\in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(K)$. Pour $\varphi\in\mathcal{D}(K)$ on a en vertu du théorème 2 :

---

(1) Pour Ω_s cf. Lemme 1.1.

$$(5.2)\quad \int_K \left(a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_j} + b\,\varphi u_s\right)dX = \int_{\dot\Omega_s} \left(\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right)_{\Omega_s} \varphi\, dS + \int_{\Omega_s} f\varphi\, dX$$

$$+ \int_{\dot\Omega_s} \left(\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right)_{K-\bar\Omega_s} dS\,.$$

Tenant compte que $\overset{o}{W}{}^{(1)}_{\frac{2n}{n+1}}(K) \subset L_2(\dot\Omega_s)$ et $\overset{o}{W}{}^{(1)}_{\frac{2n}{n+1}}(K) \subset L_{\frac{2n}{n-1}}(K)$ algébriquement et topologiquement, l'expression à droite de (5.2) peut être prolongée par continuité en une fonctionnelle linéaire et bornée sur $\overset{o}{W}{}^{(1)}_{\frac{2n}{n-1}}(K)$. Alors il suit du lemme 5.1 :

$$(5.3)\quad |u_s|^2_{W^{(1)}_{\frac{2n}{n-1}}(\Omega_s)} \leqslant c\left[\left|\left(\frac{\partial u_s}{\partial\nu}\right)_{\Omega_s}\right|^2_{L_2(\dot\Omega_s)} + \left|\left(\frac{\partial u_s}{\partial\nu}\right)_{K-\bar\Omega_s}\right|^2_{L_2(\dot\Omega_s)} + |f|^2_{L_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega_s)}\right],$$

où c ne dépend pas de s. On tire de (2.3) :

$$(5.4)\quad \left|\left(\frac{\partial u_s}{\partial\nu}\right)_{K-\bar\Omega_s}\right|^2_{L_2(\dot\Omega_s)} + \left|\left(\frac{\partial u_s}{\partial\nu}\right)_{K-\bar\Omega_s}\right|^2$$

$$\leqslant c\left[|h|^2_{W^{(1)}_2(\dot\Omega_s)} + |f|_{L_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega_s)} \times |u_s|_{W^{(1)}_{\frac{2n}{n-1}}(\Omega_s)} + |f|^2_{L_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega_s)}\right]\,.$$

(5.1), (5.3) et (5.4) entraînent :

$$(5.5)\quad |u_s|_{W^{(1)}_{\frac{2n}{n-1}}(\Omega_s)} \leqslant c\left[|h|_{W^{(1)}_2(\dot\Omega)} + |f|_{L_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega)}\right],$$

où c ne dépend pas de s. En posant $u_s = h$ dans $\Omega - \Omega_s$, on a

$u_s \longrightarrow u$ dans $W_2^{(1)}(\Omega)$ pour n'importe quel s_o et utilisant encore une fois (5.5) on obtient (b).

Le théorème 4 découle immédiatement de (5.4), (5.5) et th. 2.

Pour démontrer (a) du th. 5, considérons $F \in W_2^{(-1)}(\Omega)$ et soit $Av = F$ dans Ω, $v = 0$ sur $\dot{\Omega}$. Soit $f \in L_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega)$, $Au = f$ dans Ω, $u = 0$ sur $\dot{\Omega}$. On a

$$\int_\Omega vf dX = \int_\Omega (a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + bvu) dX = F(u)$$

d'où en vertu de (b) :

$$(5.6) \qquad |v|_{L_{\frac{2n}{n-1}}(\Omega)} \leq c |F|_{W^{(-1)}_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega)} .$$

On a $\overline{W_2^{(-1)}(\Omega)} = W^{(-1)}_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega)$, alors (a) est démontré pour le sous-espace

$$W^{(-1)}_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega) \times \{0\}.$$

Le reste de la démonstration découle de (b) et de (2.7).

6. Problème de Neumann.

On se borne au cas $b \neq 0$. Le cas général avec exposé détaillé de ce qui va suivre dans 6 est contenu dans [10]. On utilise :

LEMME 6.1. Il existe des prolongements P_s de $W_2^{(1)}(\Omega_s)$ [5] dans $W_2^{(1)}(\Omega)$ de sorte que $|P_s| \leq c$, où c ne dépend pas de s.

Par le procédé de 2 on démontre :

THÉORÈME 6. Soit $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\dot{\Omega})$, u la solution du problème de Neumann $Au = f$ dans Ω, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sur $\dot{\Omega}$. Alors $u \in W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$ et on a

$$(6.1) \qquad |u|_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega})} \leq c\left[|f|_{L_2(\Omega)} + |g|_{L_2(\dot{\Omega})}\right].$$

Soit $h \in L_2(\dot{\Omega})$, v la solution du problème de Neumann $Av = 0$ dans Ω, $\frac{\partial v}{\partial \nu} = h$ sur $\dot{\Omega}$. Soit u du théorème 7 avec $g = 0$. On a

$$(6.2) \qquad \int_{\Omega} vf dX = \int_{\dot{\Omega}} hu dS ,$$

d'où

$$(6.3) \qquad |v|_{L_2(\Omega)} \leq c|h|_{W_2^{(-1)}(\Omega)} ,$$

où $W_2^{(-1)}(\dot{\Omega})$ est le dual de $W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$.

On désigne par Q l'application de $L_2(\dot{\Omega})$ dans $L_2(\Omega)$ en posant $Q(h) = v$. Tenant compte de ce que $\overline{L_2(\dot{\Omega})} = W_2^{(-1)}(\dot{\Omega})$, on obtient :

THÉORÈME 7. L'application Q peut être prolongée par continuité en une application linéaire et bornée de $W_2^{(-1)}(\dot{\Omega})$ dans $L_2(\Omega)$.

<u>Remarque</u> 6.1.

On démontre, comme dans 5, (6.1) avec $f \in L_{\frac{2n}{n+1}}(\Omega)$. $Au = f$ dans Ω avec $u \in W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$ et on obtient des théorèmes analogues aux théorèmes 4 et 5. Au contraire, on déduit de (3.1) que la fonction u qui y figure est la solution du problème de Neumann $Au = f$ dans Ω, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = T([f,g])$ sur $\dot{\Omega}$.

Remarque 6.2.

Soit $n = 2$ et désignons par M l'espace des mesures par rapport à l'arc. On a $M \subset W_2^{(-1)}(\dot{\Omega})$ algébriquement et topologiquement.

Remarque 6.3.

Les théorèmes 6 et 7 sont valables pour la solution du problème $Au = f$ dans Ω, $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = g$ sur $\dot{\Omega}$ avec $\sigma \in L_\infty(\dot{\Omega})$. On peut considérer aussi le problème mixte ; il faut prescrire le même type de condition aux limites sur chaque composante de $\dot{\Omega}$.

Soit $h, g \in L_2(\dot{\Omega})$, $Av = 0$ dans Ω, $\frac{\partial v}{\partial \nu} = h$ sur $\dot{\Omega}$, $Au = 0$ dans $\Omega \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sur $\dot{\Omega}$. On a :

(6.4) $$\int_{\dot{\Omega}} vg\,dS = \int_{\dot{\Omega}} hu\,dS .$$

De (6.1) et (6.4) on tire :

(6.5) $$|v|_{L_2(\dot{\Omega})} \leq c\,|h|_{W_2^{(-1)}(\dot{\Omega})} .$$

Remarque 6.4.

La solution du problème de Neumann $Av = 0$ dans Ω avec $\frac{\partial u}{\partial \nu} = h$, sur $\dot{\Omega}$, $h \in W_2^{(-1)}(\dot{\Omega})$ est la solution du problème de Dirichlet avec $Av = 0$ dans Ω, $v \in L_2(\dot{\Omega})$. Du théorème 2 on déduit le contraire.

§ 2. Système des équations du deuxième ordre

1. Problème de Dirichlet homogène.

On considère le système

(1.1) $$A_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial}{x_j}\right) + b, \quad i,j = 1, 2, \ldots, n, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots N,$$

$$a_{ij}^{\alpha\beta} \in C^{(0),1}(\bar{\Omega}), \quad b^{\alpha\beta} \in L_\infty(\Omega), \quad a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ji}^{\alpha\beta}, \quad a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ij}^{\beta\alpha} \text{ (1)}.$$

(1) Cette condition est restrictive. Néanmoins elle est valable pour le système de l'élasticité au cas général d'un corps non-homogène et anisotrope.

Le système (1.1) est supposé fortement elliptique :

(1.2) $\forall [\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n] \in E_n$, $[\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N] \in E_N$

$$\Rightarrow a_{ij}^{\alpha\beta} \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant c \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha^2 .$$

On suppose encore (1.3) : $b^{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant 0.$

Le système (1.1) est supposé elliptique pour le problème de Dirichlet :

(1.4) $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\alpha = 1, 2, \ldots N$

$$\Rightarrow \int_\Omega \left(a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} + b^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta\right) dX \geqslant c \sum_{\alpha=1}^{N} \left|\varphi_\alpha\right|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} .$$

<u>Remarque</u> 1.1.

(7.2) entraîne en général l'inégalité de Gårding :

$$\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega),\ \alpha = 1,\ 2, \ldots N$$

$$\Rightarrow \left(a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} + b^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta\right) dX \geqslant c \sum_{\alpha=1}^{N} \left|\varphi_\alpha\right|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)}$$

$$- \lambda \sum_{\alpha=1}^{N} \left|\varphi_\alpha\right|^2_{L_2(\Omega)} \quad \text{avec } \lambda \geqslant 0$$

assez grand. Si $a_{ij}^{\alpha\beta}$ sont constantes, on peut prendre $\lambda = 0$ en supposant (1.3).

Etant donnés des éléments u_α, $\alpha = 1, 2, \ldots N$, on note dans la suite $u = [u_1, u_2, \ldots u_N]$; quand $u_\alpha \in B$, on écrit $u \in [B]^N$. B étant un espace de Banach, on pose

$$|u|_{[B]^N} = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \left|u_\alpha\right|^2_B\right)^{1/2} .$$

On considère le problème de Dirichlet homogène : on se donne $f \in [L_2(\Omega)]^N$ et on cherche $u \in [\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)]^N$ de sorte que $A_\alpha u = f_\alpha$ dans Ω, $\alpha = 1, 2, \ldots N$. Par la méthode variationnelle on démontre que le problème a une solution unique (cf. [5]).

On utilise la technique de [14] : on répète presque mot pour mot le n°2 du § 1. En se servant du procédé $\Omega_s \longrightarrow \Omega$ 5) on obtient l'inégalité :

$$(7.5)\qquad \int_{\dot{\Omega}_s} a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha^s}{\partial x_i} \frac{\partial u_\beta^s}{\partial x_j} dS \leq c|f|^2_{[L_2(\Omega_s)]^N}$$

où c ne dépend pas de s; u^s est la solution du problème $A_\alpha u^s = f_\alpha$ dans Ω_s, $u_\alpha^s = 0$ sur $\dot{\Omega}_s$, $\alpha = 1, 2, \ldots N$.

L'exposé détaillé est contenu dans le travail [11]. On démontre ici par la méthode du travail [14] l'inégalité auxiliaire (2.1) pour les systèmes.

Posons
$$\left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\right)_\alpha = a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^s}{\partial x_j} \nu_i .$$

(7.5) n'entraîne pas en général l'inégalité (2.4). Pour la démontrer considérons la matrice inverse à $a_{ij}^{\alpha\beta} \nu_i \nu_j$. En la désignant $c^{\alpha\beta}$ on voit en vertu de (7.2) :

$$(7.6)\qquad \forall [\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N] \in E_N \Longrightarrow c^{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant c \sum_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha^2$$

où c ne dépend pas du point de $\dot{\Omega}_s$ et de s.

On a :
$$c^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\right)_\beta - a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha^s}{\partial x_i} \frac{\partial u_\beta^s}{\partial x_j} = 0 .$$

En effet :
$$c^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\right)_\beta - a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha^s}{\partial x_i} \frac{\partial u_\beta^s}{\partial x_j} = c^{\alpha\beta} a_{kl}^{\alpha\gamma} \frac{\partial u_\gamma^s}{\partial x_l} \nu_k a_{mn}^{\beta\delta} \frac{\partial u_\delta^s}{\partial x_n} \nu_m$$
$$- a_{nl}^{\delta\gamma} \frac{\partial u_\delta^s}{\partial x_n} \frac{\partial u_\gamma^s}{\partial x_l} .$$

Pour δ, γ, l fixes le vecteur $c^{\alpha\beta} a^{\alpha\gamma}_{kl} \nu_k a^{\beta\delta}_{mn} \nu_m - a^{\delta\gamma}_{nl}$ est orthogonal à la normale. Tenant compte de ce que $u^s_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots N$ sur $\dot{\Omega}_s$ on obtient l'assertion.

Alors il suit de (1.5)

$$(1.7) \qquad \int_{\dot{\Omega}_s} c^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\right)_\alpha \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\right)_\beta dS \leq c|f|^2_{[L_2(\Omega_s)]^N}$$

et en vertu de (1.6) :

$$(1.8) \qquad \left|\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\right|_{[L_2(\dot{\Omega}_s)]^N} \leq c|f|_{[L_2(\Omega_s)]^N}$$

où c ne dépend pas de s.

En modifiant d'une manière évidente 2 du § 1 on obtient le

THÉORÈME 1. Il existe exactement une application T de $[L_2(\Omega)]^N$ dans $[L_2(\dot{\Omega})]^N$ linéaire et bornée, soit $T(f) = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, de sorte que $v \in [W^{(1)}_2(\Omega)]^N \Longrightarrow$

$$(1.9) \qquad \int_\Omega v_\alpha f_\alpha dX = -\int_{\dot{\Omega}} v_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS + \int_\Omega \left(a^{\alpha\beta}_{ij} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} + b^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta\right) dX .$$

On a $\frac{\partial u^s}{\partial \nu} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}$ dans $[L_2(\Delta_r)]^N$, $r = 1, 2, \dots m$ [5].

2. Problème de Dirichlet non-homogène pour les systèmes

Soit $h \in [W^{(1/2)}_2(\dot{\Omega})]^N$, v la solution du problème de Dirichlet $A_\alpha v = 0$ dans Ω, $v_\alpha = h_\alpha$ sur $\dot{\Omega}$, $\alpha = 1, 2, \dots N$. L'existence et l'unicité de cette solution résulte de la méthode variationnelle (cf. [5]).

Définissons R, application de $[W^{(1/2)}_2(\dot{\Omega})]^N$ dans $[W^{(1)}_2(\Omega)]^N$, en posant $R(h) = v$. On tire de (1.9) :

THÉORÈME 2. On peut prolonger R par continuité en une application linéaire et bornée de $[L_2(\dot{\Omega})]^N$ dans $[L_2(\Omega)]^N$.

On obtient alors de cette manière la solution du problème de Dirichlet pour le système en question et les données de carré sommables.

Remarque 2.1.

On obtient ainsi la solution du problème de Dirichlet pour des données continues sur $\dot{\Omega}$. Pour $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, notre méthode est jusqu'à présent seule résolvant ce problème. Il n'y a pas d'analogue du procédé de Perron, le théorème sur maximum n'étant pas valable pour les systèmes.

§ 3. Une équation du quatrième ordre

L'exposition détaillée se trouve au travail [7].

1. L'inégalité de Rellich du deuxième ordre.

On considère l'opérateur :

(1.1) $$A = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(a_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b, \quad i,j,k,l, = 1,2,\dots n,$$

$$a_{ijkl} \in C^{(1),1}(\bar{\Omega}), \quad a_{ij} \in C^{(0),1}(\bar{\Omega}), \ b \in L_\infty(\Omega) ,$$

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \ a_{ij} = a_{ji} .$$

On suppose pour chaque matrice réelle, symétrique, soit $\{\xi_{ij}\}$:

(1.2) $$a_{ijkl}\,\xi_{ij}\,\xi_{kl} \geqslant c \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}^2 .$$

On suppose :

(1.3) $$\forall [\xi_1, \dots \xi_n] \in E_n \Rightarrow a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Soit $f \in L_2(\Omega)$, u la solution du problème de Dirichlet $Au = f$ dans Ω, $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\dot{\Omega}$; ici $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée selon la normale extérieure. Par la méthode variationnelle on trouve une solution unique (cf. [5]) dans $W_2^{(2)}(\Omega)$.

Soient u_s les solutions du problème de Dirichlet $Au_s = f$ dans Ω_s, $u_s = \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$ sur $\dot{\Omega}_s$. 5) On a :

(1.3) $$|u|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leq c|f|_{L_2(\Omega)} ,$$

(1.4) $$|u_s|_{W_2^{(2)}(\Omega_s)} \leq c|f|_{L_2(\Omega_s)}$$

où c ne dépend pas de s.

En posant $u_s = 0$ pour $X \in \Omega - \Omega_s$, on a $u_s \to u$ dans $W_2^{(2)}(\Omega)$. (Cf. [7]). On a (cf. [5]) :

(1.5) $$|u_s|_{W_2^{(4)}(\Omega_s)} \leqslant c(s)\,|f|_{L_2(\Omega_s)} .$$

Soit $[h_1, h_2, \dots h_n]$ un vecteur à composantes dans $C^{(2)}(\bar{\Omega})$. On a presque partout :

(1.6) $$\frac{\partial}{\partial x_m}(2h_i a_{mjkl} - h_m a_{ijkl}) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} =$$

$$= 2h_i a_{mjkl} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^3 u_s}{\partial x_m \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_m}(2h_i a_{mjkl} - h_m a_{ijkl}) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} .$$

Par la formule de Green, on obtient :

$$(1.7)\quad \int_{\dot{\Omega}_s} (2h_i a_{njkl} - h_n a_{ijkl}) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} \nu_n dS =$$

$$= 2\int_{\dot{\Omega}_s} h_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(a_{njkl} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l}\right) \nu_j dS - 2\int_{\Omega_s} h_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_j}\left(a_{njkl} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l}\right) dX -$$

$$- \int_{\dot{\Omega}_s} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} a_{njkl} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} \nu_n dS + \int_{\Omega_s} b_{ijkl} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} dX +$$

$$+ \int_{\Omega_s} c_{ikl} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} dX ,$$

où $b_{ijkl}, c_{ikl} \in L_\infty(\Omega)$. On prend :

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial^3 u_s}{\partial x_n \partial x_k \partial x_l}$$

sur $\dot{\Omega}_s$ au sens des traces (cf. [1]) ce qui a un sens en vertu de (1.5).

Tenant compte de ce que $\frac{\partial u_s}{\partial x_i} = 0$ sur Ω_s on obtient

$$(1.8)\quad \int_{\dot{\Omega}_s} (2h_i a_{njkl} - h_m a_{ijkl}) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} \nu_n dS =$$

$$= -2\int_{\Omega_s} h_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i} f dX + \int_{\Omega_s} \sum_{0 \le |\alpha|, |\beta| \le 2}' A_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta u dX \ ^{(2)}.$$

C'est l'égalité analogue à (2.3). Le vecteur $(h_i a_{njkl} - h_n a_{ijkl})\nu_n$ pour j, k, l fixes est orthogonal à la normale extérieure, alors :

$$(1.9) \qquad (h_i a_{njkl} - h_n a_{ijkl})\nu_n \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

On a alors

$$\int_{\dot{\Omega}_s} (2h_i a_{njkl} - h_n a_{ijkl}) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} \nu_n dS =$$

$$= \int_{\dot{\Omega}_s} h_n \nu_n a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l} \nu_n dS .$$

On peut trouver h_i de sorte que $h_i \nu_i \geqslant c > 0$; tenant compte de (1.2), on obtient :

$$(1.10) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{L_2(\dot{\Omega}_s)} \leqslant c|f|_{L_2(\Omega_s)} ,$$

où c ne dépend pas de s.

2. L'inégalité de Rellich du troisième ordre.

On suppose qu'il est possible de décomposer l'opérateur (1.1) comme suit :

$$(2.1) \quad A = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ikl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\right) + $$
$$+ d_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + e_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b.$$

On suppose $b_{ij}, c_{kl} \in C^{(1),1}(\bar{\Omega})$, $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{kl} = c_{lk}$

et

$$[\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n] \in E_n \Longrightarrow b_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \; c_{kl}\xi_k\xi_l \geqslant$$
$$\geqslant c \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 , \; b_{ikl} \in C^{(0),1}(\bar{\Omega}), d_{ij}, \; e_i \in L_\infty(\Omega).$$

Remarque 2.1.

Si $n = 2$, on peut toujours mettre A sous la forme (2.1), à cela près qu'il n'est pas prouvé en général que les b_{ij}, c_{kl} ont la régularité exigée. (Pour ces questions, cf. [7]). Si les coefficients de l'opérateur (1.1) sont constants, alors pour $n = 2$ (2.1) est toujours possible. Exemple typique : l'opérateur biharmonique.

Soit v la solution du problème de Dirichlet $\frac{\partial}{\partial x_i}(b_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}) = 0$ dans Ω_s, $v \in W_2^{(1)}(\Omega_s)$. Tenant compte de (1.5) on a par la formule de Green :

$$(2.2) \quad \int_{\Omega_s} vf dX = \int_{\dot{\Omega}_s} vb_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(c_{kl}\frac{\partial^2 u_s}{x_k\, x_l})\nu_i dS + \int_{\dot{\Omega}_s} vb_{ikl}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l}\nu_i dS -$$

$$-\int_{\Omega_s} b_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(c_{kl}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l})dX - \int_{\Omega_s} b_{ikl}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l}dX +$$

$$+\int_{\Omega_s} vd_{ij}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j}dX + \int_{\Omega_s} ve_i\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dS + \int_{\Omega_s} bvu_s dX .$$

En vertu du théorème 2 de § 1, on a :

$$(3.3) \quad \int_{\Omega_s} b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(c_{kl}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l})\frac{\partial v}{\partial x_j}dX = \int_{\dot{\Omega}_s} c_{kl}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial v}{\partial \nu}dS ;$$

On tire alors du théorème 2, § 1, de (1.4) et de 1.10) l'inégalité :

$$(2.4) \quad \left| b_{ij}(c_{kl}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_l})\nu_i \right|_{W_2^{(-1)}(\dot{\Omega}_s)} \leqslant c|f|_{L_2(\Omega_s)} ,$$

où c ne dépend pas de s.

3. Problème de Dirichlet.

On considère l'ensemble $W_2^{(1)}(\Omega) \times L_2(\dot{\Omega})$, $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Si

$$[g,h] \in W_2^{(1)}(\dot{\Omega}) \times L_2(\dot{\Omega}) \text{ on pose } \|[g,h]\| = [|g|^2_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega})} + |h|^2_{L_2(\dot{\Omega})}]^{1/2}.$$

En prenant $v \in C^{(\infty)}(\bar{\Omega})$, l'ensemble M des éléments $[v, \frac{\partial v}{\partial n}]$ (1) est dense dans $W_2^{(1)}(\dot{\Omega}) \times L_2(\dot{\Omega})$. Alors : (3.1) $\bar{M} = W_2^{(1)}(\dot{\Omega}) \times L_2(\dot{\Omega})$.

On désigne par $\langle v,S\rangle_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega})}$ la dualité entre $W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$ et $W_2^{(-1)}(\dot{\Omega})$

et par $\langle h,T\rangle_{L_2(\dot{\Omega})}$ le produit scalaire dans $L_2(\dot{\Omega})$.

Après avoir démontré (1.10) et (2.4), on prouve sans difficulté par la méthode du § 1 sect. 2, ceci :

THÉORÈME 1. Il existe exactement une application T, linéaire et bornée de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\dot{\Omega})$ et exactement une application S, linéaire et bornée de $L_2(\Omega)$ dans $W_2^{(-1)}(\Omega)$ telles que $\forall v \in W_2^{(2)}(\Omega)$, u étant la solution du problème de Dirichlet $Au = f$ (A est l'opérateur (1.1)) dans Ω, $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\dot{\Omega}$ (cf. (2.1))

$$(3.2) \quad \int_\Omega vf\, dX = \langle v,S\rangle_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega})} - \langle \frac{\partial v}{\partial \nu}, T\rangle_{L_2(\dot{\Omega})} +$$

$$+ \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(b_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j})\, c_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\, dX - \int_\Omega b_{ikl}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\, dX +$$

$$+ \int_\Omega v d_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dX + \int_\Omega v e_i \frac{u}{x_i}\, dX + \int_\Omega bvu dX.$$

Soit maintenant $v \in W_2^{(2)}(\Omega)$ et $Av = 0$. On a :

---

(1) On peut prendre les éléments $[v, \frac{\partial v}{\partial \nu}]$ où $\frac{\partial v}{\partial \nu} = b_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\nu_i$.

$$(3.3) \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) c_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\, dX - \int_\Omega b_{ikl}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\, dX +$$

$$+ \int_\Omega v d_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dX + \int_\Omega v e_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dX + \int_\Omega bvu\, dX = 0.$$

Pour la fonction v en question, soit $[g,h] \in W_2^{(1)}(\dot{\Omega}) \times L_2(\dot{\Omega})$, où $v = g$, $\frac{\partial v}{\partial n} = h$ sur $\dot{\Omega}$. On désigne par R l'application de $W_2^{(2)}(\Omega)/\overset{o}{W}{}_2^{(2)}(\Omega)$, définie par $R([g,h]) = v$. En vertu de (3.1).(3.2) et (3.3) on a :

THÉORÈME 2. L'application R peut être prolongée par continuité en une application linéaire et bornée de $W_2^{(1)}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$.

Remarque 3.1.

En utilisant [13] on prouve que $R([g,h]) = v \in W_4^{(4)}(\Omega')$ pour $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

Remarque 3.2.

On peut tirer des résultats du travail [12] ceci : on ne peut pas prolonger R en une application linéaire et bornée de $W_p^{(1)}(\dot{\Omega}) \times L_p(\dot{\Omega})$ dans n'importe quel espace topologique pour $p < 2$. $(\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$!)

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. GAGLIARDO. Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, Ricerche di Matematica, vol. VII, 1958, 102-137.

[2] L. HÖRMANDER. Uniqueness theorems and estimates for normally hyperbolic partial differential equations of the second order. Compte-rendus du XIIe Congrès des Mathématiciens scandinaves tenu à Lund, 1953, 105-115.

[3] J.L. LIONS. Quelques remarques sur les problèmes de Dirichlet et de Neumann, Séminaire J. Leray, L. Schwartz, B. Malgrange, 1962.

[4] J.L. LIONS, J. DENY. Les espaces du type de Beppo Levi, Annales de l'Institut Fourier, tome V, 1953-1954, 305-370.

[5] E. MAGENES, G. STAMPACCHIA. I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellitico, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, ser. III, vol. XII, fasc. III, 1958, 247-358.

[6] J. NEČAS. Sur les solutions des équations elliptiques aux dérivées partielles du second ordre avec intégrale de Dirichlet non-bornée, Czechoslovak Mathematical Journal 10, 1960, 283-298.

[7] J. NEČAS. Sur le problème de Dirichlet pour l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre du type elliptique. Rendiconti del Seminario Matematico, Università di Padova, vol. XXXI, 1961, 198-231.

[8] J. NEČAS. On the Regularity of Solutions of Second-order Elliptic Partial Differential Equations with an Unbounded Dirichlet Integral, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 9, num. 2, 1962, 134-144.

[9] J. NEČAS. Sur les domaines du type N, Czechoslovak Mathematical Journal, 12, 1962, 274-287.

[10] J. NEČAS. Sur les équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique du deuxième ordre, à paraître dans Czechoslovak Mathematical Journal, 1963.

[11] J. NEČAS. L'application de l'égalité de Rellich sur les systèmes elliptiques du deuxième ordre, à paraître dans Journal de Mathématique 1963.

[12] J. NEČAS. Solution du problème biharmonique pour le coin infini. Casopis pro pestování matematiky, 83, 1958, 399-424.

[13] L. NIRENBERG. Remarks on Strongly Elliptic Differential Equations, Communications on Pure and Applied Mathematics 8, 1955, 649-675.

[14] L.E. PAYNE, H.F. WEINBERGER. New bounds for solutions of second order elliptic partial differential equations, Pacific Journal of Mathematics, vol. 8, N.3, 1958, 551-573.