Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Bernard Malgrange

Sur les systèmes différentiels à coefficients constants (suite)

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. nº 8, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A8_0>

SUR LES SYSTÈMES DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS (suite)

par

Bernard MALGRANGE

Dans les conférences précédentes, nous avions établi un certain nombre de théorèmes d'existence et de représentation des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles. Nous allons ici les utiliser pour traiter les problèmes suivants :

1) Problèmes d'ellipticité (ou, plus précisément, analytique-hypoellipticité),

2) Certains problèmes de prolongement des solutions d'un système homogène.

Nous gardons les notations des exposés précédents.

I. Ellipticité

Soit P une matrice $\in \mathcal{P}^{p \times q}$. Le système $P(D)$ est dit <u>elliptique</u> lorsque la propriété suivante est vérifiée :

(E). "Si Ω est un ouvert de $\underline{\underline{R}}^n$, et si $F \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^q$ est tel que $P(D)F$ soit une fonction analytique réelle dans Ω, alors F est elle-même analytique réelle dans Ω" .

La propriété (E) est équivalente à la suitante, moins forte en apparence.

(E')" Si Ω est un ouvert de $\underline{\underline{R}}^n$, et si $F \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^q$ vérifie $P(D)F = 0$, alors F est analytique réelle dans Ω ".

En effet, les propriétés (E) et (E') étant locales, pour montrer leur équivalence, il suffit d'établir ceci : "Soit, au voisinage d'un point $a \in \underline{\underline{R}}^n$, G une fonction analytique (à p composantes), vérifiant, $\forall\, Q \in \mathcal{P}^{1 \times p}$, avec $QP = 0$, l'équation $Q(D)G = 0$. Alors il existe une fonction analytique réelle F au voisinage de 0, (à q composantes) vérifiant $P(D)F = G$ ".

Pour établir ce résultat, il suffit de "complexifier" G en une fonction $\tilde{G}(z_1,..,z_n)$, holomorphe au voisinage de a dans $\underline{\underline{C}}^n$, et de chercher une fonction $\tilde{F}$ vérifiant

$$P(D_z)\tilde{F} = \tilde{G}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{z}_j} = 0 \qquad\qquad j = 1,\ldots,n$$

[avec $D_z = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n}\right)$]

il est immédiat que les "conditions de compatibilité" de ce nouveau système sont vérifiées, d'où l'existence locale de $\tilde{F}$ par le théorème 3.2 ; la restriction F de $\tilde{F}$ à R^n vérifie les conditions imposées.

Pour caractériser les systèmes elliptiques, introduisons la notion de <u>support</u> d'un système d'équations aux dérivées partielles.

DÉFINITION 1.1. <u>Le support du système</u> $P(D)F = 0$, <u>qui sera noté</u> $S(P)$, <u>est formé de l'ensemble des points</u> $\zeta \in \underline{\underline{C}}^n$ <u>tels qu'il existe une exponentielle</u> $\neq 0$ $F = \alpha e^{i<\zeta,x>}$ (α <u>un vecteur de</u> $\underline{\underline{C}}^q$) <u>vérifiant</u> $P(D)F = 0$.

Autrement dit, $S(P)$ est l'ensemble des points $\zeta \in \underline{\underline{C}}^n$ tels que la matrice $P(\zeta)$ soit de rang $< q$ (puisque $P(D)[\alpha e^{i<\zeta,x>}] = e^{i<\zeta,x>}.P(\zeta)\alpha$). Notons qu'en général $S(P) = \underline{\underline{C}}^n$, sauf dans le cas où la matrice $P(\zeta)$ est de rang q pour ζ "générique", i.e. dans le cas où le système est " surdéterminé".

Cela étant, nous allons démontrer le résultat suivant (qui, précisons-le, n'a rien d'original : la seule originalité ici est d'utiliser le théorème de représentation intégrale dans la seconde partie de la démonstration : cette idée est due à Ehrenpreis (voir texte cité précédemment, ou conférences à Stanford), encore que nous l'appliquions d'une manière légèrement différente de cet auteur).

THÉORÈME 1.2. <u>Pour que</u> $P(D)$ <u>soit elliptique, il faut et il suffit qu'il existe</u> $A > 0$ <u>et</u> B <u>réel tels que, sur</u> $S(P)$, <u>l'inégalité suivante soit vérifiée</u> :

$$|\mathfrak{I}\,\zeta| \geq A\,|\mathfrak{R}\,\zeta| - B$$

($|.|$ = norme euclidienne dans $\underline{\underline{R}}^n$).

1. <u>Nécessité</u>. Elle est due à Petrovsky (mémoire classique sur les équations elliptiques) ; nous emploierons une variante de sa démonstration, qui se trouve, par exemple, dans l'article de Hörmander sur la "régularité au bord".

Soit Ω la boule unité de $\underline{\underline{R}}^n$, et $\mathcal{C}(\Omega,P)$ l'ensemble des fonctions F continues dans Ω, à valeurs dans $\underline{\underline{C}}^q$, vérifiant $P(D)F = 0$. Par hypothèse, les fonctions de $\mathcal{C}(\Omega,P)$ sont analytiques dans Ω. En particulier, elles sont indéfiniment dérivables dans Ω ; $\mathcal{C}(\Omega,P)$ est donc à la fois un sous-espace fermé de $[\mathcal{C}(\Omega)]^q$ et de $[\mathcal{E}(\Omega)]^q$ (notations évidentes) ; d'après le théorème du graphe fermé, les deux topologies induites sur notre espace coïncident. En particulier, les applications linéaires $F \to D^m F(0)$ de $\mathcal{C}(\Omega,P)$, muni de la topologie de la convergence compacte, dans $\underline{\underline{C}}^q$ sont continues, pour tout monôme de dérivation D^m.

Cela étant, soit, pour $k > 0$, $[\Omega,P,k]$ le sous-espace de $\mathcal{C}(\Omega,P)$ formé des F qui vérifient, $\forall\, m \in \underline{\underline{N}}^n$:

$$|D^m F(0)| \leq k^{|m|}\, m\,! \qquad \text{(avec les notations habituelles...)}$$

D'après ce qui précède, $[\Omega,P,k]$ est, $\forall\, k$, un sous ensemble fermé de $\mathcal{C}(\Omega,P)$, et l'on a $\bigcup [\Omega,P,k] = \mathcal{C}(\Omega,P)$ puisque nos fonctions sont analytiques. L'un des $(\Omega,P,k]$ a donc un point intérieur (th. de Baire, qu'on peut supposer être 0, par une translation et en modifiant k au besoin. Par suite, il existe un compact $L \subset \Omega$ tel que $\sup_{x \in L} |F(x)| \leq 1$ entraîne $\forall\, m \in \underline{\underline{N}}^n$:

$$|D^m F(0)| \leq A\, k^{|m|}\, m! \qquad (A > 0)$$

Pour obtenir la proposition, il suffit alors d'appliquer ce résultat à $F = \alpha\, e^{i<\zeta\,,x>}$, pour $\zeta \in S(P)$ (nous laissons le détail de la majoration à faire au lecteur).

2. Suffisance

Considérons une solution F de notre système $P(D)F = 0$, sur un voisinage de la boule unité fermée $B \subset \mathbb{R}^n$. D'après le "théorème de représentation intégrale" (théorème 2.6), il existe une distribution $U \in [s'_B]^q$ (s'_B, dual de s^B), qui vérifie $P(\zeta)U = 0$, et qui soit "une transformée de Fourier-Ehrenpreis" de F sur B.

Tout d'abord le support de U (support, au sens de la théorie des distributions), est contenu dans $S(P)$, puisque, au voisinage d'un point $\zeta \notin S(P)$, le rang de la matrice $P(\zeta)$ est égal à q. Nous allons déduire de là et de l'hypothèse le résultat suivant (nous ne chercherons pas le meilleur possible) :

LEMME 1.3. Il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait $e^{\varepsilon\sqrt{1+|\xi|^2+|\eta|^2}}\, U \in [s'_{\xi,\eta}]^q$ (autrement dit, U est "à décroissance exponentielle", non seulement en η, mais aussi en ξ et η).

Tout d'abord on a

$$\hat{B}(\eta)\, U \in [s'_{\xi,\eta}]^q \quad \text{avec} \quad \hat{B}(\eta) = \int_B e^{<\eta,x>}\, dx\,,$$

par définition de s'_B. Pour $\alpha < 1$, la fonction

$$e^{\alpha\sqrt{1+|\eta|^2}}\; \hat{B}(\eta)^{-1}$$

est visiblement à décroissance rapide (et même exponentielle) ainsi que toutes ses dérivées, on a donc aussi

$$e^{\alpha\sqrt{1+|\eta|^2}}\; U \in [s'_{\zeta,\eta}]^q$$

Soit $\bar{S}(P)$ l'ensemble des points $\in \underline{\underline{C}}^n$ dont la distance à $S(P)$ est $\leqslant 1$. Il résulte alors, d'arguments classiques de la théorie des distributions, que l'on peut écrire U sous forme de somme finie de dérivées de fonctions U_j à support dans $\bar{S}(P)$, et telles que les fonctions

$$e^{\beta\sqrt{1+|\eta|^2}}\; U_j$$

soient bornées $(\beta < \alpha)$.

Compte-tenu des propriétés de $S(P)$, il existera donc $\varepsilon > 0$ tel que les fonctions

$$e^{\varepsilon\sqrt{1+|\xi|^2+|\eta|^2}}\; U_j$$

soient bornées ; on déduit aussitôt de là que l'on a

$$U_\varepsilon = e^{\varepsilon\sqrt{1+|\xi|^2+|\eta|^2}}\; U \in [s'_{\zeta,\eta}]^q.$$

D'où le lemme.

Maintenant, pour x <u>complexe</u>, $|x| < \varepsilon$, la fonction $e^{-\varepsilon\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\, e^{i\langle\zeta,x\rangle}$ appartient à $[s_{\zeta,\eta}]^q$ la fonction de x à valeur dans $[s_{\zeta,\eta}]^q$ ainsi définie est holomorphe (immédiat) ; il en résulte que la fonction

$$F_1(x) = \langle U_\varepsilon\;,\; e^{-\varepsilon\sqrt{1+|\xi|^2+|\eta|^2}}\; e^{i\langle\zeta,x\rangle}\rangle$$

est une fonction holomorphe de x pour $|x| < \varepsilon$; en particulier sa restriction à x réel, $|x| < \varepsilon$, est analytique-réelle. Si nous montrons qu'elle coïncide avec F dans la boule $|x| < \varepsilon$, nous aurons donc montré que F est analytique réelle au voisinage de 0. Pour cela, il suffit d'établir que

$\forall\, \varphi \in [\mathcal{D}]^q$, à support dans $|x| < \varepsilon$, on a

$$\langle F, \bar{\varphi} \rangle = \int F_1(x)\ \overline{\varphi(x)}\ dx$$

or, par définition de U, le premier membre est égal à

$$\langle U, \overline{\mathcal{F}\varphi} \rangle = \langle U , \int \overline{\varphi(x)}\ e^{i\langle \zeta, x\rangle}\ dx \rangle$$

et le second membre à

$$\int \overline{\varphi(x)}\ \langle U, e^{i\langle \zeta, x\rangle} \rangle\ dx$$

le produit scalaire figurant dans cette dernière formule signifiant, par exemple

$$\langle U_\varepsilon , e^{\varepsilon\sqrt{1+|\xi|^2+|\eta|^2}}\ e^{i\langle \zeta, x\rangle} \rangle$$

L'égalité des deux membres résulte alors d'arguments classiques de "permutation d'intégrales" dans la théorie des distributions que nous ne détaillerons pas.

Ainsi, nous avons montré que toute F, vérifiant au voisinage de la boule unité, l'équation $P(D)F = 0$, est analytique au voisinage de l'origine. Par homothétie et translation, on en déduit que $P(D)$ est elliptique. C.Q.F.D.

Remarque. Dans le cas hypoelliptique, une étude tout à fait analogue donne la condition suivante (théorème de Hörmander-Lech):

"Sur $S(P)$, lorsque $|\mathcal{R}\zeta| \to \infty$, on a $|\mathcal{J}(\zeta)| \to \infty$" (autrement dit, l'application $S(P) \to R^n_n : \zeta \to \mathcal{J}\zeta$ est propre)

qui, d'après le théorème d'élimination de Tarski-Seidenberg, équivaut à la condition :

"sur $S(P)$, on a $|\mathcal{J}(\zeta)| \geqslant A|\mathcal{R}\zeta|^{\alpha} - B$, A et $\alpha > 0$, B réel".

Rappelons que ces résultats, aussi bien dans le cas elliptique que dans le cas hypoelliptique, s'établissent ainsi (je parle de la partie "suffisance" de la démonstration)

1. On traite le cas d'une équation (Petrovsky dans le cas elliptique, Hörmander dans le cas hypoelliptique).

2. On ramène le cas d'un système $p_1(D)f = 0, \dots, p_p(D)f = 0$ (ou avec seconds membres) au cas d'une équation en montrant que l'idéal engendré par $p_1, \dots, p_p$ contient un polynome elliptique ou hypoelliptique, suivant le cas (théorème de Lech). (Le cas où $q \neq 1$ se ramène aussitôt au précédent, par considération des déterminants d'ordre q du système).

La méthode employée ici (et due, encore une fois, à Ehrenpreis) permet d'éviter l'emploi du théorème de Lech.

On trouvera dans les articles indiqués d'Ehrenpreis des considérations analogues sur les systèmes <u>hyperboliques</u>.

II. <u>Un théorème de prolongement</u>

1. Soit Ω un ouvert <u>convexe borné</u> $\subset \underline{\underline{R}}^n$; $\partial\Omega$ désigne sa frontière. Nous noterons $\mathcal{E}(\Omega, P)$, (resp. $\mathcal{E}(\overline{\Omega}, P)$, resp. $\mathcal{E}(\partial\Omega, P)$) l'espace des solutions indéfiniment dérivables de $P(D)F = 0$ dans Ω (resp. au voisinage de $\overline{\Omega}$, resp. au voisinage de $\partial\Omega$; dans ces deux derniers cas, on travaille dans un voisinage non précisé, deux fonctions définies dans deux voisinages étant identifiées si elles coïncident dans un troisième voisinage).

Cherchons à quelle condition toute fonction de $\mathcal{E}(\partial\Omega, P)$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{E}(\overline{\Omega}, P)$. Commençons par un cas particulier simple, dû à Ehrenpreis, celui où $q = 1$, i.e. F est une fonction scalaire vérifiant

$$p_1(D)F = \dots = p_p(D)F = 0$$

pour cela, prolongeons F en une fonction $\widetilde{F}$ indéfiniment dérivable au voisinage de $\overline{\Omega}$ on aura : $p_i(D)\widetilde{F} = G_i$, $G_i \in \mathcal{D}(\Omega)$; notre problème aura une solution s'il existe $H \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel qu'on ait $p_i(D)H = G_i$, car alors $\tilde{F} - H$ sera le prolongement cherché. Or, on a : $\forall i,j$, $p_i(D)G_j = p_j(D)G_i$; faisons l'hypothèse suivante :

(Ext) Les polynomes p_i sont sans facteur commun (en particulier, on a : $p \geqslant 2$) ; considérons alors la fonction méromorphe :

$$M = \frac{\mathcal{F} G_1}{p_1(\zeta)} = \dots = \frac{\mathcal{F} G_p}{p_p(\zeta)}$$

sa variété polaire est de dimension $< n-1$, donc elle est vide : par suite c'est une fonction holomorphe dans $\underline{\underline{C}}^n$: il résulte alors de théorèmes bien connus (en l'occurence du théorème 2.4 des exposés précédents, mais dans le cas beaucoup plus simple d'<u>une seule</u> équation) qu'il existe $H \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\mathcal{F} H = M$. D'où le résultat. On voit facilement que ce prolongement est unique. Il est aussi facile de voir que la condition(Ext) est nécessaire (nous le montrerons dans le cas général un peu plus loin).

Passons maintenant au cas général (que Ehrenpreis connaît, je suppose, encore que je n'en aie pas trouvé de mention dans ses articles). Soit encore $\tilde{F}$ un prolongement indéfiniment dérivable de F à un voisinage de $\partial \Omega$. Posons $P(D)\tilde{F} = G$; on a $G \in [\mathcal{D}(\Omega)]^p$ et tout revient à montrer qu'il existe $H \in [\mathcal{D}(\Omega)]^q$, vérifiant $P(D)H = G$. Or, pour toute matrice $R \in \mathcal{P}^{1 \times p}$, vérifiant $RP = 0$, on a $R(D)G = 0$.

Soit $T_1, \dots, R_s$ un système de générateurs sur $\mathcal{P}$ des matrices R, et soit Q la matrice $\in \mathcal{P}^{s \times p}$ dont les lignes sont les R_i. Toute notre "information" sur G est donnée par l'équation $Q(D)G = 0$. Nous avons donc à traiter un problème d'étude des solutions à support compact d'un système d'équations homogènes. Or, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. Soit Q une matrice $\in \mathcal{P}^{s \times p}$, et soit S une matrice $\in \mathcal{P}^{p \times t}$ telle que les colonnes de S forment un système de générateurs des $p \times 1$ matrices Σ vérifient $Q\Sigma = 0$. Alors tout $G \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^p$ (Ω, ouvert convexe), vérifiant $Q(D)G = 0$ est de la forme $S(D)H$, avec $H \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^t$.

(Autrement dit : $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un $\mathcal{P}$-module plat ; cf. Bourbaki, Algèbre commutative, chap.1).

Pour établir ce résultat on raisonne comme pour le corollaire 2.2 des exposés précédents : il suffit de montrer, d'après le théorème 2.4 que en tout point $a \in \underline{\underline{C}}^n$, la série de Taylor ψ_a de $\mathcal{F}G$ au point a est de la forme $S(\zeta)\Phi_a$, Φ_a une série formelle en $\zeta - a$ (à t composantes) ; or, on a évidemment : $Q(\zeta)\psi_a = 0$; autrement dit on est ramené à démontrer un résultat analogue à la proposition 2.1 pour les séries formelles, ce qui est bien connu (platitude des localisés-complétés sur les anneaux de polynomes ; voir Bourbaki, Algèbre commutative, chap. 2 et 3).

Revenons maintenant à notre problème : on pourra trouver $H \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^q$ vérifiant $P(D)H = G$ si l'on peut prendre $S = P$, autrement dit si l'hypothèse suivante est vérifiée :

(Ext) Toute matrice $B \in \mathcal{P}^{p \times 1}$, vérifiant $QB = 0$, est de la forme PA, avec $A \in \mathcal{P}^{q \times 1}$.

Par conséquent, si (Ext) est vérifié, notre problème a une solution, à savoir que $\tilde{F} - H$ est un prolongement cherché (qui n'est pas unique, sauf si le système est surdéterminé ; le lecteur vérifiera sans difficulté cette assertion).

Montrons maintenant que la condition (Ext) est nécessaire. Tout d'abord, si la propriété de prolongement est vérifiée, je dis qu'on a le résultat suivant :

"tout $G \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^p$, vérifiant $Q(D)G = 0$, est de la forme $P(D)H$, avec $H \in [\mathcal{D}(\Omega)]^q$ " (soit en effet $\tilde{F} \in [\mathcal{E}(\underline{\underline{R}}^n)]^q$ une solution de $P(D)\tilde{F} = G$; $\tilde{F}$ existe d'après le théorème 3.2, et soit F la restriction de $\tilde{F}$ au voisinage de $\partial\Omega$: l'existence de H équivaut visiblement à la possibilité de prolonger F en un élément de $\mathcal{E}(\overline{\Omega},P)$).

Par régularisation, et en utilisant le lemme 3.1, on voit que la propriété précédente est vraie aussi pour $\mathcal{E}'(\Omega)$ au lieu de $\mathcal{D}(\Omega)$; prenant en particulier $G = B(D)\delta$, avec $B \in \mathcal{P}^{p\times 1}$, vérifiant $QB = 0$ (δ = masse + 1 en 0 ; on suppose ce qui ne change rien, que l'on a : $0 \in \Omega$), on trouve $B(D)\delta = P(D)H$, $H \in [\mathcal{E}'(\Omega)]^p$, d'où $B(\zeta) = P(\zeta)(\mathcal{F}H)(\zeta)$ par transformation de Fourier, avec $(\mathcal{F}H)$ fonction holomorphe dans $\underline{\underline{C}}^n$; mais alors, il est bien connu par la théorie des idéaux de polynomes que l'on a $B = PA$, pour un $A \in \mathcal{P}^{q\times 1}$, d'où (Ext). Finalement, nous avons établi le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. <u>Pour que la restriction</u> $\mathcal{E}(\overline{\Omega},P) \to \mathcal{E}(\partial\Omega,P)$ <u>soit surjective, il faut et il suffit que</u> P <u>vérifie la condition</u> (Ext).

<u>Remarques</u>. a) Le théorème analogue pour $\mathcal{D}'$ au lieu de $\mathcal{E}$ est vrai, et se démontre de la même manière.

b) Soient Ω_1 et Ω_2 convexes $\subset \underline{\underline{R}}^n$, avec $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$. Désignons par $\mathcal{E}(\Omega_2 - \Omega_1,P)$ l'espace des solutions indéfiniment dérivables de $P(D)F = 0$ au voisinage de $\Omega_2 - \Omega_1$. Alors l'application

$$\mathcal{E}(\Omega_2,P) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega_2 - \Omega_1,P)$$

est surjective si et seulement si P vérifie (Ext), et le même résultat vaut avec $\mathcal{D}'$ au lieu de $\mathcal{E}$ (mêmes raisonnements).

c) Il serait intéressant de savoir traiter le problème plus précis suivant : soit F une fonction différentiable au sens de Whitney sur $\partial\Omega$, vérifiant $P(D)F = 0$. Si P vérifie (Ext), peut-on prolonger F en une solution sur $\overline{\Omega}$ de classe C^∞ de la même équation.

Pour cela, il faudrait savoir démontrer un théorème du type théorème 2.4 (exposés précédents), sans agrandir Γ i.e. avec $\Gamma_1 = \Gamma$.

2. Le théorème 2.2 peut être généralisé de la manière suivante, (qui redonne des propriétés bien connues de prolongement des fonctions holomorphes, dans le cas où P est le système de Cauchy-Riemann).

THÉORÈME 2.3. Soit Ω un ouvert CONVEXE ET BORNÉ de $\mathbb{R}^n$, et soit H le demi-espace $x_1 \leq 0$; supposons que P vérifie (Ext). Alors toute fonction de $\mathcal{E}(\partial\Omega \cap H, P)$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{E}(\overline{\Omega} \cap H, P)$.

Par contre, il est visible ici que, pour un Ω donné la condition (Ext) n'est pas nécessaire (contre exemple : Ω une sphère centrée à l'origine, f fonction scalaire solution de $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$).

Démonstration. Dans les hypothèses de l'énoncé, on peut trouver un nombre $\varepsilon > 0$ et des ouverts convexes Ω_{-1}, Ω_1, Ω_2, Ω_3 possédant les propriétés suivantes :

a. $\Omega_3 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega \subset\subset \Omega_{-1}$

b. Il existe une fonction $\tilde{F}$ (à q composantes), indéfiniment dérivables dans

$$\mathcal{O} = \Omega_{-1} \cap \{x_1 < 6\varepsilon\},$$

qui coïncide avec F dans $(\Omega_{-1} - \overline{\Omega}_3) \cap \{x_1 < 6\varepsilon\}$ (il suffira de prendre Ω_{-1} et Ω_3 "assez voisins" de Ω , et ε "assez petit" pour que F soit définie sur un voisinage de ce dernier ensemble).

Posons alors $P(D)\tilde{F} = G$; G est une fonction indéfiniment dérivable dans $\mathcal{O}$, à support dans $\overline{\Omega}_3 \cap \{x_1 < 6\varepsilon\}$, puisqu'on a $P(D)F = 0$

Soit α une fonction indéfiniment dérivable de x_1 seul, égale à 1 pour $x_1 \leq 2\varepsilon$, et à 0 pour $x_1 \geq 4\varepsilon$. La fonction αG est à support compact, contenu dans $\overline{\Omega}_3 \cap \{x_1 \leq 4\varepsilon\}$; comme $Q(D)G = 0$, $Q(D)(\alpha G)$ a son support contenu dans le compact convexe $\overline{\Omega}_3 \cap \{2\varepsilon \leq x_1 \leq 4\varepsilon\}$. Par suite, il existe G_1 à support compact "un peu plus grand", disons contenu dans $\Omega_2 \cap \{\varepsilon \leq x_1 \leq 5\varepsilon\}$, vérifiant $Q(D)(\alpha G) = Q(D)G_1$ (théorème 2.4 des exposés précédents).

De $Q(D)(\alpha G - G_1) = 0$ et de l'hypothèse (Ext), on déduit comme au théorème 2.2 qu'il existe H à support compact "un peu plus grand" que l'enveloppe convexe du support de $(\alpha G - G_1)$, disons contenu dans $\Omega_1 \cap \{x_1 < 6\varepsilon\}$ vérifiant $\alpha G - G_1 = P(D)H$.

Je dis que $\tilde{F} - H$ est le prolongement cherché : en effet, il coïncide avec F dans $(\Omega_{-1} - \overline{\Omega}_1) \cap \{x_1 < \varepsilon\}$, et il vérifie dans $\mathcal{O}$ $P(D)(\tilde{F} - H) = (1 - \alpha)G + G_1$; en particulier, dans $\Omega_{-1} \cap \{x_1 < \varepsilon\}$, on a $P(D)(\tilde{F} - H) = 0$.

C.Q.F.D.

Bien entendu, d'autres problèmes voisins des précédents pourraient être traités de manière analogue. Nous y reviendrons ultérieurement.

***