Bernard Malgrange

Sur les systèmes différentiels à coefficients constants

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. nº 7, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A7_0>

SUR LES SYSTEMES DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS

Bernard Malgrange

(Université de Paris)

A l'heure actuelle, on connait un grand nombre de résultats sur les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, lorsque ces systèmes sont "déterminés" (c'est à dire que le nombre des équations est égal au nombre des inconnues, le déterminant du système étant $\neq 0$). En dehors de ce cas, fort peu de choses sont connues ; nous nous proposons ici d'examiner les problèmes suivants : existence des solutions d'un système avec second membre $\mathcal{E}^{\infty}$; approximation des solutions d'un système homogène par des sommes d'exponentielles-polynomes ; cela sans faire aucune hypothèse de "détermination" du système en question. Les résultats établis ici ont été annoncés, ainsi que d'autres résultats voisins, par L. Ehrenpreis [2], dans le cas où les ouverts convexes considérés ici sont des pavés (i.e. l'ensemble des points vérifiant : $|x_i - a_i| < \delta_i$) ; à ma connaissance, les démonstrations de cet auteur ne sont pas publiées ; ses méthodes, pour autant que je puisse en juger, sont assez différentes - au moins formellement - de celles que l'on emploie ici puisqu'il semble n'utiliser, ni la d"-cohomologie, ni surtout la division des distributions.

I. Cohomologie de certaines formes différentielles.

Soit Γ un compact convexe $\subset \mathbb{R}^n$, et soit $\hat{\Gamma}$ la fonction suivante

$$\hat{\Gamma}(\eta) = \int_{\Gamma} e^{\langle \eta , x \rangle} \, dx$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dx mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$; $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle \eta , x \rangle = \sum \eta_j x_j$.

Si Γ a un point intérieur (ce que nous supposerons toujours dans la suite), $\hat{\Gamma}$ est toujours > 0, et $\log \hat{\Gamma}$ est convexe ; en outre $\hat{\Gamma}$ est une fonction indéfiniment dérivable de η , et même prolongeable en une fonction holomorphe de type exponentiel dans $\mathbb{C}^n$.

Si D_η^k est un monôme de dérivation d'ordre k en η, il existe $C_k > 0$ tel qu'on ait

$$(1.1) \qquad |D_\eta^k \hat{\Gamma}(\eta)| \leqslant C_k \hat{\Gamma}(\eta) \qquad \text{(immédiat).}$$

Définition 1.1. On désigne par $\mathcal{S}_{\xi,\eta}$ $\left[\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R}^n\right]$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^{2n} \sim \mathbb{R}^n_\xi \times \mathbb{R}^n_\eta$, à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tous les ordres en (ξ, η) [5].

On désigne par $\mathcal{S}^\Gamma_{\xi,\eta}$ l'espace des fonctions $f(\xi,\eta)$ indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^{2n}$ telles qu'on ait $\hat{\Gamma}^{-1}(\eta) f(\xi,\eta) \in \mathcal{S}_{\xi,\eta}$.

Nous écrirons, pour simplifier les notations, $\mathcal{S}^\Gamma$ pour $\mathcal{S}^\Gamma_{\xi,\eta}$. De l'inégalité (1), il résulte que "$f \in \mathcal{S}^\Gamma$" équivaut à la condition suivante : "Pour tout monôme de dérivation $D_{\xi,\eta}$, la fonction $\hat{\Gamma}^{-1}(\eta)\, D_{\xi,\eta} f(\xi,\eta)$ est à décroissance rapide".

Soit φ une distribution dans $\mathbb{R}^n_x$, $\mathcal{F}\varphi$ la transformée de Fourier de φ ($\mathcal{F}\varphi = \int e^{-i\langle \xi, x\rangle} \varphi(x)dx$, en notant les distributions comme des fonctions). D'après le théorème de Paley-Wiener, on a : $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support dans Γ [5]) si et seulement si $\mathcal{F}\varphi$ se prolonge en une fonction holomorphe en $\zeta = \xi + i\eta$, et appartenant à $\mathcal{S}^\Gamma$. Cela nous incite à introduire, comme on le fait dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, l'espace ${}^r\mathcal{S}^\Gamma$ des formes différentielles de type $(0, r)$ à coefficients dans $\mathcal{S}^\Gamma$:

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \varphi_{i_1 \ldots i_r}\, d\bar{\zeta}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{\zeta}_{i_r}$$

avec $\varphi_{i_1 \ldots i_r} \in \mathcal{S}^\Gamma$.

Soit d'' la composante de type $(0, 1)$ de la différentielle extérieure, i.e.

$$d''\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \frac{\partial \varphi_{i_1 \ldots i_r}}{\partial \bar{\zeta}_j}\, d\zeta_j \wedge d\zeta_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\zeta_{i_r}$$

Il est clair que d" est une application linéaire ${}^{r}\mathcal{S}^{\Gamma} \longrightarrow {}^{r+1}\mathcal{S}^{\Gamma}$, et qu'elle vérifie la formule de Poincaré : d"d" = 0. Le but de ce paragraphe est d'établir une réciproque affaiblie de ce résultat :

<u>Théorème</u> 1.2. <u>Soit</u> ω <u>une forme</u> $\in {}^{r}\mathcal{S}^{\Gamma}$ $(r \geqslant 1)$, <u>vérifiant</u> $d''\omega = 0$. <u>Pour tout convexe</u> Γ_1 <u>vérifiant</u> $\Gamma \subset \mathring{\Gamma}_1$, <u>il existe</u> $\varpi \in {}^{r-1}\mathcal{S}^{\Gamma_1}$ <u>vérifiant</u> $d''\varpi = \omega$.

Pour établir ce résultat, nous allons effectuer une transformation de Fourier inverse $\bar{\mathcal{F}}_\xi$ <u>par rapport à la seule variable</u> ξ ; on a facilement $\bar{\mathcal{F}}_\xi \, \mathcal{S}^{\Gamma}_{\xi,\eta} = \mathcal{S}^{\Gamma}_{x,\eta}$; pour simplifier l'écriture, nous noterons $\sum^{\Gamma}$ ce dernier espace.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}^{\Gamma}$, et $\psi = \bar{\mathcal{F}}_\xi \varphi$; on a

$$\bar{\mathcal{F}}_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\xi}_j} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta_j} - x_j \psi\right) = \frac{i}{2} \, e^{\langle \eta, x\rangle} \frac{\partial}{\partial \eta_j}\left[e^{-\langle \eta, x\rangle} \psi\right].$$

Désignons alors par ${}^{r}\sum^{\Gamma}$ l'espace des formes différentielles <u>en</u> η <u>seul</u> de degré r, à coefficients dans $\sum^{\Gamma}$: un élément π de ${}^{r}\sum^{\Gamma}$ s'écrit donc

$$\pi = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n} \psi_{i_1 \dots i_r} \, d\eta_{i_1} \wedge \dots \wedge d\eta_{i_r}, \quad \psi_{i_1 \dots i_r} \in \sum{}^{\Gamma}.$$

Et l'on établit un isomorphisme entre ${}^{r}\mathcal{S}^{\Gamma}$ et ${}^{r}\sum^{\Gamma}$ en posant $\bar{\mathcal{F}}_\xi \, \omega = \pi$ lorsqu'on a $\bar{\mathcal{F}}_\xi \, \varphi_{i_1 \dots i_r} = \psi_{i_1 \dots i_r}$. En notant d_η la différentielle extérieure en η seul, le théorème 1.2 s'énonce ainsi:

<u>Théorème</u> 1.2 <u>bis</u>. <u>Soit</u> π <u>une forme</u> $\in {}^{r}\sum^{\Gamma}$ $(r \geqslant 1)$, <u>vérifiant</u> $d_\eta(e^{-\langle \eta, x\rangle}\pi) = 0$. <u>Pour tout convexe</u> Γ_1 <u>vérifiant</u> $\Gamma \subset \mathring{\Gamma}_1$, <u>il existe</u>

$$\chi \in {}^{r-1}\sum{}^{\Gamma_1}, \ \underline{\text{vérifiant}} \ d_\eta(e^{-\langle \eta, x\rangle}\chi) = e^{-\langle \eta, x\rangle}\pi.$$

Avant d'établir ce résultat, rappelons brièvement comment on établit classiquement la "réciproque du théorème de Poincaré" (dont le théorème ci-dessus n'est qu'une variante), par la méthode de l'homotopie.

Soit α une forme différentielle de degré r dans $\mathbb{R}^n$; considérons un intervalle

$I = [t_o , t_1] \subset \mathbb{R}_t$ et une application différentiable $(t,\eta) \longrightarrow F(t,\eta)$ de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_\eta$ dans $\mathbb{R}^n_\eta$; désignons, pour $t \in I$, par G_t l'application partielle $\eta \longrightarrow F(t,\eta)$. On a avec des notations classiques $F^*(\alpha) = G^*_t(\alpha) + dt \wedge \beta$, β étant une forme de degré $r-1$ à coefficients fonction de (t,η) dans laquelle dt ne figure pas. Désignons par d_η la différentielle extérieure en η seul dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_\eta$ et d la différentielle extérieure en t,η dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_\eta$ (ou en η dans $\mathbb{R}^n_\eta$). Si l'on a $d\alpha = 0$, on a aussi $dF^*(\alpha) = F^*(d\alpha) = 0$. En calculant le coefficient de dt dans l'expression de $dF^*(\alpha)$, on trouve : $\frac{d}{dt} G^*_t(\alpha) - d_\eta \beta = 0$, d'où (avec des notations évidentes)

$$G^*_{t_1}(\alpha) - G^*_{t_o}(\alpha) = d \int_{t_o}^{t_1} \beta\, dt$$

(tout cela, sous des hypothèses de dérivabilité de α et de convergence des intégrales que nous préciserons plus loin dans les cas que nous aurons à traiter).

La réciproque du théorème de Poincaré s'établit alors en choisissant F de manière qu'on ait $G^*_{t_1}(\alpha) = \alpha$, $G^*_{t_o}(\alpha) = 0$.

Cela rappelé, pour démontrer le théorème 1.2 bis, il suffit, par une partition finie de l'unité convenable dans $\mathbb{R}^n_x$, de traiter les deux cas particuliers suivants, où $\varepsilon > 0$ désigne un nombre > 0 tel que la distance (euclidienne) de Γ à la frontière de Γ_1 soit $> 2\varepsilon$:

<u>1er cas</u>. π est nul en tout point (x,η) tel que la distance euclidienne de x à Γ soit $\geqslant 2\varepsilon$.

<u>2ème cas</u>. π est nul en tout point (x,η) où $x \notin H$, H étant un demi-espace affine dont la distance à Γ est $\geqslant \varepsilon$.

<u>Dans le premier cas</u>, on prendra pour F l'application "conique" $(t,\eta) \longrightarrow t\eta$, avec $t_1 = 1$, $t_o = 0$. Explicitons le résultat, lorsque π a l'expression considérée ci-dessus :

$$\chi = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n} \left\{ \int_0^1 e^{(1-t)\langle \eta , x\rangle}\, t^{r-1}\, \psi_{i_1 \dots i_r}(x, t\eta)\, dt \right\} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \eta_{i_j}\, d\eta_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\eta_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\eta_{i_r}$$

(où le signe $\wedge$ indique que $d\eta_{i_j}$ doit être omis).

Tout revient donc à démontrer qu'on a bien

$$\overline{\psi}_{i_1\ldots i_r}(x,\eta) = \int_0^1 e^{(1-t)\langle\eta,x\rangle} t^{r-1}\psi_{i_1\ldots i_r}(x,t\eta)dt \in \sum{}^{\Gamma_1}$$

(dans la suite, on omettra les indices $i_1\ldots i_r$).

Soit Γ_ε l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ dont la distance à Γ est $\leqslant 2\varepsilon$, et soit Γ_2 un compact convexe vérifiant $\Gamma_\varepsilon \subset \overset{\circ}{\Gamma}_2$, $\Gamma_2 \subset \overset{\circ}{\Gamma}_1$. Il existe $C > 0$ tel qu'on ait

$$(2.1) \qquad \sup_{x\in\Gamma_\varepsilon} e^{\langle\eta,x\rangle} \leqslant C\,\hat{\Gamma}_2(\eta) \qquad \text{(immédiat)}$$

Comme $\hat{\Gamma}_1^{-1}\Gamma_2$ est à décroissance rapide (et même exponentielle), il suffit de vérifier que, dans $\Gamma_\varepsilon \times \mathbb{R}^n_\eta$, $\hat{\Gamma}_2^{-1}(\eta)D\overline{\psi}(x,\eta)$ est majoré par un polynome en η (D, une dérivation quelconque en x,η). En explicitant $D\overline{\psi}$, on voit qu'il suffit a fortiori de montrer que $\hat{\Gamma}_2^{-1}(\eta)\, e^{(1-t)\langle\eta,x\rangle} D'\psi(x,t\eta)$ est borné dans $[0,1]\times\Gamma_\varepsilon\times\mathbb{R}^n_\eta$ (D', une autre dérivation en x,η); or, on a :

$$e^{(1-t)\langle\eta,x\rangle} \leqslant C'\,\hat{\Gamma}_2(\eta)^{1-t} \qquad \text{d'après (2.1)}$$

et, puisque $\psi \in \sum^{\Gamma}$: $|D'\psi(x,t\eta)| \leqslant C''\hat{\Gamma}(t\eta) \leqslant C''\hat{\Gamma}_2(t\eta) \leqslant C'''\Gamma_2(\eta)^t$ (puisque $\log\hat{\Gamma}$ est convexe). D'où le résultat.

<u>Dans le second cas</u>, on peut supposer par un changement de coordonnées, que Γ est contenu dans le demi espace $x_1 \geqslant 0$, et H dans ~~le~~ demi espace $x_1 \leqslant -\varepsilon$. On prend alors pour F l'application : $(t,\eta_1,\ldots,\eta_n) \longrightarrow (\eta_1+t,\eta_2,\ldots,\eta_n)$, avec $t_1 = 0$, $t_0 = -\infty$. On aura

$$\chi = \sum_{1<i_2<\ldots<i_r\leqslant n}\left\{\int_{-\infty}^0 e^{-tx_1}\psi_{1i_2\ldots i_r}(x,\eta_1+t,\eta_2,\ldots,\eta_n)dt\right\}d\eta_{i_2}\wedge\ldots\wedge d\eta_{i_r}$$

Dans $]-\infty,0]\times H$, on a $e^{-tx_1} \leqslant e^{\varepsilon t}$; d'autre part, $\frac{\partial}{\partial\eta_1}\hat{\Gamma}(\eta) = \int_\Gamma x_1 e^{\langle\eta,x\rangle}dx \geqslant 0$; donc, dans $]-\infty,0]\times\mathbb{R}^n$, on a $\hat{\Gamma}(\eta_1+t,\eta_2,\ldots,\eta_n) \leqslant \hat{\Gamma}(\eta)$. Ces inégalités permettent d'établir sans difficulté, par des calculs analogues aux prédédents, que l'intégrale considérée est bien convergente, qu'elle peut être dérivée indéfiniment en x et η sous le signe $\int$, et qu'on a bien $\chi \in {}^{r-1}\sum^{\Gamma_1}$ (nous nous permettrons ici d'omettre les détails). On établit alors la formule $d_\eta(e^{-\langle \eta, x \rangle}\chi) = e^{-\langle \eta, x \rangle}\pi$ en considérant d'abord la forme obtenue en remplaçant dans l'expression de χ $\int_{-\infty}^{\bullet}$ par $\int_{-A}^{0}$ et en passant à la limite pour $A \longrightarrow +\infty$. Le théorème en résulte.

II. Systèmes homogènes : théorèmes d'approximation et de représentation intégrale.

Rappelons d'abord un résultat relatif à la division des distributions [4], que nous énoncerons dans le cas particulier dont nous aurons besoin (en fait, ce résultat est encore vrai lorsque les p_{jk} sont des polynomes en ζ et $\bar{\zeta}$).

Théorème 2.1. Soit $P = (p_{jk})$ une matrice $(1 \leqslant j \leqslant p,\ 1 \leqslant k \leqslant q)$ à coefficients polynomes en $\zeta \in \mathbb{C}^n$, et $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une fonction $\in [\mathcal{S}_{\xi,\eta}]^p$ $(\zeta = \xi + i\eta)$; pour qu'il existe $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_q) \in [\mathcal{S}_{\xi,\eta}]^q$ vérifiant $P(\zeta)\Psi = \Phi$ (on considère Φ et Ψ comme des matrices à une colonne), il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

(SF) En tout point $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, le développement de Taylor formel de Φ est de la forme $P(\zeta)F$, où F est une $q \times 1$-matrice à coefficients séries formelles.

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{R}_p$ des $q \times 1$ matrices $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_q \end{pmatrix}$ à coefficients polynomes en ζ, vérifiant $PR = 0$; $\mathcal{R}_p$ est un module sur l'anneau $\mathbf{C}[\zeta]$ des polynomes en ζ (à coefficients complexes) ; soit $R^1, \ldots, R^m$ un système fini de générateurs de $\mathcal{R}_p$ sur $\mathbf{C}[\zeta]$ (un tel système existe toujours d'après un théorème classique), et soit Q la $q \times m$ matrice (r_k^ℓ) $1 \leqslant \ell \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant q$. Le théorème 2.1, joint à un résultat connu d'algèbre [7] (utilisé de la même manière qu'ici dans [4]), entraine le corollaire suivant :

Corollaire 2.2. Si $\Phi \in [\mathcal{S}_{\xi,\eta}]^q$ vérifie $P(\zeta)\Phi = 0$, il existe $\Psi \in [\mathcal{S}_{\xi,\eta}]^m$ satisfaisant à $\Phi = Q(\zeta)\Psi$.

Remarque 2.3. Le théorème 2.1 et le corollaire 2.2 s'appliquent aussi bien à $\mathcal{S}^{\Gamma}_{\xi,\eta}$ qu'à $\mathcal{S}_{\xi,\eta}$: il suffit d'une multiplication par $\hat{\Gamma}(\eta)$ pour se ramener d'un cas à l'autre.

Nous pouvons maintenant établir un des résultats essentiels que nous avons en vue :

<u>Théorème</u> 2.4. <u>Soit</u> Γ <u>un compact convexe</u> $\subset \mathbb{R}$, <u>et</u> Φ <u>une fonction</u> $\in [\mathcal{S}^{\Gamma}]^p$, <u>holomorphe en</u> ζ <u>et vérifiant</u> (SF). <u>Pour tout convexe</u> Γ_1 <u>vérifiant</u> $\Gamma \subset \mathring{\Gamma}_1$, <u>il existe</u> $\Psi \in [\mathcal{S}^{\Gamma_1}]^q$, <u>holomorphe en</u> ζ, <u>et telle que</u> $P(\zeta)\Psi = \Phi$.

Introduisons, pour démontrer ce résultat, l'espace $[{}^r\mathcal{S}^{\Gamma}]^q$ des $q \times 1$ matrices Ω à coefficients $\in {}^r\mathcal{S}^{\Gamma}$: on a donc $\Omega = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots \\ \omega_q\end{pmatrix}$, avec $\omega_k \in {}^r\mathcal{S}^{\Gamma}$; on pose

$$d''\Omega = \begin{pmatrix}d''\omega_1\\ \vdots \\ d''\omega_q\end{pmatrix} \in [{}^{r+1}\mathcal{S}^{\Gamma}]^q \quad \text{et} \quad P(\zeta)\Omega = \sum_k p_{jk}(\zeta)\omega_k.$$

Appelons Th(r) l'énoncé suivant où r est un entier $\geqslant 0$:

Th(r) : <u>Soit</u> $\Phi \in [{}^r\mathcal{S}^{\Gamma}]^p$, <u>vérifiant les conditions suivantes</u> :

a) Il existe $\Psi_1 \in [{}^r\mathcal{S}^{\Gamma}]^q$ vérifiant $P(\zeta)\Psi_1 = \Phi$

b) $d''\Phi = 0$.

<u>Alors, il existe</u> $\Psi \in [{}^r\mathcal{S}^{\Gamma_1}]^q$ <u>vérifiant</u> $P(\zeta)\Psi = \Phi$ <u>et</u> $d''\Phi = 0$.

Compte tenu du théorème 2.1. et de la remarque 2.3, Th(0) est équivalent au théorème 2.4.

Démontrons Th(r) par récurrence descendante sur r : pour $r > n$, cet énoncé est trivial, puisque ${}^r\mathcal{S}^{\Gamma}$ est réduit à $\{0\}$. Supposons alors Th(r+1) établi. On a

$$P(\zeta)d''\Psi_1 = d''\Phi = 0$$

d'après le corollaire 2.2 et la remarque 2.3, on a

$$d''\Psi_1 = Q(\zeta)\Omega_1, \quad \text{avec} \quad \Omega_1 \in [{}^{r+1}\mathcal{S}^{\Gamma}]^m.$$

Soit Γ_2 un compact convexe vérifiant $\Gamma \subset \mathring{\Gamma}_2$, $\Gamma_2 \subset \mathring{\Gamma}_1$; on a $d''d''\Psi_1 = 0$; l'hypothèse de récurrence, appliquée à Q et au couple (Γ, Γ_2) montre qu'il existe $\Omega \in [{}^{r+1}\mathcal{S}^{\Gamma_2}]^m$ vérifiant $d''\Omega = 0$ et $d''\Psi_1 = Q(\zeta)\Omega$.

D'après le théorème 1.2, il existe $\tilde{\Omega} \in [{}^r\mathcal{S}^{\Gamma_1}]^m$ vérifiant $d''\tilde{\Omega} = \Omega$. On a alors $d''[\Psi_1 - Q(\zeta)\tilde{\Omega}] = 0$ et $P(\zeta)[\Psi_1 - Q(\zeta)\tilde{\Omega}] = P(\zeta)\Psi_1 = \Phi$, puisque $P\,Q = 0$; donc $\Psi = \Psi_1 - Q(\zeta)\tilde{\Omega}$ répond à la question. C.Q.F.D.

Notons maintenant par $P(D)$ l'opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^n_x$ obtenu en remplaçant, dans $P(\zeta)$, ζ_j par $-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. En appliquant le théorème 2.4 à P^* (défini par $P^* = (p^*_{jk})$ avec $p^*_{jk} = \bar{p}_{kj}$), et en utilisant des raisonnements connus [3], on obtient le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 2.5. <u>Soit</u> Θ <u>un ouvert convexe</u> $\subset \mathbb{R}^n$; <u>soit</u> V_p <u>le sous-espace de</u> $[\mathcal{E}(\Theta)]^q$ <u>formé des</u> $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix}$ <u>vérifiant</u> $P(D)F = 0$. <u>Les exponentielles-polynomes contenues dans</u> V_p <u>y forment un système total</u>.

<u>Même énoncé pour</u> $\mathcal{D}'(\Theta)$ (<u>ou</u> $\mathcal{E}^k(\Theta)$, <u>ou</u> $\mathcal{D}'^k(\Theta)$ <u>faible etc</u>...)

Dans le même ordre d'idées, on peut obtenir un énoncé plus précis, de la manière suivante : munissons $\mathcal{S}^\Gamma$ de la topologie définie par l'isomorphisme $\varphi \longrightarrow \hat{\Gamma}(\eta)\varphi$ de $\mathcal{S}_{\xi,\eta}$ sur $\mathcal{S}^\Gamma$, et désignons par $\mathcal{H}^\Gamma$ le sous espace des fonctions holomorphes contenues dans $\mathcal{S}^\Gamma$, sous-espace qui est évidemment fermé. On a, par le théorème de Paley-Wiener : $\mathcal{F}\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{H}^\Gamma$ ($\mathcal{F}$ = transformation de Fourier), et cet isomorphisme est topologique, d'après le théorème du graphe fermé, ou par des considérations élémentaires.

A toute forme linéaire continue f sur $\mathcal{D}(\Gamma)$ on peut alors associer (mais non d'une manière unique) une forme linéaire continue T sur $\mathcal{S}^{-\Gamma}$ ($-\Gamma$, symétrique de Γ par rapport à 0), vérifiant $\langle f, \bar{\varphi}\rangle = \langle T, \widetilde{\mathcal{F}\varphi}\rangle$ avec $\widetilde{\mathcal{F}\varphi}(\zeta) = \overline{\mathcal{F}\varphi(\bar{\zeta})}$ (théorème de Hahn-Banach). T est de la forme $\hat{\Gamma}^{-1}(-\eta)S$, avec $S \in \mathcal{S}'_{\xi,\eta}$, et T peut être considérée comme une "transformée de Fourier" de f (voir dans [1] une étude de ce type de questions). Cela dit, on a le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 2.6. <u>Soit</u> Θ <u>un ouvert</u> $\subset \mathbb{R}^n$, <u>et</u> $F \in [\mathcal{D}'(\Theta)]^q$ <u>une solution de</u> $P(D)F = 0$ <u>pour tout compact convexe</u> $\Gamma \subset \Theta$, <u>la distribution</u> F, <u>considérée comme forme linéaire continue sur</u> $[\mathcal{D}(\Gamma)]^q$, <u>admet une transformée de Fourier</u> T <u>vérifiant</u> $P(\zeta)T = 0$.

Ce résultat est inspiré d'un théorème de représentation intégrale annoncé par Ehrenpreis [2], (voir aussi dans Palamodov [8] un cas particulier), et en est très voisin. Pour s'exprimer d'une manière vague, il donne une "représentation" de F par une "intégrale" portant sur les exponentielles-polynomes solutions de la même équation. Ehrenpreis a montré dans [2] comment on peut déduire de telles formules les propriétés d'ellipticité, d'hypoellipticité, d'hyperbolicité, etc... des systèmes à coefficients constants.

D'autre part, ce théorème, joint au théorème de synthèse harmonique de Whitney - Schwartz [6] entraine facilement le théorème 2.5 (au moins dans $\mathcal{D}'$).

Pour le démontrer, considérons des compacts convexes Γ_1, Γ_2, $\Gamma_3 \subset \Theta$, avec $\Gamma \subset \mathring{\Gamma}_1$, $\Gamma_i \subset \mathring{\Gamma}_{i+1}$ $(i = 1, 2)$. Soit T' une transformée de Fourier de F considérée comme forme linéaire continue sur $[\mathcal{D}(\Gamma_3)]^q$; comme $P(D)F = 0$, la restriction de T' à $P^*(\zeta)[\mathcal{H}^{-\Gamma_3}]^p$ est nulle. Il en résulte que la restriction T" de T à $[\mathcal{H}^{-\Gamma_2}]^q$ s'annule sur $[\mathcal{H}^{-\Gamma_2}]^q \cap P^*(\zeta)[\mathcal{H}^{-\Gamma_3}]^p$, espace qui est égal à $[\mathcal{H}^{-\Gamma_2}]^q \cap P^*(\zeta)[\mathcal{S}^{-\Gamma_2}]^p$ d'après les théorèmes 2.1 et 2.4. Il en résulte que T" se prolonge d'une manière unique en une forme linéaire T"' sur $[\mathcal{H}^{-\Gamma_2}]^q + P^*(\zeta)[\mathcal{S}^{-\Gamma_2}]^p$, qui soit nulle sur $P^*(\zeta)[\mathcal{S}^{-\Gamma_2}]^p$. Pour démontrer le théorème, il suffit, par le théorème de Hahn-Banach, de montrer que la restriction de T"' à $[\mathcal{S}^{-\Gamma}]^q \cap \{[\mathcal{H}^{-\Gamma_2}]^q + P^*(\zeta)[\mathcal{S}^{-\Gamma_2}]^p\}$ est continue. Or cela résulte du lemme suivant (appliqué à P^*, $-\Gamma$, et $-\Gamma_2$ au lieu de P, Γ, Γ_2) :

Lemme 2.7. Pour que $\Phi \in [\mathcal{S}^{\Gamma}]^p$ soit de la forme $\Phi_1 + P(\zeta)\Phi_2$, avec $\Phi_1 \in [\mathcal{H}^{\Gamma_2}]^p$, $\Phi_2 \in [\mathcal{S}^{\Gamma_2}]^q$, il faut et il suffit qu'on ait $d''\Phi \in P(\zeta)[{}^1\mathcal{S}^{\Gamma}]^q$. De plus, si une suite (Φ^m) de fonctions de la forme précédente converge vers 0 dans $[\mathcal{S}^{\Gamma}]^p$, on peut choisir les Φ_1^m et les Φ_2^m de manière que la suite (Φ_1^m) tende vers 0 dans $[\mathcal{H}^{\Gamma_2}]^p$ et que la suite (Φ_2^m) tende vers 0 dans $[\mathcal{S}^{\Gamma_2}]^q$.

Si l'on a $\Phi = \Phi_1 + P(\zeta)\Phi_2$, on aura $d''\Phi = P(\zeta)d''\Phi_2$, donc $d''\Phi \in P(\zeta)[{}^1\mathcal{S}^{\Gamma_2}]^q$, et $d''\Phi \in P(\zeta)[{}^1\mathcal{S}^{\Gamma}]^q$ d'après le théorème 2.1. Réciproquement, supposons qu'on ait $d''\Phi = P(\zeta)\Psi$, avec $\Psi \in [{}^1\mathcal{S}^{\Gamma}]^q$; d'après Th(1), il existe $\Psi_1 \in [{}^1\mathcal{S}^{\Gamma_1}]^q$, vérifiant $d''\Phi = P(\zeta)\Psi_1$ et $d''\Psi_1 = 0$; d'après le théorème 1.2, il existe $\Phi_2 \in [\mathcal{J}^{\Gamma_2}]^q$ vérifiant $\Psi_1 = d''\Phi_2$; on a $d''[\Phi - P(\zeta)\Phi_2] = 0$; d'où la première assertion, en prenant $\Phi_1 = \Phi - P(\zeta)\Phi_2$.

Ce résultat, joint au théorème 2.1, montre que $[\mathcal{J}^{\Gamma}]^p \cap \{[\mathcal{H}^{\Gamma_2}]^p + P(\zeta)\,[\mathcal{J}^{\Gamma_2}]^q\}$ est fermé dans $[\mathcal{J}^{\Gamma}]^p$. La seconde assertion résulte alors du théorème du graphe fermé.

III. Systèmes avec second membre : théorème d'existence.

Lemme 3.1. Soit Γ un compact convexe $\subset \mathbb{R}^n$, et Φ une distribution $\in [\mathcal{E}'(\Gamma)]^p$ telle que $\mathcal{F}\Phi$ vérifie (SF). Pour tout convexe Γ_1 vérifiant $\Gamma \subset \mathring{\Gamma}_1$, il existe $\Psi \in [\mathcal{E}'(\Gamma_1)]^q$ tel qu'on ait $P(D)\Psi = \Phi$.

Le théorème 2.4 n'est autre que cet énoncé où l'on aurait remplacé $\mathcal{E}'$ par $\mathcal{D}$. Nous allons nous ramener à ce cas par régularisation. Soient Γ' et Γ'' deux compacts convexes vérifiant $\Gamma \subset \mathring{\Gamma}'$, $\Gamma' \subset \mathring{\Gamma}''$, $\Gamma'' \subset \mathring{\Gamma}_1$. Le théorème du graphe fermé, joint au théorème 2.4, montre ceci : il existe un entier $m \geqslant 0$ et une constante $K > 0$ tels que, pour tout $\Phi \in [\mathcal{D}(\Gamma'')]^p$ vérifiant (SF) et $\sum_{|k| \leqslant m} \|D^k \Phi\| \leqslant 1$ (D^k, une dérivation d'ordre $|k|$; les normes sont prises, par exemple dans L^∞), on puisse trouver $\Psi \in [\mathcal{D}(\Gamma_1)]^q$ vérifiant $P(D)\Psi = \Phi$, et $\|\Psi\| \leqslant K$.

Soit alors Φ une fonction $\in [\mathcal{D}^m(\Gamma')]^p$, vérifiant (SF) ; on peut trouver une suite α_i de fonctions $\in \mathcal{D}$, à support assez petit pour que $\alpha_i * \Phi$ ait son support dans Γ'', et telle que la suite $\alpha_i * \Phi$ converge vers Φ dans $[\mathcal{D}^m(\Gamma'')]^q$; on peut supposer (extraire au besoin une suite partielle) que la série $\alpha_o * \Phi + \sum_{i \geqslant o} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) * \Phi$ est normalement convergente dans $[\mathcal{D}^m(\Gamma'')]^p$. Ce qui précède montre alors qu'il existe une suite Ψ_i de fonctions $\in [\mathcal{D}(\Gamma_1)]^q$ vérifiant $P(D)\Psi_o = \alpha_o * \Phi$ et $P(D)\Psi_i = (\alpha_{i+1} - \alpha_i) * \Phi$, et telle que la série $\sum \Psi_i$ converge normalement dans $[\mathcal{D}^\bullet(\Gamma_1)]^q$. La somme Ψ de cette série vérifie bien $P(D)\Psi = \Phi$.

Soit enfin Φ une distribution $\in [\mathcal{E}'(\Gamma)]^p$, vérifiant (SF). Pour ℓ entier assez grand, soit $\varpi \in \mathcal{E}'$ une "paramétrix" de Δ^ℓ, i.e. $\Delta^\ell \varpi = \delta + \pi$, avec $\pi \in \mathcal{D}$; on peut supposer ϖ et φ de support assez petit pour que $\varpi * \Phi$ et $\pi * \Phi$ aient leur support dans Γ' (une telle ϖ s'obtient classiquement en prenant $\varpi = \alpha E$, E solution élémentaire de Δ^ℓ, et $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha = 1$ au voisinage de 0). Si ℓ est choisi assez grand, on aura d'après un théorème de régularité classique (et qui d'ailleurs est immédiat ici par transformation de Fourier) : $\varpi * \Phi \in [\mathcal{D}^m(\Gamma')]^q$; $\omega * \Phi$ vérifie évidemment (SF) donc $\varpi * \Phi = P(D)\Psi_1$, $\Psi_1 \in [\mathcal{D}^0(\Gamma_1)]^q$; de même $\pi * \Phi = P(D)\Psi_2$, $\Psi_2 \in [\mathcal{D}(\Gamma_1)]^q$; d'où $\Phi = \Delta^\ell \omega * \Phi - \pi * \Phi = P(D)\left[\Delta^\ell \Psi_1 - \Psi_2\right]$, ce qui démontre le lemme.

<u>Théorème</u> 3.2. <u>Soit</u> Θ <u>un ouvert convexe</u> $\subset \mathbb{R}^n$, <u>et</u> G <u>une fonction</u> $\in [\mathcal{E}(\Theta)]^p$; <u>pour qu'il existe</u> $F \in [\mathcal{E}(\Theta)]^q$ <u>vérifiant</u> $P(D)F = G$, <u>il faut et il suffit que</u> G <u>vérifie la condition suivante</u> :

(R) <u>Pour toute</u> $1 \times p$ <u>matrice</u> $Q = (q_1, \ldots, q_p)$ <u>à coefficients polynomes</u>, <u>vérifiant</u> $QP = 0$, <u>on a</u> $Q(D)G = 0$.

Le lemme 3.1, appliquée à $P^*(D)$, montre que $P^*(D)\,[\mathcal{E}'(\Theta)]^p$ est un sous-espace fermé de $[\mathcal{E}'(\Theta)]^q$. Par suite, $P(D)\,[\mathcal{E}(\Theta)]^q$ est un sous espace fermé de $[\mathcal{E}(\Theta)]^p$, que nous noterons V. Tout revient à montrer que V est dense dans le sous-espace de $[\mathcal{E}(\Theta)]^p$ formé des G qui vérifient (R). D'après le théorème 2.5 (applicable ici car les Q admettent un système fini de générateurs), il suffit de montrer que les exponentielles-polynomes vérifiant (R) sont dans V ; une telle exponentielle-polynome s'écrit $S(x)e^{i\langle\alpha, x\rangle}$, $\alpha \in \mathbb{C}^n$, S une $p \times 1$ matrice à coefficients polynomes. On se ramène tout de suite au cas où $\alpha = 0$, auquel cas il s'agit d'un problème d'algèbre bien connu (qui d'ailleurs, par transformation de Fourier, revient à la simple question de la division des distributions de support l'origine).

<u>Remarque</u> 3.3. En appliquant directement le théorème 2.4 et en raisonnant de la même

manière, on obtient le résultat suivant : si $G \in [\mathcal{D}'(\Theta)]^p$ vérifie $(\mathbb{R})$, pour tout compact convexe $\Gamma \subset \Theta$, il existe $F \in [\mathcal{D}(\Gamma)']^q$ vérifiant $P(D)F = G$. Ce résultat peut aussi s'obtenir, en se ramenant, par le théorème 2.6 (appliqué à G) à la division des distributions dans $\mathcal{S}'$ [4].

En particulier, on obtient, dans $\mathcal{D}'$, un énoncé <u>local</u> du théorème 3.2. Il me semble probable que l'énoncé global est vrai lui aussi dans $\mathcal{D}'$, et dans un certain nombre d'autres espaces de distributions.

-=-=-=-=-=-=-

BIBLIOGRAPHIE

[1] **L. Ehrenpreis** : Analytic functions and the Fourier transform of distributions, Ann. of Math., 63 (1956) pp. 129-159.

[2] **L. Ehrenpreis** : The fundamental principle and some of its applications, (non publié)

[3] **B..Malgrange** : Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles... Ann. Inst. Fourier 6 (1956) pp. 271-355

[4] **B. Malgrange** : Division des distributions, Exposés 21 - 25 Séminaire L. Schwartz, Paris 1959-60

[5] **L. Schwartz** : Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1950-51

[6] **L. Schwartz** : Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions, Can. Journal Math. 3 (1951) pp. 503-512

[7] **J.-P. Serre** : Géométrie analytique et géométrie algébrique, Ann. Inst. Fourier 6 (1956) pp. 1 - 42

[8] В. П. Паламодов: Об общем виде решения однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами Док. Ака. Наук С.С.С.Р. 137 (1961) pp. 774 - 777