Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

J. L. Lions

Quelques remarques sur les problèmes de Dirichlet et de Neumann

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. nº 6, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A6_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LES PROBLÈMES DE DIRICHLET ET DE NEUMANN

par

J.L. LIONS

§ 1. GENERALITÉS

1. Notations.

Si Ω est un ouvert de R^n, $H^{m,p}(\Omega)$ ($= W^{m,p}(\Omega)$) désigne l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$; muni de la norme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} ,$$

c'est un espace de Banach. On supposera toujours que $1 < p < \infty$.

On désigne par $H_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence dans $H^{m,p}(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

On désigne enfin par $H^{-m,p}(\Omega)$ le dual de $H_0^{m,p'}(\Omega)$ où $1/p + 1/p' = 1$.

Nous supposerons toujours dans la suite que Ω est un ouvert borné de frontière suffisamment régulière.

2. Position des problèmes.

2.1. Nous considérons l'opérateur

$$A = -\Delta + 1 \tag{2.1}$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2 \quad .$$

Nous supposerons connus les résultats suivants (cf. [1]) :

$$\begin{cases} A \text{ est un isomorphisme de } H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega) \text{ sur } L^p(\Omega), \\ \text{pour tout } p \text{ avec } 1 < p < \infty \end{cases} \tag{2.2}$$

(C'est le problème de Dirichlet) ;

par ailleurs introduisons l'espace des $u \in H^{2,p}(\Omega)$ telles que la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ de u sur Γ = frontière de Ω soit <u>nulle</u> ; cela a un sens : par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{1,p}(\Omega)$ et alors on peut définir $(\frac{\partial u}{\partial x_i})_\Gamma$ "trace de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sur Γ" ; c'est <u>par exemple</u> un élément de $L^p(\Gamma)$; alors $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ équivaut à $\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})_\Gamma \nu_i = 0$, $\nu_i = i^{\text{ème}}$ cosinus directeur de la normale n à Γ . <u>On désignera cet espace par</u>

$$\left\{H^{2,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\} .$$

Avec cette notation :

(2.3) $\begin{cases} A \text{ <u>est un isomorphisme de</u> } \left\{H^{2,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\} \text{ <u>sur</u> } L^p(\Omega), \text{ <u>pour</u>} \\ \text{<u>tout</u> } p, \text{ <u>avec</u> } 1 < p < \infty . \end{cases}$

2.2. Nous <u>transposons</u> maintenant (2.2) et (2.3) utilisés pour p'. Commençons par (2.2). On obtient :

(2.4) A^* est un isomorphisme de $L^p(\Omega)$ sur $(H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'})'$ (1); pour pour $f \in L^p(\Omega)$, A^*f est définie par

(2.5) $\langle A^*f, \bar{v} \rangle = \langle f, \overline{Av} \rangle = \int_\Omega f(x)\, \overline{Av(x)}\, dx \quad , \quad v \in H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'}$.

Mais si $f \in H^{2,p} \cap H_0^{1,p}$, on a : $\langle f, \overline{Av} \rangle = \langle Af, \bar{v} \rangle$ donc $A^*f = Af$.

On peut donc considérer A^* comme un <u>prolongement par continuité de</u> A et donc :

(2.6) A <u>est un isomorphisme</u> de $L^p(\Omega)$ <u>sur</u> $(H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'})'$

<u>Remarque</u> 2.1. Naturellement nous avons utilisé la symétrie de $-\Delta + 1$; si l'on part d'un opérateur non symétrique, on transpose le résultat (2.2) pour p' et A^* (supposé valable !).

De la même façon :

(2.7) A <u>est un isomorphisme de</u> $L^p(\Omega)$ <u>sur</u> $\left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}'$

---

(1) Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, nous supprimons Ω . Naturellement, $(H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'})'$ <u>n'est pas</u> un espace de distributions sur Ω .

2.3. L'utilisation de (2.6) et (2.7).

Il y a deux façons d'utiliser (2.6) et (2.7) :

a) ou bien on cherche, parmi les éléments de $(H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'})'$, certains éléments qui puissent se représenter comme somme d'une distribution sur Ω et d'une distribution sur Γ ; par exemple, on prendra :

$$(2.8) \quad L(v) = \int_\Omega f\, v\, dx + \left\langle g, \frac{\partial v}{\partial n} \right\rangle \quad , v \in H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'} ,$$

où $f \in H^{-1,p}(\Omega)$ et où $g \in$ espace dual de l'espace décrit par $\frac{\partial v}{\partial n}$ (ceci peut être précisé ; cf. § 4), puis on interprète (2.6) pour ce choix particulier de $L \in (H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'})'$.

En fait on peut prendre f dans un espace plus grand que $H^{-1,p}(\Omega)$, soit en introduisant des dérivées fractionnaires, soit des poids[(1)].

Ce point de vue est celui des problèmes dits de Visik-Sobolev (cf. [16], [7], [12]). Une fois ce problème interprété, on utilise la théorie de l'interpolation ; c'est ce qui est systématiquement développé dans les articles [10][(2)].

Même chose pour l'utilisation de (2.7).

b) deuxième possibilité : on utilise directement la théorie de l'interpolation sur (2.6) ou (2.7), puis on interprète ensuite les résultats obtenus. Cette idée est dûe à Schechter [15], qui utilise l'interpolation complexe (cf. [3], [6])[(3)].

---

(1) Cela sera développé ailleurs. J'indique ces propriétés après discussions avec MM. E. Magenes et J. Nečas.

(2) Il y a lieu d'utiliser également l'interpolation par les traces. Nous y reviendrons ailleurs.

(3) Avec $f \in H^{-1,p}(\Omega)$. L'étude de cas plus généraux est faite dans un article en préparation de E. Magenes et le conférencier.

Remarque 2.2. Les deux procédés sont essentiellement "commutatifs". Suivant le résultat que l'on a en vue, l'un ou l'autre des procédés peut être plus rapide.

Nous allons ici expliciter certaines des applications de la méthode a).

Remarque 2.3. Naturellement, nous avons pris ici $A = -\Delta + 1$ et les conditions de Dirichlet et Neumann comme exemples types. La méthode est générale et s'applique aux opérateurs elliptiques d'ordre $2m$ avec "toutes" les conditions aux limites. Cf. [10], [15].

Remarque 2.4. Ce même genre de procédé est utile dans des cas "abstraits", i.e. avec des opérateurs A qui ne sont pas des opérateurs différentiels mais des opérateurs non bornés abstraits, par exemple des générateurs infinitésimaux de semi-groupes. Cf. [8]. Ou bien avec des opérateurs non elliptiques [11].

§ 2. DÉTERMINATION DE QUELQUES ESPACES D'INTERPOLATION

1. Espaces $[A_0, A_1, \delta(\Theta)]$ ([3], [6]).

Soient A_0 et A_1 deux espaces de Banach, $A_i \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ espace vectoriel topologique, l'injection de A_i dans $\mathcal{A}$ étant continue. On désigne par $A_0 + A_1$ l'espace des $a \in \mathcal{A}$ de la forme $a = a_0 + a_1$, $a_i \in A_i$; muni de la norme

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}) ,$$

c'est un espace de Banach.

Soit $\mathcal{H}(A_0,A_1)$ l'espace des fonctions $\zeta \to f(\zeta)$ holomorphes dans la bande $0 < \xi < 1$ ($\zeta = \xi + i\eta$) à valeurs dans $A_0 + A_1$, continues et bornées de $0 \leq \xi \leq 1 \to A_0 + A_1$, telles que $f(i\eta) \in A_0$, $f(1 + i\eta) \in A_1$, la fonction $\eta \to f(k + i\eta)$, $k = 0,1$ étant continue et bornée de $R_\eta \to A_k$; muni de la norme

$$\max(\sup_\eta \|f(i\eta)\|_{A_0} \ , \ \sup_\eta \|f(1+i\eta)\|_{A_1}) = \|f\|_{\mathcal{H}(A_0,A_1)}$$

c'est un espace de Banach.

On désigne par $[A_0, A_1, \delta(\Theta)]$ l'image de $\mathcal{H}(A_0,A_1)$ dans l'application $f \to f(\Theta)$, $(0 < \Theta < 1)$ de $\mathcal{H}(A_0,A_1) \to A_0 + A_1$. Muni de la norme

$$\|a\|_{[A_0,A_1,\delta(\Theta)]} = \inf_{f(\Theta)=a} \|f\|_{\mathcal{H}(A_0,A_1)} \quad ,$$

c'est un espace de Banach.

On utilisera systématiquement la <u>propriété d'interpolation de ces espaces</u> : si π <u>est un opérateur linéaire continu de</u> A_i <u>dans</u> B_i (1), $i = 0,1$, <u>alors pour chaque</u> Θ , $0 < \Theta < 1$, π <u>est un opérateur linéaire continu de</u> $[A_0,A_1,\delta(\Theta)]$ <u>dans</u> $[B_0, B_1, \delta(\Theta)]$ (2).

Le résultat suivant est dû à Caldéron (à paraître) : <u>si</u> A_0 <u>et</u> A_1 <u>sont réflexifs</u>, $[A_0,A_1,\delta(\Theta)]' = [A_0', A_1', \delta(\Theta)]$.

Notons enfin ceci : si π est un isomorphisme de A_i sur B_i , c'est également un isomorphisme de $[A_0,A_1,\delta(\Theta)]$ sur $[B_0,B_1,\delta(\Theta)]$.

On va maintenant construire explicitement certains espaces $[A_0,A_1,\delta(\Theta)]$.

2. <u>Espaces</u> $H^{\alpha,p}(R^n)$.

<u>Définition</u> 2.1. Pour $\alpha \in R$, on désigne par $H^{\alpha,p}(R^n)$ l'espace des distributions tempérées u telles que

$$(2.1) \quad \begin{cases} g^{(\alpha)}u = \mathcal{F}^{-1}((1+\xi^2)^{\alpha/2}\mathcal{F}u) \in L^p(R^n), \\ \mathcal{F} = \text{transformation de Fourier}, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 \ . \end{cases}$$

(1) On suppose que $A_0 \cap A_1$ est dense dans A_i et que les B_i ont des propriétés analogues (sans nécessairement la densité de $B_0 \cap B_1$ dans B_i).

(2) Pour les inégalités entre les normes, cf. [2], [4].

Norme : $\|u\|_{H^{\alpha,p}} = \|g^{(\alpha)}u\|_{L^p}$. Pour α entier >0 , on retrouve les espaces du § 1, n°1, $\Omega = R^n$.

On a alors le

THÉORÈME 2.1. $[H^{m,p}(R^n),\ H^{o,p}(R^n), \delta(\Theta)] = H^{(1-\Theta)m,p}(R^n)$

(où $H^{o,p}(R^n) = L^p(R^n)$) , avec des normes équivalentes.

Plus généralement

THÉORÈME 2.2. $[H^{\alpha_0,p}(R^n),\ H^{\alpha_1,p}(R^n), \delta(\Theta)] = H^{(1-\Theta)\alpha_0+\Theta\alpha_1,p}(R^n)$.

Démonstration.

Posons $\lambda_k = (1+\zeta^2)^{\alpha_k/2}$, $k = 0,1$, et $\alpha = (1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1$.

1) Soit $u \in [H^{\alpha_0,p}, H^{\alpha_1,p}, \delta(\Theta)]$. Alors il existe $f \in \mathcal{H}(A_0,A_1)$, $A_i = H^{\alpha_i,p}$ avec $f(\Theta) = u$. Quitte à remplacer f par $e^{(\zeta-\Theta)^2}f$, on peut supposer que $f(k+i\eta)$, $k = 0,1$, est à décroissance en $e^{-\eta^2}$. Introduisons :

$$g(\zeta) = \lambda_0^{1-\zeta}\ \lambda_1^{\zeta}\ \hat{f}(\zeta) ,$$

où

$$\hat{f}(\zeta) = \mathcal{F} f(\zeta).$$

Considérons $g(i\eta) = (\lambda_1/\lambda_0)^{i\eta}\,(\lambda_0\,\hat{f}(i\eta))$. La fonction $(\lambda_1/\lambda_0)^{i\eta}$ est un multiplicateur sur $\mathcal{F}L^p$ de norme $\leq C(1+\eta)^n$ (d'après le théorème de Michlin [13]). Alors $g(i\eta) \in \mathcal{F}L^p$ et y demeure dans un borné lorsque $\eta \in R$. Même chose pour $g(1+i\eta)$. Donc $g(\zeta) \in \mathcal{F}L^p$ pour tout ζ , donc $g(\Theta) = \lambda_0^{1-\Theta}\lambda_1^{\Theta}\,\hat{u} \in \mathcal{F}L^p$ d'où $u \in H^{\alpha,p}$ et $[A_0,A_1, \delta(\Theta)] \subset H^{\alpha,p}$.

2) Réciproquement, soit $u \in H^{\alpha,p}$. Introduisons $f(\zeta)$ par

$$\hat{f}(\zeta) = e^{(\zeta-\Theta)^2}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\zeta-\Theta}\hat{u} .$$

Alors $f(\Theta) = u$ et appliquant encore le théorème de Michlin,

$\lambda_0 f(i\eta)$ et $\lambda_1 f(1+i\eta)$ sont dans $\mathcal{F}L^p$ et y demeurent dans des bornés, d'où $f \in \mathcal{H}(A_0,A_1)$, donc $H^{\alpha,p} \subset [H^{\alpha_0,p}, H^{\alpha_1,p}, \delta(\Theta)]$, cqfd.

N.B. La démonstration précédente est inspirée de la démonstration de Aronszajn [2] du résultat d'interpolation de [9 bis].

Remarque 2.1. Le dual de $H^{\alpha,p}(R^n)$ est $H^{-\alpha,p'}(R^n)$.

3. Espaces $H^{m,p}(\Omega)$.

THEOREME 3.1. *Soit Ω ouvert de frontière assez régulière. Alors*

$$[H^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega), \delta(\Theta)]$$

coïncide avec l'espace des restrictions à Ω de $H^{(1-\Theta)m,p}(R^n)$.

Démonstration.

1) Soit r_Ω l'application "restriction à Ω". C'est un opérateur linéaire continu de $H^{m,p}(R^n) \to H^{m,p}(\Omega)$, m entier $\geqslant 0$ quelconque, donc, par interpolation, de $[H^{m,p}(R^n), L^p(R^n), \delta(\Theta)] \to [H^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega), \delta(\Theta)]$. Or d'après le theorème 2.1, le premier espace est $H^{(1-\Theta)m,p}(R^n)$ de sorte que $[H^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega), \delta(\Theta)]$ contient l'espace des restrictions à Ω de $H^{(1-\Theta)m,p}(R^n)$.

2) Le point 1) est valable avec Ω quelconque. Le deuxième point suppose la frontière assez régulière ; il existe alors une application linéaire continue $u \to Pu$ de $H^{k,p}(\Omega) \to H^{k,p}(R^n)$, $0 \leqslant k \leqslant m$, k entier, telle que $r_\Omega Pu = u$. Par interpolation, $u \to Pu$ est linéaire continue de $[H^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega), \delta(\Theta)]$ dans $H^{(1-\Theta)m,p}(R^n)$, d'où l'inclusion inverse et le théorème.

Remarque 3.1. Pour l'étude de conditions géométriques générales sous lesquelles P existe, cf. [2 bis].

COROLLAIRE 3.1. Si Ω est un ouvert de frontière assez régulière et si $(1-\Theta)m$ est entier, alors

(3.1) $$[H^{m,p}(\Omega),\ L^p(\Omega),\ \delta(\Theta)] = H^{(1-\Theta)m,p}(\Omega)$$

avec normes équivalentes.

Pour $(1-\Theta)m$ non entier on prendra (3.1) comme définition de $H^{(1-\Theta)m,p}(\Omega)$.

Remarque 3.2. Le résultat (3.1) peut être inexact pour des Ω de frontières irrégulières.

4. Espaces $H_0^{m,p}(\Omega)$.

Nous nous bornons ici au

THEOREME 4.1. Si Ω est un ouvert de frontière assez régulière, on a :

(4.1) $$[H_0^{2,p}(\Omega),\ L^p(\Omega),\ \delta(1/2)] = H_0^{1,p}(\Omega).$$

avec normes équivalentes.

Démonstration.

1) Comme $H_0^{2,p}(\Omega) \subset H^{2,p}(\Omega)$ l'espace $X = [H_0^{2,p}(\Omega),\ L^p(\Omega), \delta(1/2)]$ est contenu dans

$$[H^{2,p}(\Omega)\ ,\ L^p(\Omega)\ ,\ \delta(1/2)] = H^{1,p}(\Omega) \quad \text{(Corollaire 3.1).}$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans X, on en déduit que $X \subset H_0^{1,p}(\Omega)$.

2) Il existe une application linéaire $u \longrightarrow Qu$ de $H^{m,p}(R^n) \longrightarrow H_0^{m,p}(\Omega)$, $m = 1,2$, telle que $Q\tilde{\varphi} = \varphi$ si $\varphi \in H_0^{m,p}(\Omega)$, $\tilde{\varphi}$ = prolongement de φ par 0 hors de Ω. Alors, par interpolation, Q applique $H^{1,p}(R^n)$ dans X. Or Q applique $H^{1,p}(R^n)$ sur $H_0^{1,p}(\Omega)$ d'où l'inclusion inverse du point 1) et le théorème.

Voici une variante :

THÉORÈME 4.2. <u>Si</u> Ω <u>est un ouvert de frontière assez régulière on a</u> :

$$[H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)\ ,\ L^p(\Omega)\ ,\ \delta(1/2)] = H_0^{1,p}(\Omega) \tag{4.2}$$

<u>Démonstration</u>.

1) Puisque $H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega) \supset H_0^{2,p}(\Omega)$, on déduit du Théorème 4.1 que

$$Y = [H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)\ ,\ L^p(\Omega)\ ,\ \delta(1/2)] \supset H_0^{1,p}(\Omega).$$

2) Mais par ailleurs $Y \subset [H^{2,p}(\Omega),\ L^p(\Omega),\ \delta(1/2)] = H^{1,p}(\Omega)$. On vérifie que $H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)$ est dense dans Y. Donc $Y \subset$ adhérence de $H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)$ dans $H^{1,p}(\Omega)$, i.e. $H_0^{1,p}(\Omega)$ d'où le théorème.

Voici une autre variante :

THÉORÈME 4.3. <u>Si</u> Ω <u>est un ouvert de frontière assez régulière on a</u> :

$$[\ \{H^{2,p}(\Omega)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}\ ,\ L^p(\Omega)\ ,\ \delta(1/2)] = H^{1,p}(\Omega).$$

<u>Démonstration</u>.

1) Puisque $\{H^{2,p}(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0\} \subset H^{2,p}(\Omega)$, on a évidemment

$$Z = [\ \{H^{2,p}(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}\ ,\ L^p(\Omega)\ ,\ \delta(1/2)] \subset H^{1,p}(\Omega).$$

2) Pour montrer l'inclusion inverse, considérer une application $u \to Qu$ linéaire continue de $H^{2,p}(R^n) \to \{H^{2,p}(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}$, $L^p(R^n) \to L^p(\Omega)$, et surjective de $H^{1,p}(R^n) \to H^{1,p}(\Omega)$ [pour construire Q on se ramène, par partition de l'unité, au cas où u est à support dans un voisinage assez petit de Γ où l'on peut prendre des coordonnées $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \rho$, ρ = distance normale à Γ ; alors $Qu(\sigma,\rho) = 1/2(u(\sigma,\rho) + u(\sigma,-\rho))$]. Alors Q est linéaire continu de

$$[H^{2,p}(R^n),\ L^p(R^n),\ \delta(1/2)] = H^{1,p}(R^n) \to Z\ ,$$

d'où l'inclusion inverse.

§ 3. APPLICATIONS

1. Problème de Dirichlet.

Nous reprenons les remarques du § 1, n°2. Nous avons, avec $A = -\Delta + 1$:

(1.1) A est un isomorphisme de $H^{2,p} \cap H_0^{1,p}$ sur L^p,

(1.2) A " " " L^p sur $(H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'})'$.

Par conséquent (§ 2, n°1)

$$(1.3)\quad \begin{cases} A \text{ est un isomorphisme de } [H^{2,p} \cap H_0^{1,p}, L^p, \delta(\Theta)] \text{ sur} \\ [L^p, (H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'})', \delta(\Theta)] \end{cases}$$

En utilisant le théorème de dualité de Caldéron, on en déduit que

$$(1.4)\quad \begin{cases} A \text{ est un isomorphisme de } [H^{2,p} \cap H_0^{1,p}, L^p, \delta(\Theta)] \text{ sur} \\ [H^{2,p'} \cap H_0^{1,p'}, L^{p'}, \delta(1-\Theta)]' \quad (1) \end{cases}$$

Appliquant cela en particulier pour $\Theta = 1/2$ et utilisant le théorème 4.2 § 2, on en déduit le

THÉORÈME 1.1. L'opérateur A est un isomorphisme de $H_0^{1,p}(\Omega)$ sur $H^{-1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.1. On peut démontrer directement le théorème 1.1 sans utiliser l'interpolation, comme on a fait dans [10].

Remarque 1.2. Supposons que l'on sache seulement que

$$[H^{2,p} \cap H_0^{1,p}, L^p, \delta(1/2)] = X_p$$

est contenu dans $H_0^{1,p}(\Omega)$. Alors (1.4) montre que A est un isomorphisme de

---

(1) On utilise aussi : $[A_0, A_1, \delta(\Theta)] = [A_1, A_0, \delta(1-\Theta)]$.

X_p sur $(X_{p'})'$; $X_p \subset H^{1,p}_0(\Omega)$ et $(X_{p'})' \supset H^{-1,p}(\Omega)$, or,

$$A \in \mathcal{L}(H^{1,p}_0(\Omega);\ H^{-1,p}(\Omega))$$

donc $(X_{p'})' \subset H^{-1,p}(\Omega)$ d'où $X_p = H^{1,p}_0(\Omega)$.

Remarque 1.3. On peut ensuite interpoler entre (1.1) et le théorème 1.1, ou bien entre le théorème 1.1 et (1.2) et ceci par la méthode complexe ou la méthode des traces. C'est ce qui est fait dans [10].

2. Problème de Neumann.

Nous utilisons maintenant (2.3) et (2.7), § 1. On en déduit

$$(2.1)\quad \begin{cases} A \text{ est un isomorphisme de } \left[\left\{H^{2,p}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}, L^p, \delta(\Theta)\right] \text{ sur} \\ \left[L^p, \left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}', \delta(\Theta)\right] = \left[\left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}, L^{p'}, \delta(1-\Theta)\right]' \end{cases}$$

Prenant $\Theta = 1/2$ en particulier, et utilisant le théorème 4.3, § 2, on a :

(2.2) A est un isomorphisme de $H^{1,p}(\Omega)$ sur $(H^{1,p'}(\Omega))'$.

Interprétons ce résultat. Pour $f \in L^p(\Omega)$, $Af \in \left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}'$ est défini par

$$(2.3)\quad \langle Af, \bar{v} \rangle = \int_\Omega f(-\Delta\bar{v} + \bar{v})dx\ , \quad \forall v \in \left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\} .$$

Mais si $f \in H^{1,p}(\Omega)$, $\int_\Omega f(-\Delta\bar{v})dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx$ pour $v \in \left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}$ de sorte que

$$(2.4)\quad \langle Af, \bar{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_\Omega f\, \bar{v}\, dx .$$

On va en déduire le

THÉORÈME 2.1. Si $v \longrightarrow L(v)$ est une forme linéaire continue sur $H^{1,p'}(\Omega)$, il existe $f \in H^{1,p}(\Omega)$ unique avec

$$(2.5) \qquad L(v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega f\, v\, dx \quad \forall\, v \in H^{1,p'}(\Omega).$$

Démonstration. Soit f avec $Af = L$, $f \in H^{1,p}(\Omega)$; f existe et est unique, d'après (2.2). D'après (2.4) on en déduit (2.5) $\forall\, v \in \left\{H^{2,p'}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}$ d'où (2.5) par prolongement par continuité en v. Cqfd.

Remarque 2.1. Le résultat du théorème 2.1 est immédiat si $p = 2$. Il vaut alors avec un ouvert Ω quelconque. Au contraire (2.5) n'est établi pour $p \neq 2$ que pour Ω de frontière suffisamment régulière. Il semble probable que le théorème 2.1 ne soit pas vrai avec un ouvert quelconque.

Remarque 2.2. Un résultat analogue au théorème 2.1 vaut pour les formes linéaires continues sur $H^{m,p}(\Omega)$, m entier quelconque. Pour les espaces $W^{\alpha,p}(\Omega)$, α fractionnaire, cf. [10], article (V).

§ 4. PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES

1. Espaces de traces.

1.1. Espaces $W^{s,p}(R^n)$, $0 < s < 1$.

On désigne par $W^{s,p}(R^n)$ l'espace des $u \in L^p(R^n)$ tels que

$$(1.1) \quad \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \int_{R^n} |u(x_1,\dots,x_{i-1}, x_i+t, x_{i+1},\dots,u_n) - u(x)|^p dx\, dt\right)^{1/p} < \infty$$

pour $i = 1,\dots, n$, avec $s = 1 - (1/p + \alpha)$ (1).

On définit $W^{s,p}(\Gamma)$, Γ = frontière de Ω, par cartes locales.

(1) Norme dans $W^{s,p}$ = norme dans L^p + somme des expressions (1.1) pour $i = 1,\dots, n$.

Le résultat suivant est dû à Gagliardo [5] : pour $u \in W^{1,p}(\Omega) = H^{1,p}(\Omega)$, on peut définir $\gamma_o u$ = trace de u sur Γ, $\gamma_o u \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$, l'application $u \to \gamma_o u$ étant linéaire continue surjective de $W^{1,p}(\Omega)$ sur $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$; le noyau de γ_o est $H_o^{1,p}(\Omega) = W_o^{1,p}(\Omega)$.

Cf. résultat plus général dans [9].

1.2 Espaces $W^{s,p}$, $s > 1$.

On définit par exemple $W^{1+\Theta,p}(R^n)$, $0 < \Theta < 1$, comme l'espace des $u \in W^{1,p}(R^n) = H^{1,p}(R^n)$ tels que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{\Theta,p}(R^n)$, $i = 1,\dots, n$.

On définit $W^{s,p}(\Gamma)$ par cartes locales. Idem pour tout $s > 0$.

Le résultat suivant est dû à Slobodetzki [15 bis] (cf. résultat plus général dans [9 ter]) : pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$, on peut définir

$$\gamma u = \left\{\gamma_o u, \dots, \gamma_{m-1} n\right\} ,$$

$\gamma_j u$ = trace de $\frac{\partial^j u}{\partial n^j}$ sur Γ ; l'application $u \to \gamma u$ est linéaire continue et surjective de $W^{m,p}(\Omega)$ sur

$$\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-1/p,p}(\Gamma) .$$

Le noyau de γ est $W_o^{m,p}(\Omega)$.

2. Problème de Neumann non homogène.

2.1. On va utiliser la méthode (a), 2.3, n°2, § 1. On part de :

(2.1) A est un isomorphisme de $L^p(\Omega)$ sur $\left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}'$.

Considérons :

f donné dans $L^p(\Omega)$ (1),

---

(1) Ceci peut être généralisé. Cf. Note (1), p.3.

g donné dans $W^{-1-1/p,p}(\Gamma) = (W^{1+1/p,p'}(\Gamma))'$;

alors

(2.2) $$L(v) = \int_\Omega f\, v\, dx + \langle g, \gamma_0 v\rangle$$

(où le crochet désigne la dualité entre $W^{-1-1/p,p}(\Gamma)$ et $W^{1+1/p,p'}(\Gamma)$)

est une forme linéaire continue sur $\left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}$. Donc, <u>il existe</u> u <u>unique dans</u> $L^p(\Omega)$ <u>tel que</u>

(2.3) $$\int_\Omega u(-\Delta+1)v\, dx = L(v) \qquad \forall v \in \left\{H^{2,p'}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\} .$$

2.2. Reste à interpréter (2.3). Prenant d'abord $\sigma = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il vient

(2.4) $$(-\Delta + 1)u = f.$$

Raisonnons maintenant (et <u>provisoirement</u>) de façon formelle. On déduit de (2.4) que :

$$\int_\Omega f\, v\, dx = -\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) v\, d\sigma + \int_\Gamma u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma + \int_\Omega u(-\Delta v + v)dx .$$

Comme $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur Γ , et puisque $\int_\Omega u(-\Delta v + v)dx = L(v)$ on en tire

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) v\, d\sigma = \langle g, \gamma_0 v\rangle$$

d'où

(2.5) $$\frac{\partial u}{\partial n} = g .$$

2.3. <u>Justification du point</u> 2.2.

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. <u>Si</u> $u \in L^p(\Omega)$ <u>avec</u> $\Delta u \in L^p(\Omega)$, <u>alors on peut définir de façon unique</u> $\gamma_0 u \in W^{-1/p,p}(\Gamma)$ <u>et</u> $\gamma_1 u \in W^{-1-1/p,p}(\Gamma)$ (1).

---

(1) Les applications γ_i sont continues pour les topologies naturelles.

Démonstration.

1) On montre d'abord que les fonctions régulières dans $\overline{\Omega}$ sont denses dans l'espace des $u \in L^p(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^p(\Omega)$.

2) Considérons φ_o, $\varphi_1 \in W^{2-1/p',p'}(\Gamma) \times W^{1-1/p',p'}(\Gamma)$ et sur $v \in W^{2,p'}(\Omega) = H^{2,p'}(\Omega)$ avec

$$(2.6) \qquad \gamma_o v = \varphi_o , \quad \gamma_1 v = \varphi_1 .$$

La quantité

$$(2.7) \qquad X(v) = \int_\Omega (u \Delta v - v \Delta u) dx$$

est indépendante du choix de v (satisfaisant à (2.6)) ; en effet si v_1 est un deuxième choix, $v - v_1 \in W_o^{2,p'}(\Omega)$ et $X(v - v_1) = 0$.

On pose donc

$$(2.8) \qquad X(v) = Y(\varphi_o, \varphi_1)$$

d'où une forme linéaire continue sur $W^{2-1/p',p'}(\Gamma) \times W^{1-1/p',p'}(\Gamma)$.

Donc :

$$Y(\varphi_o, \varphi 1) = \langle h, \varphi_1 \rangle - \langle g, \varphi_o \rangle ,$$

$$h \in (W^{1-1/p',p'}(\Gamma))' = W^{-1/p',p}(\Gamma) ,$$

$$g \in (W^{2-1/p',p'}(\Gamma))' = W^{-1-1/p,p}(\Gamma).$$

Par définition :

$$h = \gamma_o u , \quad g = \gamma_1 u ;$$

la définition est justifiée en prenant u régulière dans $\overline{\Omega}$.

Remarque 2.1. Si $u \in L^p(\Omega)$, $\Delta u \in L^p(\Omega)$ alors $u \in H^{2,p}(\Omega')$ pour tout ouvert Ω' avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ (mais $u \notin H^{2,p}(\Omega)$) ; on peut alors définir $\gamma_o^{(t)} u$, $\gamma_1^{(t)} u$ sur des surfaces $\Gamma^{(t)}$ voisines de Γ . Etablissant un difféomorphisme entre $\Gamma^{(t)}$ et Γ, on peut considérer les $\gamma_o^{(t)}u$ et $\gamma_1^{(t)}u$ <u>sur</u> Γ ; $\gamma_o^{(t)}u \in W^{2-1/p,p}(\Gamma)$ et <u>tend vers</u> $\gamma_o u$ <u>lorsque</u> $t \to 0$ <u>au sens de</u> $W^{-1/p,p}(\Gamma)$; $\gamma_1^{(t)}u \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ <u>et tend vers</u> $\gamma_1 u$ lorsque $t \to 0$ <u>au sens de</u> $W^{-1-1/p,p}(\Gamma)$ (cf. [10]).

Il est maintenant facile de vérifier, à partir du point 2.2, le

THÉORÈME 2.2. <u>Pour</u> f <u>donnée dans</u> $L^p(\Omega)$ <u>et</u> g <u>donnée dans</u> $W^{-1-1/p,p}(\Gamma)$, <u>il existe</u> u <u>unique dans</u> $L^p(\Omega)$ <u>avec</u>

(2.4) $$(-\Delta + 1)u = f,$$

(2-5) $$\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma_1 u = g.$$

2.4. Du fait que A est un isomorphisme de $\left\{H^{2,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}$ sur $L^p(\Omega)$ et des théorèmes de traces on déduit aussitôt le :

THÉORÈME 2.3. <u>Pour</u> f <u>donnée dans</u> $L^p(\Omega)$ <u>et</u> g <u>donnée dans</u> $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ <u>il existe</u> u <u>unique dans</u> $H^{2,p}(\Omega)$ <u>avec</u>

(2.9) $$(-\Delta + 1)u = f,$$

(2.10) $$\gamma_1 u = g.$$

2.5. On peut maintenant <u>interpoler</u> entre les théorèmes 2.2 et 2.3. Ainsi, <u>par exemple</u> :

$\{f, g\} \longrightarrow u$ est une application linéaire continue de

$$L^p(\Omega) \times W^{1-1/p,p}(\Gamma),\ L^p(\Omega) \times W^{-1-1/p,p}(\Gamma), \ldots \delta(\Theta)] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow [H^{2,p}(\Omega),\ L^p(\Omega),\ \delta(\Theta)] = H^{2(1-\Theta),p}(\Omega).$$

Ou encore :

(2.11) $$\begin{cases} \underline{\text{pour}} \quad f \in L^p(\Omega), \quad g \in [W^{1-1/p,p}(\Gamma),\ W^{-1-1/p,p}(\Gamma),\ \delta(\Theta)] \\ \underline{\text{on a}} \quad u \in H^{2(1-\Theta),p}(\Omega). \end{cases}$$

Une caractérisation de l'espace $[W^{1-1/p,p}(\Gamma), W^{-1-1/p,p}(\Gamma), \delta(\Theta)]$ semble délicate. Toutefois, si $\Theta = 1/2$, il résulte de [10], article (V), que

$$[W^{1-1/p,p}(\Gamma), W^{-1-1/p,p}(\Gamma), \delta(1/2)] = W^{-1/p,p}(\Gamma) .$$

Donc

(2.12) pour $f \in L^p(\Omega)$, $g \in W^{-1/p,p}(\Gamma)$ on a : $u \in H^{1,p}(\Omega)$.

On va retrouver ce résultat au n° suivant.

3. <u>Problème de Neumann non homogène</u> (suite).

On part maintenant de (2.2), § 3. Pour f donnée dans $L^p(\Omega)$ et g donnée dans $W^{-1/p,p}(\Gamma)$, la forme

$$(3.1) \qquad v \to \int_\Omega f\, v\, dx + \langle g, \gamma_0 v\rangle$$

est linéaire et continue sur $H^{1,p'}(\Omega)$, donc d'après (2.2), § 3, il existe u unique dans $H^{1,p}(\Omega)$ vérifiant

$$(3.2) \quad \int_\Omega \left(u\, v + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \langle g, \gamma_0\, v\rangle \ \forall\, v \in H^{1,p'}(\Omega)$$

On vérifie facilement que

$$-\Delta u + u = f$$

et que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$. <u>On obtient de nouveau</u> (2.12).

§ 5. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE TRACES

La conférence, correspondant à [9], n'est pas reproduite ici.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] Agmon-Douglis-Niremberg, Estimates near the boundary... Comm. Pure Applied Maths. XII (1959), p.623-727.

[2] N. Aronszajn, Associated spaces, interpolation theorems... Conférence de Berkeley, 1960, à paraître.

[2 bis] N. Aronszajn-W. Smith, Theory of Bessel potentials, part II, à paraître.

[3] A.P. Caldéron. Intermediate spaces and interpolation. Conférence de Varsovie, (1960), à paraître.

[5] E. Gagliardo, Car atterizzazione delle Tracce... Rend. Sem. Mat. Padova 27 (1957), p.284-305.

[6] J.L. Lions, Une construction d'espaces d'interpolation. C.R. Acad. Sc. Paris, t.251 (1960), p.1851-1855.

[7] J.L. Lions, Conditions aux limites de Visik-Soboleff et problèmes mixtes. C.R. Acad. Sc., t.244 (1957), p.1126-1128.

[8] J.L. Lions. Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs. A paraître au Journal Math. Soc. Japan, April 1962.

[9] J.L. Lions. Theorèmes de trace et d'interpolation (I). Annali Scuola Norm. sup. Pisa, vol. XII (1959), p.389-403.

[9 bis] J.L. Lions, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumanie 50 (1958), p.419-432.

[9 ter] J.L. Lions, C.R. Acad. Sc. t.249 (1959), p.2259-2261.

[10] J.L. Lions-E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes. (I) (III) (IV) (V), Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol.XIV, (1960) p.269-308 ; vol.XV (1961), p.39-101 ; vol.XVI, (1962), à paraître ; (II) Annales Institut Fourier, t.II (1961), p.137-178.

[11] J.L. Lions-E. Magenes, C.R. Acad. Sc. t.251 (1960), p.2118-2120.

[12] E. Magenes-G. Stampacchia, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, III (1958), p.247-357.

[13] S.G. Michlin, Doklady Akad. Nauk., t.109 (1956), p.701-703.

[14] S.M. Nikolsky, Uspechi Mat. Nauk. t.XVI (1961), p. 63-114.

[15] M. Schechter, On L^p estimates and regularity. A paraître.

[15 bis] L.N. Slobodetskii, Doklady Akad Nauk. t.123 (1958), p.616-619.

[16] I.M. Visik-S.L. Sobolev, Doklady Akad. Nauk. t.118 (1957), p.243-246.