F. Treves

Quelques résultats d'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles, d'après L. Hörmander

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. n° 5, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A5_0>

QUELQUES RÉSULTATS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, D'APRÈS L. HÖRMANDER.

par
F. TREVES

Nous donnons quelques indications, sans aucune démonstration, sur des résultats positifs d'existence de solutions de certaines équations aux dérivées partielles linéaires

$$P(x, D)u = f \; . \tag{1}$$

Ces résultats ont été obtenus par L. Hörmander en 1961 et devront figurer, en principe, dans le chapitre VIII de son livre à paraître. Ce sont des conséquences d'inégalités d'un type général qui ont maintes autres applications, développées dans le dit chapitre VIII : applications à <u>l'unicité du problème de Cauchy</u>, à <u>la régularité des solutions à support compact de l'équation (1)</u>, à l'étude des <u>solutions à support compact de l'équation homogène</u> $P(x,D)u = 0$.

Les résultats d'existence qui nous intéressent ici étendent et précisent des résultats antérieurs d'Hörmander sur l'inversibilité locale des opérateurs de type principal (voir sa thèse, dernier chapitre, et :

L. Hörmander. - Differential Operators of Principal Type, Math. Annalen 140, p. 124 (1960).

1. Les inégalités

On considère un ouvert borné Ω , une fonction réelle $\varphi \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ telle que $x \in \bar{\Omega} \Rightarrow \text{grad}\, \varphi(x) \neq 0$. L'opérateur différentiel $P(x,D)$ a sa partie principale $P_m(x,D)$ à coefficients dans $C^2(\bar{\Omega})$; les coefficients de $P(x,D) - P_m(x,D)$ sont dans $L^\infty(\Omega)$.

Nous posons, pour $\tau > 0$ et $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$N_m^2(u;\varphi,\tau) = \sum_{|p|\leq m-1} \tau^{2(m-|p|)} \int e^{2\tau\varphi} |D^p u|^2 dx .$$

Les inégalités qui nous intéressent sont du type suivant :

$$\frac{1}{\tau} N_m^2(u;\varphi,\tau) \leq K \int e^{2\tau\varphi} |Pu|^2 dx , \tag{2}$$

ou du type suivant :

$$\frac{1}{\tau} N_m^2(u;\varphi,\tau) \leq K'\left(\int e^{2\tau\varphi} |Pu|^2 dx + \tau^{2m-1} \int e^{2\tau\varphi} |u|^2 dx\right) . \tag{2'}$$

où $\tau > 0$ sera grand ; K, K' sont des constantes indépendantes de $u \in C_0^\infty(\Omega)$ et de τ.

<u>Remarque 1</u>. - L'inégalité (2) - resp. (2') si $m > 1$ - implique l'inversibilité globale - resp. locale - dans Ω, au sens de certains espaces fonctionnels, du transposé ${}^tP(x,D)$ de $P(x,D)$. En effet, (1) par exemple implique immédiatement, pour toute $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\sum_{|p|\leq m-1} \int |D^p u|^2 dx \leq K_1 \int |Pu|^2 dx , \quad K_1 < +\infty .$$

Ceci signifie qu'il existe un opérateur continu $G : H^{-(m-1)}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tel que ${}^tP(x,D)(Gf) = f$ pour tout $f \in H^{-(m-1)}(\Omega)$. Nous rappelons que $H^{-(m-1)}(\Omega)$ est l'espace des distributions f sur Ω qui peuvent s'écrire

$$f = \sum_{|p|\leq m-1} D^p f_p \quad \text{avec} \quad f_p \in L^2(\Omega) ;$$

c'est le dual de $H_0^{m-1}(\Omega)$ = complété de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme

$$\left(\sum_{|p|\leq m-1} \int |D^p u|^2 dx\right)^{1/2} .$$

<u>Remarque 2</u>. - La validité de majorations (2) et (2') ne dépend en fait que de la partie principale P_m de P : si (2) ou (2') est vraie pour P , elle est vraie pour P + R quel que soit R(x,D) d'ordre $\leqslant$ m-1 (seule la borne inférieure τ_0 de τ et les constantes K et K' sont à modifier) . Cela tient à ce que

$$\frac{1}{\tau} N_m^2(u;\varphi,\tau) \geqslant \tau \left(\sum_{|p| \leqslant m-1} \int e^{2\tau\varphi} |D^p u|^2 dx \right) . \tag{3}$$

<u>Remarque 3</u>. - Cette même majoration (3) implique qu'il suffit d'établir (2) ou (2') localement et d'utiliser une partition de l'unité, puisque

$$\int e^{2\tau\varphi} | P(x,D) (\alpha u) - \alpha P(x,D) u |^2 dx$$

est $\leqslant K_2 \left(\sum_{|p| \leqslant m-1} \int e^{2\tau\varphi} |D^p u|^2 dx \right)$, donc petit, pour $\tau \to \infty$, vis-à-vis de $\frac{1}{\tau} N_m^2(u;\varphi,\tau)$.

Remarque 4. - Pour quiconque familier avec l'usage des inégalités du genre Carleman, il est clair que (2') - à fortiori (2) - donne lieu à l'unicité du prolongement des solutions du problème de Cauchy pour P(x,D) à travers les surfaces de niveau de la fonction φ . En vérité, pour ce propos, on n'a pas toujours besoin d'inégalités aussi strictes. Hörmander établit et utilise, pour certains opérateurs différentiels, des inégalités plus faibles (cf. son mémoire :

L. Hörmander. - On the uniqueness of the Cauchy Problem II, Math. Scand. 7 (1959), p. 177.)

2. <u>Opérateurs principalement normaux</u>

Habituellement on se donne φ et P et on cherche à établir des inégalités du genre (2) ou (2'). Hörmander procède d'une façon légèrement différente : on se donne P dans une classe raisonnable d'opérateurs différentiels et on montre que (2) ou (2') sont valables si φ est liée à P par une certaine relation. Ceci acquis, on montre que, sous certaines conditions supplémentaires sur P , des fonctions φ existent qui obéissent à la condition en question. Bien entendu, l'ouvert Ω lui-aussi intervient, en particulier pour l'existence de la fonction φ .

Pour les questions de résolution locale, on introduit la classe suivante d'opérateurs différentiels, appelés principalement normaux par Hörmander.

$P(x,D)$ est principalement normal dans Ω s'il existe un opérateur $Q_{m-1}(x,D)$, homogène d'ordre $m-1$, à coefficients dans $C^1(\bar{\Omega})$, tel que

$$C_{2m-1}(x,\zeta) = P_m(x,\zeta)\,\bar{Q}_{m-1}(x,\zeta) + \bar{P}_m(x;\zeta)\,Q_{m-1}(x,\zeta) \quad , \qquad (4)$$

$x \in \Omega$, $\zeta \in \underline{\underline{R}}^n$. On rappelle que $C_{2m-1}(x,D)$ est la partie principale de $[\bar{P}(x,D), P(x,D)]$; $C_{2m-1}(x,D)$ s'obtient, comme d'habitude, en remplaçant ζ_j par $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ dans $C_{2m-1}(x,\zeta)$.

Remarque 5. - Bien évidemment, les opérateurs dont la partie principale est réelle ou bien à coefficients constants sont principalement normaux, puisqu' alors $C_{2m-1}(x,\zeta) \equiv 0$.

Remarque 6. - $Q_{m-1}(x,D)$ est uniquement déterminé sauf si $P_m(x,D)$ a un facteur réel $R(x,D)$ d'ordre $\geqslant 1$.

3. Les relations entre φ , P , Ω

Soit $Q_{m-1}(x,D)$ satisfaisant (4). On considère les deux conditions suivantes, portant sur φ , P , Ω :

$$\text{(A)} \qquad \operatorname{Im}\Big(\sum_{j=1}^{n} P_m^{(j)}(x,\zeta)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\Big)\, Q_{m-1}(x,\zeta) \;+$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n} P_m^{(j)}(x,\zeta)\,\bar{P}_m^{(k)}(x,\zeta)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\,\partial x_k} \;+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j,k=1}^{n}\big[P_{m,k}^{(j)}(x,\zeta)\,\bar{P}_m^{(k)}(x,\zeta) - P_{m,k}(x,\zeta)\,\bar{P}_m^{(kj)}(x,\zeta)\big]\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \;>\; 0$$

dès que $x \in \bar{\Omega}$, $\zeta \in \underline{\underline{R}}^n$, $\zeta \neq 0$ tels que $P_m(x,\zeta) = 0$.

$$\text{(B)} \qquad \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\,\partial x_k}(x)\,P_m^{(j)}(x,\zeta)\,\overline{P_m^{(k)}(x,\zeta)} + \frac{1}{2\tau}\,C_{2m-1}(x,\zeta) \;>\; 0$$

dès que $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \underline{\underline{R}}^n$, $\zeta = \xi + i\,\tau\,\mathrm{grad}\,\varphi(x)$ et τ réel, $\tau \neq 0$, tels que $P_m(x,\zeta) = 0$.

Nous rappelons la signification des notations :

$$P_m^{(j)}(x,\zeta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\,P_m(x,\zeta) \quad ,$$

$$P_{m,j}(x,\zeta) = \frac{\partial}{\partial x_j}\,P_m(x,\zeta) \quad ,$$

$$P_m^{(kj)}(x,\zeta) = \Big(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\Big)\Big(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\Big)\,P_m(x,\zeta) \quad , \text{ etc.}$$

Les théorèmes principaux sont alors les suivants (<u>où $P(x,D)$ est supposé principalement normal</u>) :

<u>Théorème 1</u>. - <u>(A) $\Longrightarrow$ (2')</u> .

<u>Théorème 2</u>. - <u>(A) et (B) $\Longrightarrow$ (2)</u> .

Les démonstrations de ces résultats sont très techniques.

4. Pseudo-convexité

La condition (A) est fort compliquée, en particulier du fait qu'elle fait intervenir Q_{m-1} . On va la remplacer par une autre condition, plus simple, qui va l'impliquer.

$$(A^*) \qquad \sum_{j,k=1}^{n} P_m^{(j)}(x,\zeta)\, \bar{P}_m^{(k)}(x,\zeta)\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x) \; +$$

$$+ \; \mathrm{Re} \sum_{j,k=1}^{m} \left[P_{m,k}^{(j)}(x,\zeta)\, \bar{P}_m^{(k)}(x,\zeta) - P_{m,k}(x,\zeta)\, \bar{P}_m^{(kj)}(x,\zeta) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) > 0$$

pour tout $0 \neq \zeta \in \underline{\underline{R}}^n$ qui satisfont

$$P_m(x,\zeta) = 0 \quad , \quad \sum_1^n P_m^{(j)}(x,\zeta)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = 0 \quad .$$

(A) $\Longrightarrow$ (A*) trivialement. Ce qui nous intéresse, c'est une condition qui implique (A) .

Voici maintenant l'analogue pour (B) :

$$(B^*) \qquad \sum_{j,k=1}^{n} P_m^{(j)}(x,\zeta)\, \overline{P_m^{(k)}(x,\zeta)}\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x) + \frac{1}{2\tau}\, C_{2m-1}(x,\zeta) > 0$$

pour tous $\zeta = \xi + i\tau \operatorname{grad} \psi(x)$, $\xi \in \underline{\underline{R}}^n$, $\xi \neq 0$, τ réel, $\tau \neq 0$, satisfaisant

$$P_m(x,\zeta) = 0 \; , \quad \sum_1^n P_m^{(j)}(x,\zeta)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = 0 \quad .$$

Définition 1. - La surface orientée

$$\psi(x) = \psi(x^\circ) \quad ,$$

où ψ est C^2 dans un voisinage de x° et où grad $\psi\,(x^\circ) \neq 0$, est dite pseudo-convexe (resp. fortement pseudo-convexe) par rapport à $P(x,D)$ en x si (A^*) est vraie (resp. si (A^*) et (B^*) sont vrais) .

L'intérêt de la pseudo-convexité provient du résultat suivant, facile à démontrer.

Théorème 3. - On suppose P principalement normal dans Ω . Si $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ a des surfaces de niveau pseudo-convexe (resp. fortement pseudo-convexes) dans $\overline{\Omega}$, alors $\varphi = e^{\lambda\psi}$ vérifie (A) (resp. (A) et (B)) dès que λ est suffisamment grand.

Remarque 7. - En utilisant le fait que P est principalement normal, on voit facilement que pour $m=1$, la pseudo-convexité forte est identique à la pseudo-convexité.

Remarque 8. - Soit S une surface C^2 dans Ω avec normale N au point x . Dire que S est pseudo-convexe (resp. fortement pseudo-convexe) en x équivaut à dire que si $\zeta \in \underline{\underline{R}}^n$ est tel que l'équation

$$P_m(x, \zeta + \tau N) = 0$$

a un zéro réel double τ (resp. un zéro complexe double τ), alors nécessairement ζ est de la forme λN , avec λ réel. On retrouve ici une condition utilisée par Calderon dans l'étude de l'unicité du problème de Cauchy. En fait, le théorème 3 a un équivalent pour les opérateurs elliptiques et ceux dont la partie principale est réelle.

Remarque 9. - Si ψ a des surfaces de niveau pseudo-convexes par rapport à P sans $\overline{\Omega}$ et si $|D^p(\psi - \chi)| \leq \varepsilon$ dans $\overline{\Omega}$ pour $|p| \leq 2$, alors, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, χ a aussi ses surfaces de niveau dans $\overline{\Omega}$ pseudo-convexes par rapport à P : la pseudo-convexité est une propriété stable.

Signification géométrique de la pseudo-convexité

Supposons, pour simplifier, que les coefficients de $P_m(x,D)$ soient réels. Alors le fait que ψ ait des surfaces de niveau pseudo-convexes dans $\bar{\Omega}$ signifie que si $\psi(x)$ atteint un extrémum le long d'une bicaractéristique $x = x(t)$ pour $t = t_o$, i.e. $\left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=t_o} = 0$, alors on doit avoir

$$\left.\frac{d^2\psi}{dt^2}\right|_{t=t_o} > 0 .$$

En particulier, ψ ne peut avoir que des minima le long d'une bicaractéristique, et non des maxima. On peut encore exprimer les choses ainsi : si la surface Σ : $\psi(x) = \text{const.}$ est pseudo-convexe et si une bicaractéristique Γ de P est tangente à Σ en x° et a des points à l'extérieur de Σ arbitrairement près de x°, alors il existe un voisinage 0 de x° tel que Γ soit, dans 0, entièrement du côté extérieur du plan tangent à Σ en x° avec un seul contact (d'ordre 1 exactement) avec ce plan.

Conséquence : Si $\bar{\Omega}$ contient une bicaractéristique fermée Γ de $P(x,D)$, il n'existe pas de fonction $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ dont les surfaces de niveau soient pseudo-convexes par rapport à P (en tout point de $\bar{\Omega}$). Car φ atteindrait nécessairement un maximum sur Γ.

Par exemple, l'opérateur $x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$ dans $\mathbb{R}^2$ a pour bicaractéristiques les cercles centrés à l'origine. Si Ω est une couronne circulaire quelconque $0 < \delta_1 < x_1^2 + x_2^2 < \delta_2$, $\delta_2 > \delta_1$, il n'existe aucune fonction $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ sont les surfaces de niveau soient pseudo-convexes par rapport à $x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Rappelons que $P(x_1 D)$ est dit de <u>type principal</u> en $x^\circ \in \Omega$ si pour tout $\xi \in \underline{\underline{R}}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} | P_m^{(j)}(x^\circ, \xi)|^2 = 0 \implies \xi = 0 \ ,$$

autrement dit, si $P(x^\circ,D)$ n'a pas de caractéristiques réelles doubles.

<u>Théorème 4</u>. - <u>Si</u> P <u>est principalement normal et de type principal en</u> x° , <u>alors il existe une fonction</u> $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ <u>dont les surfaces de niveau soient pseudo-convexes par rapport à</u> P <u>au voisinage de</u> x° .

Prendre $\psi(x) = A\,|x-x^\circ|^2 + \langle x-x^\circ, N\rangle$

avec $0 \neq N \in \underline{\underline{R}}^n$ et $A > 0$ suffisamment grand.

<u>Remarque 10</u>. - Noter que $x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ est de type principal (et trivialement principalement normal, puisque réel) dans tout anneau $0 < \delta_1 < x_1^2 + x_2^2 < \delta_2$ $(\delta_2 > \delta_1)$. Ainsi pourra-t-on trouver localement, mais non globalement des ψ à surfaces de niveau pseudo-convexes.

<u>Remarques 11</u>. - La propriété "de type principal" n'est nullement nécessaire pour l'existence de surfaces de niveau pseudo-convexes, même globalement. Considérons l'opérateur de Tricomi dans $\underline{\underline{R}}^2$:

$$P(x,D) = x_2 D_1^2 + D_2^2 \ .$$

On prend $\psi(x) = -x_2$. Alors (A*) se réduit à $2\xi_1^2 > 0$ qui est vérifiée lorsque $\xi \neq 0$ et $x_2 \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$.

Voici comment il est possible de compléter un peu le théorème 4 :

<u>Théorème 5</u>. - <u>Supposons</u> P <u>principalement normal en</u> x° <u>et qu'il existe</u> $\xi \neq 0$, $\xi \in \underline{\underline{R}}^n$, <u>tel que</u>

$$\sum_{j=1}^{n} \left| P_m^{(j)}(x^\circ, \zeta) \right| = 0 \quad .$$

S'il existe $N \in \underline{\underline{R}}^n$ tel que

$$\mathrm{Re} \sum_{j,k=1}^{n} P_{m,k}(x^\circ, \zeta)\, \bar{P}_m^{(kj)}(x^\circ, \zeta)\, N_j < 0 \quad ,$$

alors il existe au moins une fonction ψ C^2 au voisinage de x° dont les surfaces de niveau soient pseudo-convexes par rapport à P au voisinage de x° .