Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

C. B. Morrey

Des résultats récents du calcul des variations

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. n° 4, p. 1-62
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A4_0>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DES RÉSULTATS RÉCENTS DU CALCUL DES VARIATIONS

par

C.B. MORREY

1. Introduction.

Nous nous proposons de discuter les intégrales de la forme

$$(1.1) \qquad I(z,G) = \int_G f(x,z,\nabla z)dx$$

où

$$(1.2) \qquad x = (x^1,\ldots,x^\nu), \qquad z = (z^1,\ldots,z^N), \quad \nabla z = \text{grad } z.$$

Nous présenterons des résultats dans l'article [1] avec une introduction concernant les théorèmes d'existence. J'avais déjà obtenu quelques-uns de ces résultats dans le cas $\nu = 2$ ([2], [3], [4]) ; nous supposerons que $\nu > 2$. Il y a des résultats récents de Ladyzenskaya et Ural'tseva [5] qui sont presque les mèmes que quelques-uns des nôtres mais les méthodes utilisées sont entièrement différentes.

On cherche une fonction (vectorielle) z d'une classe donnée pour laquelle l'intégrale atteint son minimum. Hilbert a démontré, peu après 1900, l'existence d'une telle fonction pour l'intégrale de Dirichlet,

$$(1.3) \qquad D(z,G) = \int_G |\nabla z|^2 dx\,, \qquad f(x,z,p) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha^2 \qquad N = 1$$

pour certains domaines G et certaines classes de fonctions.

Ce fut le début des "méthodes directes" en calcul des variations. D'autres ont employé ces méthodes, mais Tonelli a développé une théorie systématique.

L'idée de la théorie permettant d'établir l'existence est de démontrer premièrement la semi-continuité inférieure de l'intégrale pour un type particulier de convergence, puis de démontrer l'existence d'une suite minorante convergente au sens précédent.

Dans le cas $\nu = 1$, Tonelli [6] a donné la démonstration en utilisant la classe des fonctions absolument continues pour les valeurs données aux bornes de l'intervalle G et la convergence uniforme.

Mais dans le cas $\nu = 2$, Tonelli ([7] et [8]) a dû faire l'hypothèse

(1.4) $$f(x,z,p) \geqslant m\,|p|^{\alpha} - k \qquad \alpha \geqslant 2$$

où

$$f(x,z,p) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f(x,z,0) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha = 2$$

pour démontrer l'existence d'une suite minorante équicontinue. Il n'a pu obtenir de théorème général d'existence dans le cas où f satisfait (1.4) avec $1 < \alpha < 2$.

Par ailleurs, dans le cas $\nu > 2$, il faut faire l'hypothèse (1.4) avec $\alpha > \nu$ pour démontrer l'existence d'une suite minorante équicontinue.

En effet, remarquons que

$$\log \log (1 + r^{-1}) , \quad r^{-h} \qquad 0 < r \leqslant 1$$

sont des limites des suites $\{z_n\}$ de fonctions de Lipschitz dans lesquelles :

$$\int_{B(0,1)} |\nabla z_n|^{\nu} \, dx \text{ resp. } \int_{B(0,1)} |\nabla z_n|^{k} \, dx \quad \text{avec} \quad k < \nu/h+1$$

sont bornées uniformément.

Pour éviter cette difficulté et pour obtenir des théorèmes généraux d'existence, nous avons utilisé des classes de fonctions notées $\mathfrak{P}_r$, qui peuvent être identifiées maintenant avec les classes $H^1_r(G)$ (ou les espaces de Sobolev $W^1_{\ r}(G)$).

Nous les définirons après avoir introduit certaines notations.

E_ν espace euclidien de dimension ν

∂G bord du domaine $G \subset E_\nu$

$D \subset\subset G \iff D \cup \partial D$ est compact et $D \cup \partial D \subset G$

G est Lipschitzien si chaque point P de $\partial G \in$ voisinage N, image de $B(0,1)$ [centre 0, rayon 1] dans une application bi-Lipschitzienne qui fait correspondre P à 0 $N \cap G$ à $x^\nu > 0$ et $N \cap \partial G$ à $x^\nu = 0$.

Pour chaque G, on note par G_ρ l'ensemble des x tels que $B(x,\rho) \subset G$

$f \in C^m(G)$ si f et toutes dérivées partielles d'ordre $\leq m$ sont continues dans G.

$f \in C^m_c(G) \iff$ | f $C^m(G)$
 | support de $f \subset G$

les classes $C^\infty(G)$ et $C^\infty_c(G)$ sont définies de la même manière

$f \in Lip(G)$ si f satisfait à une condition uniforme de Lipschitz sur chaque domaine $D \subset\subset G$

$f \in Lip_c(G)$ si | $f \in Lip(G)$, support de $f \subset G$

$f \in C^m_\mu(G)$ si | $f \in C^m(G)$
 | les dérivées d'ordre m satisfont à une condition uniforme de Hölder de puissance $0 < \mu < 1$ sur chaque domaine $D \subset\subset G$

La classe $C^m_{\mu c}(G)$ est définie de la même manière.

$z \in Lip(\bar{G})$ [ou $C^m(\bar{G})$, $C^m_\mu(\bar{G})$, $C^\infty(\bar{G})$] si $z \in Lip(D)$ [resp. $C^m(D)$, $C^m_\mu(D)$, $C^\infty(D)$] où $G \subset\subset D$, les domaines G des classes C^m, C^m_μ ou C^∞ sont définis de la même manière que la classe des domaines Lipschitziens mais en employant les difféomorphismes des classes C^m, C^m_μ et C^∞ resp.

φ étant un vecteur, $|\varphi|$ sera sa longueur.

$\frac{\partial z}{\partial x^\alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ etc. seront aussi notées $z,_\alpha$, $z,_{\alpha\beta}$ etc.

S étant un ensemble mesurable, $|S|$ désignera sa mesure.

$d(x,S)$ est la distance du point x à l'ensemble S.

Nous ne distinguerons pas les éléments d'un espace $L_r(G)$ et les fonctions de puissance $r^{\text{ième}}$ intégrable sur G.

DÉFINITION 1.1

Nous dirons que $z \in H^1_r(G)$, $r \geqslant 1$, si $z \in L_r(G)$ et s'il existe des fonctions $p_\alpha \in L_r(G)$ telles que :

(1.5) $$\int_G p_\alpha(x)\, g(x)\, dx = -\int_G g_{,\alpha}(x)\, z(x)\, dx.$$

$$g \in \mathrm{Lip}_c(G)\ , \qquad \alpha = 1 \ldots \nu \quad .$$

<u>Remarque</u>. Les fonctions p_α sont déterminées sauf pour des fonctions nulles additives.

Ainsi si $z \in H'_r(G)$ et si $z^* - z$ est une fonction nulle, alors $z^* \in H'_r(G)$ et (1.5) reste valable en remplaçant z par z^*. Par conséquent, nous formons les espaces $H'_r(G)$ en identifiant les fonctions équivalentes. Pour tout $z \in H'_r(G)$, nous notons la classe p_α par $z_{,\alpha}$.

DÉFINITION 1.2

Une fonction φ est un <u>"mollifier"</u> (de Friedrichs)

si $$\varphi \in C^\infty(E_\nu)$$

$$\text{support } \varphi \subset (0,1)$$

$$\int_{B(0,1)} \varphi(x)dx = 1$$

Si u est localement sommable dans G, nous définissons sa fonction φ-mollifiée u_ρ $(\rho > 0)$ par

$$u_\rho(x) = \int_{B(x,\rho)} \varphi^*_\rho(\xi - x)u(\xi)d\xi \ , \quad \varphi^*_\rho(y) = \rho^{-\nu}\varphi[(\xi - x)/\rho]$$

$$x \in G_\rho$$

THÉORÈME 1.1

Si $u \in H'_r(G) r \geqslant 1$ et si φ est un mollifier, alors

pour chaque $\rho > 0$, $u_\rho \in C^\infty(G_\rho)$ et $(u_{,\alpha})_\rho = u_{\rho,\alpha}$

$u_\rho \to u$ et $u_{\rho,\alpha} \to u,$ dans $L_r(D)$ et presque partout dans D

pour chaque $D \subset\subset G$.

$$(1.6) \int_D |z_\rho(x).z(x)|^r dx \leqslant C \int_D [\int_{(x,\rho)} |z(\xi) - z(x)|^r d\xi] dx \leqslant$$

$$\leqslant C_r \rho^r \int_G |\nabla z(y)|^r dy$$

pour chaque $D \subset\subset G$; C et C_1 ne dépendent que de φ

<u>Démonstration</u>. Les conclusions $u_\rho \in C^\infty(G_\rho)$, $u_\rho \to u$ et k sont bien connus. En utilisant (1.5) avec $g = \varphi^*_\rho$, nous obtenons :

$$u_{\rho,\alpha}(x) = \int_G -\varphi^*_{\rho,}(\xi - x)u(\xi)d\xi = \int_G \varphi^*_\rho (\xi - x)u_{,\alpha}(\xi)d\xi =$$

$$= (u_{,\alpha})_\rho(\xi).$$

La première inégalité de (1.6) se déduit de celle de Hölder. En utilisant les conclusions précédentes, il suffit de démontrer la deuxième inégalité pour les fonctions $\in C'(G)$. Pour cela, on peut écrire

$$z(\xi) - z(x) = (\xi^\alpha - x^\alpha) \int_0^1 z_{,\alpha}[x + t(\xi - x)]dt ;$$

l'inégalité s'en déduit en utilisant des inégalités et des changements de coordonnées convenables.

Nous énonçons maintenant des théorèmes bien connus en esquissant seulement les démonstrations.

THÉORÈME 1.2

L'espace $H'_r(G)$ $r \geqslant 1$ muni de la norme

$$\|z\|^1_{r,G} = \left\{\int_G \left[z^2 + \sum_{\alpha=1}^{\nu} z^2_{,\alpha}\right]^{r/2} dx\right\}^{1/r}$$

est un espace de Banach. Si $r = 2$, c'est un espace de Hilbert après avoir défini

$$(u,v)^1_{r,G} = \int_G \left(uv + \sum_{\alpha=1}^{\nu} u_{,\alpha}\, v_{,\alpha}\right)dx.$$

D'après (1.5) les espaces sont complets.

THÉORÈME 1.3

Sous les hypothèses : | G bornée, $v \in H'_r(G)$ $r \geqslant 1$
| u satisfait à une confition uniforme de Lipschitz dans G

Alors : $u \in H'_s(G)$ pour chaque $s \geqslant 1$

$uv \in H'_r(G)$ et $(uv)_{,\alpha} = uv_{,\alpha} + vu_{,\alpha}$ p.p.

(Utiliser (1.5) pour la démonstration)

THÉORÈME 1.4

Sous les hypothèses : $u \in H'_r(G)$ $r \geqslant 1$, $x = x(y)$ est une application bi-Lipschitzienne de $\tilde{G}$ sur G et $\tilde{u}(y) = u[x(y)]$, Alors $\tilde{u} \in H^1_r(\tilde{G})$ et les dérivées $\tilde{u}_{,\alpha}$ sont données p.p. par les formules usuelles.

Ce théorème est valable pour les fonctions $u \in C'(G)$. Pour chaque $\tilde{D} \subset\subset \tilde{G}$ on peut utiliser les fonctions u_ρ et en déduire le théorème sur $\tilde{D}$ par passage à la limite.

THÉORÈME 1.5

a) Si $z \in H'_r(G)$ $r \geqslant 1$, alors la classe z contient une fonction $\bar{z}$ qui est absolument continue sur presque toutes les droites parallèles aux axes de coordonnées et $\bar{z}_{,\alpha} \in z_{,\alpha}$.

b) Si $\bar{z} \in L_r(G)$ $r \geqslant 1$, $\bar{z}$ absolument continue comme dans a) et $\bar{z},_{\alpha} \in L_r(G)$, alors $\bar{z} \in H'_r(G)$.

La conclusion b) est évidente. Soit $[a,b]$ $a^\alpha \leqslant x^\alpha \leqslant b^\alpha \leqslant, \alpha = 1 \ldots v$ une partie de G. Il existe une suite de nombres ρ positifs qui converge vers zéro telle que

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{a^\alpha}^{b^\alpha} (|z_\rho - z|^r + |z_{\rho,\alpha} - z,_\alpha|^r) dx = 0$$

pour presque toutes les valeurs des autres x^β entre a^β et b^β. Pour ces valeurs, les z_ρ sont uniformément absolument continues en x^α et convergent uniformément vers une fonction $\bar{z}$ absolument continue.

Pour démontrer a), il faut placer les $[a,b]$ rationnelles de G dans une suite et choisir les sous-suites successives des valeurs de ρ

THÉORÈME 1.6

Sous les hypothèses :

$$F \in C^1(E_\rho), \quad u^p \in H'_{r_p}(G) \quad (r_p \geqslant 1)$$

$$u(x) = F[u'(x) \ldots u^p(x)], \quad V_\alpha(x) = \sum_p F_p[u] u^p_{,\alpha}(x)$$

$$U \text{ et } V_\alpha \in L_r(G)$$

Alors,

$$U \in H'_r(G) \text{ et } U,_\alpha(x) = V_\alpha(x) \text{ p.p.}$$

(on peut utiliser les $\bar{u}_p$ introduits dans le théorème 1.5)

DÉFINITION 1.3

L'espace $H'_{ro}(G)$ est la fermeture dans $H'_r(G)$ de la classe $C^\infty_c(G)$ (ou $C'_c(G)$ ou $Lip_c(G)$.

THÉORÈME 1.7

a) (Poincaré); si $z \in H'_{ro}(G)$ et $G \subset B(x_0,R)$, alors

$$\int_G |z(x)|^r dx \leq r^{-1} R^r \int_G |\nabla z(x)|^r dx$$

b) Supposons en outre $G \subset D$, $Z(x) = z(x)$ pour $x \in G$ et $Z(x) = 0$ pour $x \in D - G$, alors $Z \in H'_{ro}(D)$ et $\nabla Z(x) = \nabla z(x)$ (p.p.) dans G et $\nabla Z(x) = 0$ (p.p.) dans $D - G$.

On peut démontrer l'inégalité pour les fonctions $\in C'[B(x_0,R)]$ par un changement de coordonnées polaires ; la partie a) s'en déduit par un passage à la limite.

Il est évident que $Z \in H'_{ro}(D)$. Les conclusions concernant les dérivées se déduisent du théorème 1.5.

THÉORÈME 1.8 (théorème d'extension)

Supposons G borné et Lipschitzien, $r \geqslant 1$ et $G \subset\subset D$, alors $\exists$ un opérateur E linéaire et borné de l'espace $H'_r(G)$ dans $H'_{ro}(D)$ tel que $Z(x) = z(x)$ pour $x \in G$ quand $Z = Ez$

Nous choisissons une suite finie de voisinage $\{N_s\}$ $(N_s \subset D)$ et une partition de l'unité $\{\zeta_s\}$ telles que :

a) $N_s \cup \partial N_s \subset G$, ou $N_s \subset D$ voisinage d'un point du bord ∂G (voir définition d'un domaine Lipschitzien)

b) support $\zeta_s \subset N_s$

c) $\sum \zeta_s(x) = 1$ dans un domaine G' telle que $G \subset\subset G' \subset\subset D$. Quand $N_s \cup \partial N_s \subset G$, nous définissons $E_s z = Z_s$ par $Z_s(x) = \zeta_s(x) z(x)$ dans N_s et $Z_s(x) = 0$ dans $D - N_s$. [illegible], soit $x = x_s(y)$ une application bi-Lipschitzienne de N_s sur $B(0,1)$ (voir définition d'un domaine Lipschitzien)

Pour de tels s, nous définissons $E_s z = Z_s$ où $Z_s(x) = W_s[y_s(x)]$ pour $x \in N_s$ et $Z_s(x) = 0$ dans $D - N_s$ avec $W_s(y) = w_s(y)$ pour $y \in B(0,1)$ et $y^\nu > 0$ et $W_s(y^1 \dots y^\nu) = w_s(y^1, \dots, y^{\nu-1}, -y^\nu)$ pour $y \in B(0,1)$ et $y^\nu < 0$

$$(w_s(y)) = \zeta_s[x_s(y)] \cdot z[x_s(y)])$$

THÉORÈME 1.9

Si G est borné et Lipschitzien, alors :

a) la classe $C^\infty(\bar{G})$ est dense dans $\dot{H}'_r(G)$ pour chaque $r \geqslant 1$

b) $\exists$ pour chaque $r \geqslant 1$, un opérateur B linéaire et borné de l'espace $H'_r(G)$ dans $L_r(\partial G)$ tel que $\varphi(x) = z(x)$ pour $x \in \partial G$ quand $z \in \mathrm{Lip}\, \bar{G}$ et $\varphi = B\, z$.

a) se déduit des théorèmes 1.1 et 1.8.

Pour démontrer b), choisissons une suite finie de voisinages $\{N_s\}$ et une partition de l'unité $\{\zeta_s\}$ (voir théorème 1.8). Quand $N_s \cup \partial N_s \subset G$, nous définissons B_s tel que $B_s z = 0$. Dans les autres cas, $B_s z = \varphi_s$ où $\varphi_s(x) = \zeta_s(x) z(x)$ $x \in \partial G$ quand $z \in \mathrm{Lip}(\bar{G})$.

Définissons maintenant W_s :

$$\begin{cases} W_s(y) = \zeta_s[x_s(y)]\, z\, [x_s(y)], & y \in B(0,1) y^\nu \geqslant 0 \\ W_s(y) = 0, & y \notin B(0,1), \quad y^\nu \geqslant 0 \end{cases}$$

alors

$$\varphi_s[x_s(y^1, \dots, y^{\nu-1}, 0)] = W_s(y^1, \dots, y^{\nu-1}, 0)$$

$$(1.7) \quad \int_{B(0,1)} |W_s(y^1, \dots, y^\nu) - W_s(y^1, \dots, y^{\nu-1}, 0)|^r dy^1\, dy^2, \dots, dy^{\nu-1} \leqslant \varepsilon(y^\nu)$$

avec

$$(1.8) \quad \varepsilon(y^\nu) \leqslant (y^\nu)^{r-1} \int_0^{y^\nu} \int_{B(0,1)} |W_{s,}(y^1,\ldots,y^{\nu-1},\eta^\nu)|^r dy^1,\ldots,dy^{\nu-1}, d\eta^\nu$$

$$\lim_{y^\nu \to 0} \varepsilon(y^\nu) = 0$$

On en déduit facilement que chaque opérateur B_s est borné.

Notation. Nous noterons :

la convergence faible par le signe $\rightharpoonup$

la convergence forte par le signe $\longrightarrow$

THÉORÈME 1.10

a) Chaque fonctionnelle linéaire dans l'espace $H^1_r(G)$ est de la forme

$$f(z) = \int_G [A_0(x)z(x) + \sum_{\alpha=1} A_\alpha(x)z_{,\alpha}(x)]dx,$$

où les A_0 et $A_\alpha \in L_{r'}(G)$, r' puissance conjuguée de r

b) une condition nécessaire et suffisante pour que $z_n \rightharpoonup z$ dans $H^1_r(G)$ $(r \geqslant 1)$ est que $z_n \rightharpoonup z$ et $z_{n,\alpha} \rightharpoonup z,$ dans $L_r(G)$

c) La convergence faible est conservée par des changements de coordonnées bi-Lipschitziennes.

d) Si G est Lipschitzien et $z_n \rightharpoonup z$ dans $H^1_r(G)$ $(r \geqslant 1)$, alors $z_n \longrightarrow z$ dans $L_r(G)$ et $Bz_n \longrightarrow Bz$ dans $L_r(\partial G)$.

Pour démontrer a), on peut définir la fonctionnelle $F(\varphi)$ pour les fonctions vectorielles $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)$ $\{$avec $\varphi_0 = z,$ $\varphi_\alpha = z,_\alpha\}$ par $F(\varphi) = f(z)$; a) se déduit facilement du théorème de Hahn-Banach.

b) se déduit de a)

c) se déduit de a) et du théorème 1.4.

Pour démontrer que $z_n \longrightarrow z$ dans $L_r(G)$, on peut choisir un domaine $D \supset G \cup \partial G$, utiliser le théorème 1.8 pour remplacer z_n et z par $Z_n = Ez_n$

et $Z = Ez$ puis utiliser l'inégalité (1.6) en échangeant D et G. Pour démontrer que $Bz_n \to Bz$ dans $L_r(\partial G)$, on utilise les notations de la démonstration du théorème 1.9 ; l'inégalité (1.7) se conserve avec une fonction ε indépendante de n, par suite de la convergence faible dans le cas $r = 1$; le résultat se déduit alors de la convergence forte de z_n vers z dans $L_r(G)$.

THÉORÈME 1.11

a) Si $z \in H^1{}_r(G)$ et si C est une constante, alors $\nabla z(x) = 0$ p.p. pour l'ensemble des x tels que $z(x) = C$.

b) Si z_1 et $z_2 \in H^1{}_r(G)$ et $z(x) = \inf\,[z_1(x), z_2(x)]$, alors $z \in H^1{}_r(G)$ et $\nabla z(x) = \nabla z_k(x)$ p.p. pour l'ensemble des x où $z(x) = z_k(x)$, $k = 1,2$.

c) Si $z \in H^1{}_r(G)$, $D \subset G$, $W \in H^1{}_r(D)$, $W - z \in H^1{}_{ro}(D)$, $Z(x) = W(x)$ pour $x \in D$ et $Z(x) = z(x)$ pour $x \in G - D$. Alors, $Z \in H^1{}_r(G)$, $Z - z \in H^1{}_{ro}(G)$, $\nabla Z(x) = \nabla W(x)$ p.p. dans D et $\nabla Z(x) = \nabla z(x)$ p.p. dans $G - D$.

Les parties a) et b) se déduisent du théorème 1.5, la partie c) des théorèmes 1.5 et 1.7 (b).

THÉORÈME 1.12

a) Si $z \in H'_1(G)$ et si

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla z(x)|\,dx \leqslant L(r/a)^{\nu-1+\mu}, \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \quad 0 < \mu < 1$$

toutes les fois que $B(x_0,a) \subset G$, alors, z satisfait à une condition uniforme de Hölder de puissance μ dans chaque $D \subset\subset G$.

b) Si $z \in H^1{}_r(G)$ avec $r > v$ ou si $z \in H^1{}_v(G)$ avec

(1.9) $$\int_{B(x_0,r)} |\nabla z|^{\nu}\,dx \leqslant L_s r^{\mu\nu}, \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \quad 0 \leqslant \mu$$

alors l'inégalité (1.9) se conserve en utilisant un L convenable.

La partie b) se déduit de l'inégalité de Hölder. Il suffit de démontrer a) pour les fonctions $\in C^1(G')$, $G' \subset\subset G$. Supposons x_1 et $x_2 \in G$, $|x_2 - x_1| = \rho$ et $B(\bar{x}, \rho/2) \subset\subset G(\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2})$. Pour chaque $x \in B(\bar{x}, \rho/2)$, on peut écrire

$$|z(x_2) - z(x_1)| \leq |z(x) - z(x_1)| + |z(x) - z(x_2)|$$

(1.10) $$|z(x) - z(x_k)| \leq |x - x_k| \int_0^1 |\nabla z[x_k + t(x - x_k)| \, dt$$

Le résultat se déduit de l'intégration de (1.10) par rapport à x.

THÉORÈME 1.13 (Sobolev)

Si $W \in H^1{}_2[B(x_0,R)]$, alors $W \in L_{2s}[B(x_0,R)]$ et il existe une constante $C = C(v)$ telle que

$$\left\{\int_{B(x_0,R)} |W(x)|^{2s} \, dx\right\}^{1/s} \leq C \int_{B(x_0,R)} [|\nabla W|^2 + R^{-2} W^2] \, dx$$

$$s = \nu/\nu - 2 \qquad \nu > 2$$

(Voir [9])

II. Premiers théorèmes d'existence.

Il existe des intégrales de la forme (1.1), dans lesquelles les fonctions f sont bornées inférieurement mais pour lesquelles il n'existe pas de fonctions minorantes.

Par exemple, [10], supposons que $N = v = 1$ et que G soit l'intervalle $[0,1]$,

$$I(z,G) = \int_0^1 (1 + z^2{}_x)^{1/4} dx$$

et la classe $\mathcal{F}$ contient toutes les fonctions z absolument continues dans G avec $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$.

$I(z,G) > 1$ pour chaque $z \in \mathcal{F}$. Mais supposons que

$$z_n(x) = \begin{cases} nx - n + 1 \ , & 1 - n^{-1} \leq x \leq 1 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1-n^{-1} \end{cases}$$

alors

$$I(z_n,G) = 1 - n^{-1} + n^{-1}(1+ n^2)^{1/4}$$

Supposons que $f \in C^2$, $z \in C^1(G)$ et que z soit une fonction minorante appartenant à une classe $\mathcal{F}$ qui contient toutes les fonctions $\tilde{z} \in C^1(G)$ telles que $\tilde{z} - z \in C^1{}_c(G)$

$$\sup[|\tilde{z}(x) - z(x)| + \sum_{\alpha=1}^{\nu} |\tilde{z},_{\alpha}(x) - z,_{\alpha}(x)|] < \rho \qquad (\rho > 0)$$

Alors,

(2.1) $$\sum_{\alpha,\beta} f_{p_\alpha p_\beta}[x_0, z(x_0), \nabla z(x_0)] \lambda_\alpha \lambda_\beta \geqslant 0, \quad x_0 \in G,$$

pour toutes les valeurs des λ_α

<u>C'est la condition nécessaire classique de Legendre</u>.

Posons,

$$\varphi(\sigma) = \int_G f[x, z + \sigma\zeta, \nabla z + \sigma \nabla \zeta]dx, \qquad \zeta \in C^1{}_c(G)$$

La valeur $\sigma = 0$ donne évidemment la valeur minimum de φ pour les petites valeurs de σ. Par conséquent :

(2.2) $$\varphi''(\sigma) = \int_G [a^{\alpha,\beta}(x)\zeta,_\alpha \zeta,_\beta + 2b^{\alpha}(x)\zeta\zeta,_\alpha + C(x)\zeta^2]dx \geqslant 0$$

où

$$a^{\alpha\beta}(x) = f_{p_\alpha p_\beta}[x,z(x), \nabla z(x)], \qquad b^{\alpha}(x) = f_{p_\alpha z}, \quad C(x) = f_{zz}$$

et les $a^{\alpha\beta}, b^{\alpha}$, c sont continues dans G.

Choisissons maintenant des fonctions convenables Z_1 et $Z_2 \in C^1{}_c[-1,1]$ un point $x_0 \in G$ et des nombres h et H sufisamment petits ; définissons la fonction :

$$(2.3) \quad \zeta(x) = Z_1[h^{-1}\lambda(x-x_0)]\, Z_2[H^{-1}\ ], \quad \rho^2 = |x - x_0|^2 - [\lambda(x - x_0)]^2$$

où λ est un vecteur arbitraire de longueur 1.

L'inégalité (2.1) s'obtient en utilisant la fonction ζ de (2.3) dans l'inégalité (2.2), en multipliant par un facteur convenant, puis par passage à la limite lorsque $h \to 0$, $H \to 0$ et $(h/H) \to 0$.

Supposons que l'inégalité (2.1) se conserve pour toutes les valeurs des x, z $(N = 1)$ et p. f est alors convexe par rapport aux p_α pour tout couple (x,z).

Pour obtenir des théorèmes plus généraux et éviter les difficultés, nous supposerons dans cette partie :

$$(2.4) \quad \begin{array}{l} \text{(i) } f(x,z,p) \text{ continue pour tout } (x,z,p) \ (N \text{ quelconque}) \\ \text{(ii) } f(x,z,p) \geqslant K \text{ pour tout } (x,z,p) \\ \text{(iii) } f(x,z,p) \text{ convexe par rapport aux } p^i_\alpha \text{ pour tout } (x,z) \end{array}$$

*
* *

Actuellement, sous les hypothèses $f \in C^2$, $N > 1$, $z \in C^1(G)$ et z fonction vectorielle minorante pour l'intégrale (1.1), nous obtenons seulement l'inégalité.

$$(2.5) \quad f_{p^i_\alpha p^i_\beta}[x_0, z(x_0), \quad \nabla z(x_0)]\ \lambda_\alpha \lambda_\beta \xi^i \xi^j \geqslant 0$$

pour toutes les valeurs des λ_α et ξ^i.

<u>Si</u> $N = 1$, $f \in C^2$ et si (2.1) était conservée (inégalité stricte) pour toutes les valeurs (x,z,p) et $\lambda \neq 0$, l'équation d'Euler,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} f_{p_\alpha} = f_z$$

pour (1.1) serait elliptique.

Si $N > 1$ et si (2.5) était conservée (sens strict) pour tous les (x,z,p) $\lambda \neq 0$, $\xi \neq 0$, le système des équations d'Euler serait fortement elliptique. Mais les résultats pour les intégrales (1.1) [11] en tenant compte de la condition (2.5) ne sont pas complets. Nous discuterons ces intégrales ultérieurement. Rappelons maintenant des définitions et des lemmes concernant les fonctions convexes.

DÉFINITION 2.1

Un ensemble $S \subset$ espace linéaire est convexe si $P_1, P_2 \in S \Longrightarrow$ segment $P_1 P_2 \subset S$

Une fonction φ est convexe dans l'ensemble convexe S si

$$\varphi[(1-\lambda)\xi_1 + \lambda\xi_2] \leqslant (1-\lambda)\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)\ , \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ \xi_1, \xi_2 \in S$$

LEMME 2.1

Une C.N. S. pour que φ soit convexe dans S ouvert convexe $\subset E_p$ est que $\forall \bar{\xi} \in S$, $\exists$ fonction linéaire $a_p \xi^p + b$ telle que

$$(2.6) \qquad \varphi(\bar{\xi}) = a_p \bar{\xi}^p + b\ , \qquad \varphi(\xi) \geqslant a_p \xi^p + b \quad \forall \xi \in S$$

Si $\varphi \in C^1(S)$, $(2.6) \Longleftrightarrow E(\xi, \bar{\xi}) \equiv \varphi(\xi) - \varphi(\bar{\xi}) - (\xi^p - \bar{\xi}^p)\varphi_{,p}(\xi) \geqslant 0$

Si $\varphi \in C^2(S)$, $(2.6) \Longleftrightarrow \varphi_{,\alpha\beta}(\xi)\eta^\alpha \eta^\beta \geqslant 0 \quad \forall \bar{\xi} \in S$ et $\forall \eta$

DÉFINITION 2.2

Une fonction linéaire vérifiant (2.6) pour des certains φ et $\bar{\xi}$ est dite supportante à φ au point $\bar{\xi}$

LEMME 2.2

Supposons que φ soit convexe dans E_p et que

$$(2.7) \qquad \lim_{|\xi| = +\infty} |\xi|^{-1} \varphi(\xi) = +\infty$$

<u>alors</u> φ atteint son minimum. Si $a_1 \dots a_p$ sont quelconques, $\exists b$ unique tel que $a_p \xi^p + b$ soit supportante à φ en $\bar{\xi}$.

Enfin si ψ est convexe et vérifie (2.7), si $\psi(\xi) \geqslant \varphi(\xi)\ \forall \xi$ et si $a_p \xi^p + c$ est supportante à ψ , alors $c \geqslant b$

LEMME 2.3

a) Hypothèse : (i) φ_n et φ sont convexes dans E_p

(ii) φ_n et φ vérifient (2.7)

(iii) $a_1 \dots a_p$ sont des nombres quelconques

(iv) b_n et b sont choisies pour que $a_p \xi^p + b_n$ et $a_p \xi^p + b$ soient supportantes à φ_n et φ resp.

Conclusion : $b_n \to b$

b) Hypothèse : (i) φ convexe dans E_p

(ii) $a_{pn} \longrightarrow a_p$, $p = 1, 2, \dots P$

(iii) b_n et b telles que $a_{pn} \xi^p + b_n$ et $a_p \xi^p + b$ sup. à φ

Conclusion : $b_n \to b$

LEMME 2.4

Hypothèse : (i) chaque $\varphi \in \mathcal{F}$ est convexe et telles que

$$\varphi(\xi) \leqslant \varphi_0(\xi) < +\infty$$

$$\forall \xi \in S \text{ convexe}$$

(ii) $F(\xi) = \sup\limits_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(\xi), \quad \xi \in S$

Conclusion : F est convexe et $F(\xi) \leqslant \varphi_0(\xi) \quad \forall \xi \in S$

LEMME 2.5 (Inégalité de Jensen)

Hypothèse : (i) φ convexe dans R_p

(ii) S est un ensemble.

(iii) μ mesure bornée $\geqslant 0$ sur S

(iv) ξ^p fonctions $\in L_1(S, \mu)$, $p = 1,2,\ldots, P$

Conclusion :

$$\varphi(\bar{\xi}^1,\ldots,\bar{\xi}^P) \leqslant [\mu(S)]^{-1} \int_S \varphi(\xi^1,\ldots,\xi^P)\, d\mu$$

où

$$\bar{\xi}^p = [\mu(S)]^{-1} \int_S \xi^p \, d\mu$$

Démonstration :

Choisissons les ε_p tels que $\varphi(\bar{\xi}) + \varepsilon_p(\xi^p - \bar{\xi}^p) \leqslant \varphi(\xi) \forall \xi$ puis intégrons par rapport à μ sur S.

$\Longrightarrow$ Nous pouvons démontrer maintenant un premier théorème dû à J. Serrin [12]. (Semi-continuité des intégrales (1.1)).

THÉORÈME 2.1

Hypothèse : (i) $f(p)$ $(p = p_\alpha^i)$ convexe sur $/p$ avec $f(p) \geqslant K \; \forall p$

(ii) G domaine borné

(iii) z_n et $z \in H_1^1(D)$ $\forall$ $D \subset\subset G$

(iv) $z_n \to z$ dans $L_1(D)$ $\forall D \subset\subset G$

Conclusion : $I(z_n, G)$ et $I(z,G)$ sont finies ou égales à $+\infty$ et

$$I(z,G) \leqslant \liminf_{n \to \infty} I(z_n,G).$$

Démonstration :

$I(z_n,G)$ et $I(z,G) \leqslant -\infty$ car les fonctions de x définies par $f[x,z_n(x), \nabla z_n(x)]$ et $f[x,z(x), \nabla z(x)]$ sont mesurables et $\geqslant K$, G étant borné. On peut supposer $K = 0$.

Soit φ un "mollifier" de Friedrichs $\geqslant 0$ et soit

$$z_\rho(x) = \int_{B(x,\ )} \varphi_\rho^*(\xi - x) z(\xi)\, d\xi \qquad (\varphi_\rho^*(y) = \rho^{-\nu}\varphi(y/\rho))$$

$$z_{n\rho}(x) = \int_{B(x,\rho)} \varphi_\rho^*(\xi - x)\, z_n(\xi)\, d\xi \qquad x \in G_\rho\,, \qquad \rho > 0$$

Du lemme de Fatou $\Longrightarrow$ $I(z,D) \leqslant \liminf\limits_{\rho \to 0} I(z_\rho, D)\ \forall\ D \subset\subset G$ car $z_\rho(x) \to z(x)$ et $\nabla z_\rho(x) \to \nabla z(x)$ p.p.

Ainsi $z_{n\rho}$ et $\nabla z_{n\rho}$ convergent uniformément vers z_ρ et ∇z_ρ resp. pour chaque $D \subset\subset G$ et chaque, $\rho, 0 < \rho < \rho_0$ où $D \subset G_{\rho_0}$. Par conséquent, $I(z_\rho, D) = \lim\limits_{n \to \infty} I(z_{n\rho}, D)$. De l'inégalité de Jensen avec $d\mu = \varphi_\rho^*(\xi - x)\, d\xi \Longrightarrow$

$$f[\nabla z_\rho(x)] \leqslant \int_{B(x,\rho)} \varphi_\rho^*(\xi - x) F(\xi)\, d\xi\ , \quad \text{où } F(\xi) = f[\nabla z(\xi)],$$

même résultat pour z_n

Par conséquent :

$$\begin{aligned} I(z_\rho, D) &\leqslant \int_D \Big[\int_{B(x,\rho)} \varphi_\rho^*(\xi - x) F(\xi)\, d\xi \Big] dx \\ &= \int_D \Big[\int_{B(0,\rho)} \varphi_\rho^*(\eta) F(x+\eta)\, d\eta \Big] dx \\ &= \int_{B(0,\rho)} \varphi_\rho^*(\eta) \Big[\int_D F(x+\eta)\, dx \Big] d\eta \\ &= \int_{B(0,\rho)} \varphi_\rho^*(\eta) \Big[\int_{D_\eta} F(y)\, dy \Big] d\eta \\ &\leqslant \int_{B(0,\rho)} \varphi_\rho^*(\eta) \Big[\int_G F(y)\, dy \Big] d\eta = I(z,G) \end{aligned}$$

car $\varphi_\rho^*(\eta) \geqslant 0$, $\int_{B(0,\rho)} \varphi_\rho^*(\eta)\, d\eta = 1$ et $D_\eta \subset G$ pour chaque $\eta \in B(0,\rho)$, D_η étant l'ensemble des $y = x + \eta$ où $x \in D$ (η fixé)

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER

De la même manière, $I(z_{n\rho},D) \leqslant I(z_n,G) \qquad 0 < \rho < \rho_0$

Donc pour chaque $D \subset\subset G$

$$I(z,D) \leqslant \liminf_{\rho \to 0} I(z_\rho,D) = \liminf_{\rho \to 0} \lim_{n \to \infty} [I(z_{n\rho},D)]$$

$$\leqslant \liminf_{\rho \to \infty} \liminf_{n \to \infty} I(z_n\ G) = \liminf_{n \to \infty} I(z_n\ G)$$

Lemme 2.6

Supposons que :

(i) f satisfait aux conditions (2.4)

(ii) f satisfait à une condition uniforme de Lipschitz, constante $L \quad \forall(x,z,p)$

(iii) G est bornée

(iv) les fonctions z et $z_n \in H_1^!(D)$ et $z_n \to z$ dans $L_1(D) \forall D \subset\subset G$.

Alors :

$$I(z,G) \text{ et } I(z_n,G) \text{ sont } \leqslant -\infty$$

et

(2.8)
$$I(z,G) \leqslant \liminf_{n \to \infty} I(z_n,G)$$

Démonstration :

La première conclusion est évidente. En utilisant la condition de Lipschitz, on obtient : $f(x,z,p) \leqslant f(o\ o\ o) + L(x) + L(z) + L(p)$.

Par conséquent $I(z,D)$ et $I(z_n\ D)$ sont finies pour chaque $D \subset\subset G$. Soit φ un mollifier non-négatif, définissons :

$$z_\rho(x) = \int_{B(x,\rho)} z(\xi)\ \varphi^*_\rho(\xi - x)d\xi \quad , \ \varphi^*_\rho(y) = \rho^{-\nu}\varphi(y/\rho)$$

$$F_\rho(x) = \int_{B(x,\rho)} f[\xi, z(\xi), \nabla z(\xi)]\varphi^*_\rho(\xi - x)d\xi \ .$$

Du théorème (1.1), on déduit que $z_\rho(x) \to z(x)$ et $\nabla z_\rho(x) \to \nabla z(x)$ p.p.

En utilisant le lemme de Fatou, on obtient :

(2.9) $$I(z,D) \leqslant \liminf_{\rho \to 0} I(z_\rho, D)$$

l'inégalité de Jensen avec $d\mu(\xi) = \varphi^*_\rho(\xi - x)d\xi$, $\xi \in B(x,\rho)$

on obtient

(2.10) $$f[x, z_\rho(x), \nabla z_\rho(x)] \leqslant \int_{B(x,\rho)} f[x, z_\rho(x), \nabla z(\xi)] \varphi^*_\rho(\xi - x)\, d\xi$$

$$\leqslant F_\rho(x) + L\rho + L\int_{B(x,\rho)} |z(\xi) - z_\rho(x)| \varphi^*_\rho(\xi - x) d\xi$$

De (2.10) et du théorème (1.1), on déduit

(2.11) $$I(z, D) \leqslant I(z, D') + L\rho|D| + L\int_D \left[\int_{B(x,\rho)} |z(\xi) - z_\rho(x)| \varphi^*_\rho(\xi - x) d\xi\right] dx$$

(si $D \subset D'_\rho$ où $D \subset\subset D' \subset\subset G$).

De la convergence de z_n vers z dans $L_1(D')$, on déduit que

$$z_{n\rho} \to z_\rho \quad \text{et} \quad \nabla z_{n\rho} \longrightarrow \nabla z_\rho$$

$$I(z_\rho, D) = \liminf_{n \to \infty} I(z_{n\rho}, D).$$

Enfin, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut choisir une valeur $\rho' > 0$, ρ' suffisamment petite, telle que

$$I(z,D) < I(z_\rho, D) + \varepsilon/2. \qquad 0 < \rho < \rho'$$

En utilisant (2.11) pour z_n et le théorème (1.1), on en déduit que

$$I(z,D) < I(z_\rho, D) + \varepsilon/2 = \lim_{n \to \infty} I(z_{n\rho}, D) + \varepsilon/2$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \liminf_{n \to \infty} I(z_n, G) + L\rho|D|$$

$$+ L\int_D \left\{\int_{B(x,\rho)} |z(\xi) - z_\rho(x)| \varphi^*_\rho(\xi - x) d\xi\right\} dx$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \liminf_{n \to \infty} I(z_n, G) + L\rho \left\{ |D + \int_{D'} |\nabla z(y)|\, dy \right\}$$

Le lemme s'obtient alors facilement.

THÉORÈME 2.2

Hypothèse :

(i) f vérifie (2.1) ainsi que la condition suivante :

$$(2.12) \qquad \underset{f_o \text{ convexe}}{f(x,z,p) \geqslant f_o(p)} \quad \text{où} \quad \lim_{|p| \to \infty} |p|^{-1} f_o(p) = +\infty$$

(ii) z_n et z vérifient les conditions du lemme (2.4)

Conclusion :

$I(z,G)$ et $I(z_n,G)$ sont finies ou égales à $+\infty$ et

$$I(z,G) \leqslant \liminf_{n \to \infty} I(z_n,G)$$

Démonstration : [3], [4]. En utilisant le lemme de Fatou, il suffit de démontrer que $\exists$ une suite $\{f_n\}$ telle que chaque f_n vérifie les conditions du lemme (2.6) et telle que $f_n(x,z,p) \leqslant f(x,z,p)$ $\forall$ n et

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x,z,p) = f(x,z,p)$$

Pour cela, définissons,

$$\varphi(x,z,p\ ;\ a) = a_i^\alpha\ p_\alpha^i + b(x,z\ ;\ a) \qquad (a = a^\alpha{}_i)$$

où φ est l'unique fonction linéaire $/p_\alpha^i$ supportante à f .

Les lemmes 2.2 et 2.3 $\Longrightarrow$ $b(x,z\ ;\ a)$ est continue par rapport à (x,z)

$$b(x,z\ ;\ a) \geqslant b_o(a) \quad \forall a, \quad b_o \text{ défini} \qquad f_o$$

Définissons maintenant

$$b^*_n(x,z\ ;\ a) = [\,1 - \Lambda_n(x,z)]\,b(x,z\ ;\ a) + \Lambda_n(x,z)\ b_o(a) - n^{-1}$$

où

$$\Lambda_n(x,z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant R \leqslant n \\ R - n & \text{si} \quad n \leqslant R \leqslant n+1 \\ 1 & \text{si} \quad R \geqslant n+1 \end{cases} \qquad R \neq \sqrt{x^2 + z^2}$$

$b_n^*(x,z\ ;\ a)$ est uniformément continue par rapport à (x,z) pour chaque a. On peut donc choisir $\rho_n > 0$ tel que

$$b_n(X\ ;\ a) \equiv \int_{B(X,\rho_n)} \psi^*_{\rho_n}(\Xi - X)\, b_n^*(\Xi;\ a)d\,\Xi \leqslant b_n^*(X\ ;a) + n^{-1}$$

pour chaque $X = (x,z)$, ψ "mollifier" de Friedrichs,

$$\psi^*_\rho(X) = \rho^{-\nu-N}\ \psi(\rho^{-1}X).$$

Définissons maintenant :

$$f_n(x,z,p) = \sup \varphi_n(x,z,p\ ;\ a)$$

où

$$\varphi_n(x,z,p) = a_i^\alpha\ p_\alpha^i + b_n(x,z\ ;\ a),$$

parmi les a tels que chaque a_i^α soit un nombre rationnel r/s avec $|r|, |s| \leqslant n$, On en déduit facilement que $\{f_n\}$ est la suite désirée ([3], [4]).

<u>Remarque</u> : Il y a un contre-exemple si on ne fait pas l'hypothèse (2.12) [13].

Avant de démontrer le théorème principal d'existence, nous démontrerons trois lemmes.

LEMME 2.7

Supposons que $f_o(p)$ soit continue et que

(2.13) $$\lim_{p\to\infty} |p|^{-1}\ f_o(p) = +\infty$$

Alors pour chaque $M \geqslant 0$, $\exists$ une fonction $\varphi(\rho) > 0$ pour que $\rho > 0$ telle que $\lim_{\rho\to 0} \varphi(\rho) = 0$

(2.14) $$\int_e |p(x)|dx \leqslant \varphi(e) \ , \ \forall \ e \text{ ensemble mesurable } \subset G \ ,$$

p fonction vectorielle vérifiant

(2.15) $$\int_G f_o[p(x)]dx \leqslant M$$

Démonstration : Définissons $\varphi(\rho)$ comme sup du membre gauche de (2.14) $\forall\, e \subset G$ vérifiant $|e| \leqslant \rho$ et p vérifiant (2.15)

Si $\varphi(\rho)$ ne tend pas vers 0, $\exists\ \varepsilon_o > 0$ $\{e_n\}$ et $\{p_n\}$ telles que $|e_n| \to 0$ et $\int_{e_n} |p_n(x)|dx \geqslant \varepsilon_o$.

Posons

$$\psi(\sigma) = \inf_{|p| \geqslant \sigma} |p|^{-1} f_o(p) \qquad \lim_{\sigma \to +\infty} \psi(\sigma) = +\infty$$

Pour chaque n, soit $g_n \subset e_n$, le sous ensemble où $|p_n(x)| \geqslant \sigma_n = \dfrac{\varepsilon_o}{2|e_n|}$

Alors

$$\int_{g_n} |p_n(x)|dx \geqslant \varepsilon_o/2 \quad , \quad \int_{g_n} f_o[p_n(x)]dx \geqslant \sigma_n\ \varepsilon_o/2$$

Or $\sigma_n \to +\infty \implies$ contradiction.

LEMME 2.8

Supposons que G soit un domaine borné et Lipschitzien, que $\{z_n\}$ soit une suite de fonctions telles que $\|z_n\|^1_V$ soit borné uniformément, alors $\exists$ une sous-suite qui converge dans $L_1(G)$ vers une fonction z.

Démonstration : En appliquant le théorème d'extension (1.8) on peut supposer que $z_n \in H^1_1(D)$ avec $\|z_n\|^1_{1,D} \leqslant M$ uniformément $(G \subset\subset D)$. Choisissons une suite $\{\rho_p\}$ telle que $\rho_{p+1} < \rho_p$, $\rho_p \to 0$ et $G \subset D_{\rho_1}$.

Puis choisissons des sous-suites $\{z_{pn}\}$ successives telles que $z_{pn\,\rho_g} \longrightarrow b_g$ uniformément dans G pour chaque $g \leqslant p$. Du théorème 1.1, nous obtenons :

$$\|z_{n\rho_g} - z_n\| \leqslant CM\rho_g , \quad \|z_{n\rho_g} - z_{n\rho r}\| \leqslant CM(\rho g + \rho r)$$

Par suite

$$\|bg - br\| \leqslant CM(\rho_g + \rho_r) \text{ et } b_g \to z \text{ dans } L_1(G).$$

Alors

$$\|z_{nn} - z\| \leqslant \|z_{nn} - z_{nn\rho_g}\| + \|z_{nn\rho_g} - b_g\| + \|b_g - z\|.$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut choisir g tel que $\|z_{nn} - z_{nn\rho_g}\| < \varepsilon/3$, $\|b_g - z\| < \varepsilon/3$, puis choisir N tel que

$$\|z_{nn\rho_g} - b_g\| < \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

LEMME 2.9

Supposons G domaine borné et Lipschitzien, τ sous-ensemble ouvert de G et σ ensemble ouvert de ∂G, alors $\exists$ des constantes $C_1(G, \tau, r)$ et $C_2(G, \sigma, r)$ telles que :

(2.16) $$\|z\|^1_{r,G} \leqslant C_1(\|\nabla z\|^0_{r,G} + \|z\|^0_{1,\tau}) , \quad z \in H^1_r(G)$$

(2.17) $$\|z\|^1_{r,G} \leqslant C_2(\|\nabla z\|^0_{r,G} + \|z\|^0_{1,\sigma}) \qquad r \geqslant 1$$

Démonstration. Démontrons (2.17)[(2.16) se démontrerait de la même manière]. Si (2.17) était fausse, alors $\exists$ $\{z_n\}$ telle que

(2.18) $$\|z_n\|^1_{r,G} = 1 > n(\|\nabla z\|^0_{r,G} + \|z\|^0_{1,\sigma}).$$

Par conséquent, $\nabla z_n \to 0$ dans $L_r(G)$ et $z \to 0$ dans $L_1(\sigma)$. Si $r > 1$, $\exists|$ sous-suite, que l'on note encore $\{z_n\}$ telle que $z_n \rightharpoonup z$ dans $H^1_r(G)$; dans ce cas $z_n \to z$ dans $L_r(G)$.

Si $r = 1$, $\exists$ sous-suite $\{z_n\}$, telle que $z_n \to z$ dans $L_1(G)$. Il en résulte que $z_n \to z_0$ dans $H^1_r(G)$ et que $z_0 = 0 \Rightarrow$ contradiction avec (2.18) .

THÉORÈME 2.3 (Théorème d'existence)

Hypothèses : (i) f vérifie les conditions (2.4)

(ii) G est borné

(iii) $\exists f_0$ vérifiant (2.13) telle que

$$f(x,z,p) \geqslant f_0(p) \quad \forall \quad (s,z,p)$$

(iv) $\mathcal{F}^*$ est une famille de fonctions vectorielles compacte pour la convergence faible dans $H_1^1(G)$.

(v) $\mathcal{F}$ est une famille, fermée pour la convergence faible dans $H_1^1(G)$; chaque $z \in \mathcal{F}$ coïncide sur ∂G avec une fonction $z^* \in \mathcal{F}^*$ (c'est-à-dire que $z - z^* \in H^1_{1,0}(G)$).

(vi) $I(z_0,G) < +\infty$ pour une fonction z_0 particulière $\in \mathcal{F}$

Conclusion : $\exists$ une fonction $z \in \mathcal{F}$ qui rend minimum $I(z,G)$.

Démonstration : Soit $\{z_n\}$ une suite minorante. On peut supposer que

$$I(z_n,G) \leqslant I(z_0,G) = M.$$

Du lemme (2.7) et des hypothèses $\Longrightarrow \|\nabla z\|^{\circ}_{1,G}$ borné uniformément et $\int_e |\nabla z_n(x)|dx$ absolument continue uniformément. Ainsi, $\forall_n$, $\exists z_n^* \in \mathcal{F}^*$ telle que $w_n = z_n - z_n^*$ $H^1_{1,0}(G)$. De (iv) $\Longrightarrow \exists z_n^*$ convergeant faiblement dans $H_1^1(G)$ vers une fonction $z^* \in \mathcal{F}^*$.

On en déduit ainsi, que les $\|\nabla z_n^*\|^{\circ}_{1,G}$ sont bornées uniformément, que les $\int_e |\nabla z_n^*(x)|dx$ sont absolument continues uniformément et que les classes sont conservées pour $\{w_n\}$.

Grâce aux théorèmes 1.7, 1.10, au lemme 2.8, on peut conclure qu'il existe une sous-suite, notée encore par $\{w_n\}$ qui converge faiblement dans $H^1_{1,0}(G)$ vers une fonction $w \in H^1_{1,0}(G)$. Alors $z_n = z_n^* + w_n \rightarrow z^* + w$ dans $H_1^1(G)$.

Le théorème se déduit du théorème 2.2.

Exemple 1

Dans le théorème 2.3, on peut définir $\mathcal{F}$ égale à l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles z telles que $z - z^* \in H^1_{1,0}(G)$ pour une certaine $z^* \in \mathcal{F}^*$ et telles que z vérifie un système d'équations de la forme

(2.19) $\quad a^{\alpha}_{ij}[x,z(x)]z^j_{,\alpha}(x) + b_{ij}[x,z(x)z^j(x) + c_i[x,z(x)] = 0 \quad i = 1,\dots P,$

où les a^{α}_{ij} b_{ij} et c_i sont continues et bornées $\forall\ (x,z)$. En effet, soit $\{z_n\}$ une suite de fonctions $\in \mathcal{F}$ telle que $z_n \rightarrow z$ dans $H^1_1(G)$ et soit $\{z_r\}$ une sous-suite arbitraire de $\{z_n\}$. En utilisant le théorème (1.10), il existe une sous-suite $\{z_s\}$ de $\{z_r\}$ telle que

$$z_1(x) \rightarrow z(x) \text{ p.p.}$$

Si v^i $(i = 1\dots P)$ sont des fonctions bornées arbitraires, alors

$$a^{\alpha}_{ij}[x,z_s(x)]\, v^i(x), \quad b_{ij}[x,z_s(x)]v^i(x) \quad \text{et} \quad e_i[x,z_s(x)]v^i(x)$$

convergent p.p. vers $a^{\alpha}_{ij}[x,z(x)]v^i(x)$ etc. respectivement, et toutes ces fonctions sont bornées uniformément.

Par intégration, on en déduit que $z \in \mathcal{F}$

Remarque : Si z est la fonction vectorielle définie par

$$z^i_{\alpha}(x) = D^{\alpha} w^i(x) \qquad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m_i - 1 \qquad i = 1,\dots N,$$

l'intégrale $I(z,G)$ est égale à une intégrale $J(w,G)$ pour un problème de calcul de variations d'ordre supérieur et le théorème 2.3 pour I entraîne un théorème correspondant pour J.

Exemple 2

Supposons que $G = B(0,1)$, $\nu = 2$ et que $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ est l'ensemble des $z \in H^1_2(G)$ avec $\|\nabla z\|^{\circ}_{2,G} \leqslant L$ tels que la restriction de z à $\partial^+ G$ (c'est-à-dire à la partie de ∂G où $x^2 \geqslant 0$) soit un homéomorphisme de $\partial^+ G$ sur un arc Γ donné, faisant correspondre le point $(0,1) \in \partial^+ G$ à un point particulier de Γ et $z(x) \in M$ pour presque tous les x où

$x^2 < 0$, (M variété donnée contenant les extrémités de Γ).

Nous supposons L suffisamment grand pour que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. La fonction qui rend minimum l'intégrale de Dirichlet est une solution du problème de Plateau pour une surface S telle que Γ soit une partie de ∂S et que l'autre partie de ∂S soit dans M.

III. Premier théorème de la différentiabilité.

Dans cette partie, nous supposons que f vérifie les conditions suivantes pour toutes (x,z,p) et λ :

$$f \in C^2, \quad N = 1,$$

$$(3.1) \qquad m_1 V^k - K \leq f(x,z,p) \leq M_1 V^k \;, \quad V = 1 + z^2 + |p|^2 \;, \quad k \geq 1$$

$$\sum (f^2_{p_\alpha} + f^2_{p_\alpha x \gamma} + f^2_z + f^2_{zx\gamma}) \leq M_1 \; V^{2k-1} \;, \quad 0 < m_1 \leq M_1$$

$$\sum (f^2_{p_\alpha z} + f^2_{zz}) \leq M_1 \; V^{2k-2}$$

$$m_1 \; V^{k-1} \; |\lambda|^2 \leq f_{p_\alpha p_\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \leq M_1 \; V^{k-1} \; |\lambda|^2 \; .$$

On peut obtenir les mêmes résultats (en utilisant les mêmes méthodes) dans le cas où $f = f(x,p)$ et f vérifie (3.1) avec $V = 1 + |p|^2$.

LEMME 3.1. <u>Supposons que</u> z <u>soit une fonction qui rende l'intégrale</u> $I(z,G)$ <u>minimum dans la famille des fonctions</u> z <u>telles que</u> $z - z^* \in H^1_{2k,0}(G)$, z^* <u>étant une fonction donnée</u> $\in H^1_{2k}(G)$. <u>Alors,</u> z <u>vérifie</u>

$$(3.2) \qquad \int_G (\zeta_{,\alpha} \; f_{p_\alpha} + \zeta \;\; f_z) \, dx = 0 \;, \quad f_{p_\alpha} = f_{p_\alpha}[x, z(x), \; \nabla z(x)], \text{ etc.},$$

<u>pour chaque</u> $\zeta \in H^1_{2k,0}(G)$.

Démonstration : Evidemment $z + \lambda \zeta - z^* \in H^1_{2k,0}(G)$ pour chaque λ si $\zeta \in H^1_{2k,0}(G)$. Par conséquent $\varphi(\lambda) = I(z + \lambda\zeta, G)$ est définie pour toutes les valeurs de λ et $\varphi(\lambda) \geq \varphi(0)$ $\forall \; \lambda$. On a aussi

$$(3.3)\quad f[x,z+\lambda\zeta,\nabla z+\lambda\nabla\zeta] = f(x,z,\nabla z) + \lambda(f_{p_\alpha}\zeta_{,\alpha} + f_z\zeta) + \lambda^2(A^{\alpha\beta}\zeta_{,\alpha}\zeta_{,\beta} + 2B^\alpha\zeta\zeta_{,\alpha} + C\zeta^2),$$

où (p.p.)

$$A^{\alpha\beta}(x) = \int_0^1 f_{p_\alpha p_\beta}(x,z+t\lambda\zeta, \nabla z + t\lambda\nabla\zeta)dt, \text{ etc.}$$

Les hypothèses concernant f entraînent f_{p_α} et $f_z \in L_s$, $s = 2k/(2k-1)$, $\zeta_{,\alpha} f_{p_\alpha} + \zeta f_z \in L_1(G)$, et

$$\sum [(A^{\alpha\beta})^2 + 2(B^\alpha)^2 + C^2] \leq CM_1 \int_0^1 [1+(z+t\lambda\zeta)^2 + |\nabla z + t\lambda\nabla\zeta|^2]^{k-1}dt \quad \text{p.p.}$$

Par conséquent l'intégrale du coefficient de λ^2 dans l'équation (3.3) est bornée uniformément pour toutes les valeurs de λ telles que $|\lambda| \leq 1$. Le lemme s'en déduit aisément.

DÉFINITION : Une <u>extrémale</u> est une fonction z qui vérifie (3.2) pour toute fonction $\zeta \in Lip_c(G)$.

LEMME 3.2. <u>Supposons que</u> $z \in H^1_{2k}(G)$ <u>et vérifie</u> (3.2) <u>pour chaque</u> $\zeta \in H^1_{2k,0}(G)$. <u>Alors, pour chaque domaine</u> $D \subset\subset G$, <u>les fonctions</u> p_γ <u>et</u> $U = V^{k/2} \in H^1_2(D)$ <u>et vérifient</u>

$$(3.4)\quad \int_D V^{k-1}[\zeta_{,\alpha}(a^{\alpha\beta}p_{\gamma,\beta} + b^\alpha p_\gamma + e^{\alpha\gamma}V^{1/2}) + \zeta(b^\alpha p_{\gamma,\alpha} + cp_\gamma + f^\gamma V^{1/2}]\,dx = 0$$

$\forall\zeta \in H^1_{2k,0}(D)$, <u>où les fonctions</u> $a^{\alpha\beta}$, b^α, c, $e^{\alpha\gamma}$, <u>et</u> f^γ <u>sont bornées et mesurables, les fonctions</u> $a^{\alpha\beta}$ <u>vérifient</u>

$$(3.5)\quad m_1|\lambda|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\lambda_\alpha\lambda_\beta \leq M_1|\lambda|^2$$

<u>pour presque toutes les</u> $x \in G$ <u>et toutes les</u> λ, <u>et</u>

$$(3.6)\quad \begin{aligned} &V^{k-1}(x)a^{\alpha\beta}(x) = f_{p_\alpha p_\beta}[x,z(x), \nabla z(x)], \quad V^{k-1}b^\alpha = f_{p_\alpha z}, \\ &V^{k-1}c = f_{zz}, \quad V^{k-1/2}e^{\alpha\gamma} = f_{p_\alpha x\gamma}, \quad V^{k-1/2} f^\gamma = f_{zx\gamma} . \end{aligned}$$

De plus, $V^{k-1}|\nabla p|^2 \in L_1(D)$ _pour chaque_ $D \subset\subset G$.

Démonstration : Nous supposons $k > 1$; dans le cas $k = 1$, on peut supprimer les facteurs A_h et $A = V^{k-1}$.

Soit D donnée avec $D \subset\subset G$. Choisissons (i) D' telle que $D \subset\subset D' \subset\subset G$ et $D' \subset G_{h_0}$, (ii) $\zeta \in H_{2k,0}(G)$, de support $\subset D'$, (iii) γ tel que $1 \leqslant \gamma \leqslant \nu$ (γ entier), et e_γ le vecteur de longueur 1 dans la direction de l'axe de la coordonnée x^γ. Définissons ζ_h et z_h par

$$\zeta_h(x) = h^{-1}[\zeta(x - he_\gamma) - \zeta(x)], \quad z_h(x) = h^{-1}[z(x + he_\gamma) - z(x)]$$

$$0 < |h| < h_0 .$$

En remplaçant ζ par ζ_h dans l'équation (3.2) et en faisant un changement de coordonnées dans les termes qui contiennent $\zeta(x - he_\gamma)$, on conclut que z_h vérifie :

$$(3.7)\quad \int_D A_h(x)\left\{\zeta_{,\alpha}(a_h^{\alpha\beta} z_{h,\beta} + b_h^\alpha z_h + e_h^{\alpha\gamma} P_h^{1/2}) + \right. \\ \left. + \zeta(b_h^\alpha z_{h,\alpha} + c_h z_h + f_h^\gamma P_h^{1/2}) \right. dx = 0 ,$$

où

$$(3.8)\quad \begin{aligned} A_h(x) &= \int_0^1 [1 + |z(x) + t\Delta z|^2 + |p(x) + t\Delta p|^2]^{k-1} \\ A_h(x)a_h^{\alpha\beta}(x) &= \int_0^1 f_{p_\alpha p_\beta}[x + the_\gamma, z(x) + t\Delta z, p(x) + t\Delta p]\, dt \\ A_h(x)b_h^\alpha(x) &= \int_0^1 f_{p_\alpha} z[\text{même}]\, dt, \quad \Delta z = z(x + he_\gamma) - z(x) \\ P_h(x) &= \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} [1 + |z(x) + t\Delta z|^2 + |p(x) + t\Delta p|^2] , \end{aligned}$$

et les autres coefficients sont donnés par les formules correspondantes. Il suit des hypothèses que $a_h^{\alpha\beta}$, b_h^α , c_h , $e_h^{\alpha\gamma}$, et f_h^γ sont bornés uniformément pour $0 < |h| < h_0$ et que les $a_h^{\alpha\beta}$ vérifient (3.5) uniformément pour

$0 < |h| < h_o$. Enfin

$$A_h \longrightarrow A = V^{k-1} \quad \text{dans} \quad L_\lambda(D') \ , \qquad \lambda = k/(k-1)$$

(3.9)

$$z_h \longrightarrow p_\gamma \quad \text{dans} \quad L_{2k}(D').$$

Maintenant, supposons que $\eta \in Lip_c(D')$, $D \subset D'_a$, $0 < |h| < h_o$, et posons

$$(3.10) \qquad \zeta = \eta^2 z_h \ , \ \eta \equiv 1 \ \text{ dans } \ D \ , \quad \eta = 1 - 2a^{-1} d(x,D)$$

$$\text{pour} \quad 0 \leq d(x,D) \leq a/2$$

$$\eta = 0 \quad \text{pour} \quad x \in D' - D \quad \text{et} \quad d(x,D) \geq a/2$$

dans l'équation (3.7). En utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$(3.11) \qquad \int_{D'} A_h(x) |\nabla z_h(x)|^2 \, dx \leq C \int_D (\eta^2 + |\nabla \eta|^2) A_h(x)(z_h^2 + P_h) dx$$

et le membre de droite est borné uniformément pour $0 < |h| < h_o$.

Il suit de (3.11) et (3.9) que $z_h \longrightarrow p_\gamma$ dans $H_2^1(D)$ pour une sous-suite de valeurs de $h \longrightarrow 0$. De (3.9) et (3.11), on déduit que

$$(3.12) \quad A_h^{1/2} \zeta_{,\alpha} \longrightarrow A^{1/2} \zeta_{,\alpha} \quad \text{et} \quad A_h^{1/2} a_h^{\alpha\beta} z_{h,\beta} \longrightarrow A^{1/2} a^{\alpha\beta} p_{\gamma,\beta}, \text{etc.}$$

dans $L_2(D)$ pour chaque ζ fixé $\in H^1_{2k,0}(D)$ et une sous-suite extraite de la précédente. Par conséquent on conclut que chaque $p_\gamma \in H_2^1(D) \cap L_{2k}(D)$ et

en utilisant la semicontinuité, que

$$\int_D V^{k-1} |\nabla p|^2 dx \leq C a^{-2} \int_{D'} V^k dx$$

De plus, il suit de la convergence dans (3.12) qu'on peut faire tendre $h \to 0$ dans (3.7) pour obtenir (3.4). Il suit du théorème 1.6 que $U \in H_2^1(D)$.

REMARQUES. On déduit du lemme 3.2 et du lemme de Sobolev (théorème 1.13) que la fonction $U = V^{k/2} \in L_{2s}(B_r)$ pour chaque $r < R$,

$$[s = \nu/(\nu - 2) \ , \quad B_r = B(x_o, r), \quad \text{et} \quad B_R \subset G].$$

L'idée de Moser [14] est de démontrer que $U^{\tau} \in L_2(B_r)$ pour chaque τ d'une suite $\longrightarrow +\infty$ et chaque r d'une suite $\longrightarrow R/2$. En utilisant certaines inégalités on peut conclure que U est bornée dans $B_{R/2}$. Pour cela, on pourrait poser $\zeta = \eta^2 U^{2\tau-2} \bar{p}_{,\gamma}$, ou $\eta \in \mathrm{Lip}_c(B_r)$ et $\eta(x) = 1$ pour $x \in B_{r'}$, $r' < r$. Mais malheureusement ces fonctions ζ ne sont pas nécessairement dans l'espace $H^1_{2k,0}(B_r)$. Par conséquent, il faut démontrer des lemmes techniques.

LEMME 3.3. <u>Supposons que</u> (i) ζ <u>et</u> $B \in H^1_1(D)$, (ii) <u>le support de</u> ζ <u>est compact et</u> $\subset D$, (iii) $\zeta B_{,\gamma}$ <u>et</u> $\zeta_{,\gamma} B \in L_1(D)$ <u>pour un certain entier</u> γ, $1 \leq \gamma \leq \nu$. <u>Alors</u>

$$\int_D \zeta B_{,\gamma}\, dx = -\int_D \zeta_{,\gamma} B dx.$$

Démonstration : Soient $\bar{\zeta}$ et $\bar{B}$ fonctions de ζ et B, respectivement, possédant les propriétés de continuité absolue annoncées dans le théorème 1.6. Il suit que la fonction $\bar{\zeta}\bar{B}$ est absolument continue par rapport à x^{γ} pour presque toutes les valeurs de $(x^1, \ldots, x^{\gamma-1}, x^{\gamma+1}, \ldots, x^{\nu})$. Le lemme s'en déduit en utilisant le théorème de Fubini.

LEMME 3.4. <u>Supposons que</u> (i) A^{α} <u>et</u> $B \in H^1_1(D)$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$, <u>et</u> (ii) <u>que</u>

$$\int_D (A^{\alpha} \zeta_{,\alpha} + B\zeta) dx = 0$$

<u>pour toute</u> $\zeta \in \mathrm{Lip}_c(D)$. <u>Alors</u>

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} A^{\alpha}_{,\alpha}(x) = B(x) \quad \text{p.p. } \underline{\text{sur}}\ D.$$

Démonstration : En utilisant le lemme 3.3, on conclut que

$$\int_D \zeta(B - \sum_{\alpha=1}^{\nu} A^{\alpha}_{,\alpha}) dx = 0$$

pour chaque $\zeta \in \mathrm{Lip}_c(D)$.

LEMME 3.5. <u>Supposons que</u>

(i) $\zeta \in H_2^1(D)$ <u>et le support de</u> $\zeta \subset D$;

(ii) $\psi \in H_2^1(D)$ <u>et</u> $\psi(x) \geqslant 1$ p.p. <u>sur</u> D ;

(iii) $A^\alpha \in H_1^1(D)$, $\alpha = 1,\ldots,\nu$;

(iv) $\psi\zeta$ et $\psi^{-1}A^\alpha \in H_2^1(D)$, $\alpha = 1,\ldots,\nu$;

(v) $\psi\nabla\zeta$ et $\psi^{-1}\nabla A^\alpha \in L_2(D)$, $\alpha = 1,\ldots,\nu$.

<u>Alors, pour chaque</u> γ, $1 \leqslant \gamma \leqslant \nu$, $\sum_{\alpha=1}^{\nu} (\zeta_{,\alpha}A^\alpha_{,\gamma} - \zeta_{,\gamma}A^\alpha_{,\alpha}) \in L_1(D)$ <u>et</u>

$$\int_D \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\zeta_{,\alpha}A^\alpha_{,\gamma} - \zeta_{,\gamma}A^\alpha_{,\alpha})dx = 0, \quad \gamma = 1,\ldots,\nu.$$

Démonstration : Pour chaque n, définissons $\psi_n(x) = \psi(x)$ toutes les fois que $\psi(x) < n$ et $\psi_n(x) = n$ pour tout $x \in E_n$, ensemble où $\psi(x) \geqslant n$. Evidemment $\psi_n \in H_2^1(D)$ et $\nabla\psi_n(x) = 0$ p.p. sur E_n et $\nabla\psi_n(x) = \nabla\psi(x)$ p.p. sur $D - E_n$. Maintenant, définissons

$$\omega = \psi\zeta, \quad C^\alpha = \psi^{-1}A^\alpha, \quad \zeta_n = \psi_n^{-1}\omega, \quad A_n^\alpha = \psi_n C^\alpha, \quad \chi = \ln\psi .$$

Grâce aux hypothèses, il suit que $\omega \in H_2^1(D)$, $C^\alpha \in H_2^1(D)$, et, par conséquent

$$\omega\nabla\chi \in L_2(D), \quad \zeta\nabla\chi \in L_2(D), \quad C^\alpha\nabla\chi \in L_2(D). \tag{3.13}$$

On voit aussi que

$$|\zeta_n| = |\psi_n^{-1}\omega| \leqslant |\omega|$$

$$\nabla\zeta_n = \psi_n^{-1}\nabla\omega - \psi_n^{-2}\omega\nabla\psi_n = \begin{cases} n^{-1}\nabla\omega & \text{, p.p. sur } E_n \\ \psi^{-1}\nabla\omega - \zeta\nabla\chi & \text{, p.p. sur } D - E_n \end{cases}$$

Par conséquent, chaque $\zeta_n \in H_2^1(D)$ et son support $\subset D$.

On a aussi

$$|A_n^\alpha| = |\psi_n C^\alpha| \leqslant n|C^\alpha|$$

$$\nabla A_n^\alpha = \begin{cases} \psi_n \nabla C^\alpha \\ \psi_n(\nabla C^\alpha - C^\alpha \nabla \chi) \end{cases}$$

Par conséquent, chaque $A_n^\alpha \in H_2^1(D)$. En utilisant les fonctions mollifiées on conclut aisément que

(3.14) $\int_D J_n(x)dx = 0$ où $J_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\zeta_{n,\alpha} A^\alpha_{n,\gamma} - \zeta_{n,\gamma} A^\alpha_{n,\alpha})$.

Maintenant, définissons

(3.15) $J = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\zeta_{,\alpha} A^\alpha_{,\gamma} - \zeta_{,\gamma} A^\alpha_{,\alpha})$, $\quad J_0 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\omega_{,\alpha} C^\alpha_{,\gamma} - \omega_{,\gamma} C^\alpha_{,\alpha})$.

Il suit des définitions et (3.13) que

$$(3.16) \qquad \begin{aligned} J_n(x) &= J(x) \text{ p.p. sur } D - E_n, \\ J_n(x) &= J_0(x) \text{ p.p. sur } E_n, \end{aligned}$$

$$J(x) = J_0(x) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} [\omega_{,\alpha}(C^\alpha \chi_{,\gamma}) - C^\alpha \chi_{,\alpha}) - C^\alpha_{,\gamma}(\omega\chi_{,\alpha}) - \omega_{,\gamma}(C^\alpha \chi_{,\alpha}) + C^\alpha_{,\alpha}(\omega\chi_{,\gamma})]$$

$$\int_D J(x)dx = \int_{E_n} [J(x) - J_0(x)]dx \to 0 .$$

LEMME 3.6. <u>Supposons que la fonction</u> U <u>du lemme</u> 3.2 $\in L_{2\tau}(D')$ <u>pour un nombre</u> $\tau \geqslant 1$. <u>Alors, la fonction</u> $w = U^\tau \in H_2^1(D)$ <u>pour chaque</u> $D \subset\subset D'$ <u>et</u>

$$\int_D |\nabla w|^2 dx \leqslant C^2 \tau^2 a^{-2} \int_{D'} w^2 dx \quad \text{si } D \subset D'_a ,$$

<u>où</u> C <u>ne dépend que</u> ν, m_1, M_1, K, et k.

Démonstration : Définissons (i) $h = 2\tau - 2$, (ii) $U_L(x) = U(x)$ sur l'ensemble $D' - E_L$ et $U_L(x) = L$ sur l'ensemble E_L des x où $U(x) \geqslant L$,

(iii) $\eta(x) = 1$ sur D, $\eta(x) = 1 - 2a^{-1}d(x,D)$ quand $0 \leqslant d(x,D) \leqslant a/2$, et $\eta(x) = 0$ quand $x \in D'$ et $d(x,D) \geqslant a/2$,

(iv) $\qquad A^{\alpha} = f_{p_\alpha}$, $B = f_z$, $\psi = V^{(k-1)/2}$

(3.17) $\qquad \zeta = \eta^2 U_L^h p_\gamma \qquad (\gamma$ fixé).

Nous concluons du théorème 1.5 et des définitions des coefficients $a^{\alpha\beta}$, etc. que A^{α} et $B \in H_1^1(D')$ avec

(3.18)
$$A^{\alpha}_{,\gamma} = V^{k-1}(a^{\alpha\beta} p_{\gamma,\beta} + b^{\alpha} p_\gamma + e^{\alpha\gamma} V^{1/2})$$
$$B_{,\gamma} = V^{k-1}(b^{\alpha} p_{\gamma,\alpha} + cp_\gamma + f^{\gamma} V^{1/2}).$$

Ensuite, nous concluons de (3.17), (3.18) et du lemme 3.2 que ψ, $\psi\zeta$, $\psi^{-1}A^{\alpha}$, et $\psi^{-1}B \in H_2^1(D')$, $\psi\nabla\zeta$ et $\psi^{-1}\nabla A^{\alpha} \in L_2(D')$, et $\zeta B_{,\gamma}$ et $\zeta_{,\gamma}B \in L_1(D')$, et le support de ζ (le même que celui de η) $\subset D'$. En utilisant les lemmes 3.3, 3.4, et 3.5, nous concluons que le membre de gauche de l'équation (3.4) est égal à

$$\int_{D'} \sum_{\alpha} (\zeta_{,\alpha} A^{\alpha}_{,\gamma} + \zeta B_{,\gamma})dx = \int_{D'} \sum_{\alpha} (\zeta_{,\alpha} A^{\alpha}_{,\gamma} - \zeta_{,\gamma}B)dx$$

(3.19)
$$= \int_{D'} \sum_{\alpha} (\zeta_{,\alpha} A^{\alpha}_{,\gamma} - \zeta_{,\gamma}A^{\alpha}_{,\alpha})dx = 0.$$

En remplaçant ζ par $\eta^2 U_L^h p_\gamma$ dans l'équation (3.4), nous obtenons l'équation

(3.20)
$$\int_{D'} \sum_{\alpha,\gamma} V^{k-1} \Big\{(\eta^2 U_L^h p_{\gamma,\alpha} + \eta^2 h U_L^{h-1} U_{L,\alpha} p_\gamma + 2\eta\eta_{,\alpha} U_L^h p_\gamma)(a^{\alpha\beta} p_{\gamma,\beta} + b^{\alpha} p_\gamma + e^{\alpha\gamma} V^{1/2})$$
$$+ \eta^2 U_L^h p_\gamma (b^{\alpha} p_{\gamma,\alpha} + cp_\gamma + f^{\gamma} V^{1/2})\Big\} dx = 0$$

En utilisant le fait que $V = 1 + z^2 + |p|^2$, $U = V^{k/2}$, $U_L = V_L^{k/2}$, et $V_{,\beta} = 2zp_\beta + 2 p_\gamma p_{\gamma,\beta}$, l'équation (3.20 est équivalente à

$$0 = \int_{D'} V^{k-1} \Big\{ \eta^2 U_L^h (a^{\alpha\beta} p_{\gamma,\beta} p_{\gamma,\beta} + 2b^{\alpha} p_{\gamma} p_{\gamma,\alpha} + c\,|p|^2 + e^{\alpha\gamma} p_{\gamma,\alpha} V^{1/2} + f^{\gamma} p_{\gamma} V^{1/2}) +$$

$$(3.21) \qquad + \eta^2 U_L^h \frac{hk}{2} V_L^{-1} V_{L,\alpha} [a^{\alpha\beta}(\tfrac{1}{2}V,_{\beta} - zp_{\beta}) + b^{\alpha}|p|^2 + e^{\alpha\gamma} p_{\gamma} V^{1/2}] +$$

$$+ 2\eta\eta,_{\alpha} U_L^h [a^{\alpha\beta} p_{\gamma} p_{\gamma,\beta} + b^{\alpha}|p|^2 + e^{\alpha\gamma} p_{\gamma} V^{1/2}] \Big\} dx$$

En utilisant le fait que $U_{L,\alpha} = 0$ p.p. sur E_L et les inégalités

$$|\nabla p|^2 \geqslant \frac{1}{8} V^{-1} |\nabla V|^2 - V, \quad |2ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2, \quad a^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \geqslant m_1 |\lambda|^2,$$

nous concluons que

$$0 \geqslant \int_{D'} V^{k-1} \Big\{ \eta^2 U_L^h [\frac{m_1}{16} V^{-1} |\nabla V|^2 - c_1 V + \frac{hk}{8} (m_1 |\nabla V_L|^2 V^{-1} - c_2 V) -$$

$$- c_3 |\nabla\eta|^2 U_L^h V \Big\} dx \geqslant \frac{m_1}{4k^2} \int_{D'} U_L^h [\eta^2 (1 + 2\,hk) |\nabla U_L|^2 -$$

$$- C(1 + 2hk) U^2 \eta^2 - CU^2 |\nabla\eta|^2] \, dx.$$

Par conséquent, nous avons

$$(3.22) \quad \int_{D'} U_L^{2\tau-2} \eta^2 \, |\nabla U_L|^2 dx \leqslant C \int_{D'} (\eta^2 + |\nabla\eta|^2) U^2 U_L^{2\tau-2} \, dx ,$$

C étant indépendant de τ . Grâce à l'hypothèse (que $U^{\tau} \in L_2(D')$), nous pouvons faire tendre $L \to +\infty$ et conclure que

$$\int_{D'} \eta^2 U^{2\tau-2} \, |\nabla U|^2 dx \leqslant C \int_{D'} (\eta^2 + |\nabla\eta|^2) U^{2\tau} \, dx$$

Le lemme s'en déduit aisément.

THÉORÈME 3.1. <u>Supposons que</u> $z \in H^1_{2k}(G)$ <u>et vérifie</u> (3.2). <u>Alors</u> $z \in Lip(D)$ <u>pour chaque</u> $D \subset\subset G$.

Démonstration: Supposons que $B_{2R} = B(x_o, 2R) \subset G$ et définissons

$R_n = R(1 + 2^{-n})$, $B_n = B(x_o, R_n)$, $w_o = U$, $w_n = w_o^{s^n}$, $s = \nu/(\nu - 2)$.

Evidemment

$$w_n = w_{n-1}^s \quad \text{pour chaque } n.$$

Nous utilisons le lemme de Sobolev (théorème 1.13)

$$\left\{ \int_{B_r} w^{2s} dx \right\}^{1/s} \leqslant C_o \int_{B_r} (|\nabla w|^2 + r^{-2} w^2) \, dx$$

Alors, nous concluons $(R_n \geqslant R)$

(3.23) $$\left\{ \int_{B_n} w_n^2 \, dx \right\}^{1/s} = \left\{ \int_{B_n} w_{n-1}^{2s} \, dx \right\}^{1/s}$$

$$\leqslant C_o \int_{B_n} (|\nabla w_{n-1}|^2 + R^{-2} w_{n-1}^2) dx \leqslant 2C_o C_1 \, s^{2n-2} 4^n R^{-2} \int_{B_{n-1}} w_{n-1}^2 \, dx$$

en utilisant le lemme 3.6. Posons

$$W_n = \int_{B_n} w_n^2 \, dx$$

nous obtenons de (3.23)

$W_n \leqslant K_o^s K_1^{ns} W_{n-1}^s$ où $K_o = 2C_o \, C_1 \, s^{-2} \, R^{-2}$, $K_1 = 4 \, s^2$

Alors $w_o^{2\tau_n} \in L_1(B_R)$ pour chaque $n (\tau_n = s^n)$ et

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \int_{B_R} w_o^{2\tau_n} dx \right\}^{1/\tau_n} \leqslant \lim_{n \to \infty} W_n^{1/\tau_n} \leqslant K_o^{\alpha} K_1^{\beta} W_o \, ,$$

où $\alpha = (1 - s^{-1})^{-1} = \nu/2$, $\beta = \nu^2/4$

$$|U(x)|^2 \leqslant C |B(x_o, 2R)|^{-1} \int_{B(x_o, 2R)} |U(y)|^2 dy \, , \quad x \in B_R \, .$$

En utilisant les résultats de la partie suivante, on peut déduire du théorème 3.1 :

THÉORÈME 3.2

<u>Supposons que</u> $z \in H^1_{2k}(G)$ <u>et vérifie</u> (3.2). <u>Alors</u> $z \in C^1_\mu(G)$ <u>pour un certain nombre</u> <u>positif.</u> En effet l'équation (3.4) prend la forme (4.2).

IV. <u>Certaines équations linéaires.</u>

Dans cette partie nous discutons les équations

$$(4.1) \qquad \int_G (\zeta_{,\alpha}\, a^{\alpha\beta} u_{,\beta} + \zeta c^{\alpha} u_{,\alpha})dx = 0 \ , \quad \zeta \in H^1_{20}(G),\ \Lambda(\zeta) \subset G$$

$$(4.2) \qquad \int_G [\zeta_{,\alpha}(a^{\alpha\beta}u_{,\beta} + e^{\alpha}) + \zeta(c^{\alpha}u_{,\alpha} + f)]dx = 0,$$

$$\zeta \in H^1_{20}(G), \quad \Lambda(\zeta) \subset G$$

où $\Lambda(\zeta)$ dénote le support (ensemble fermé) de ζ et les coefficients $a^{\alpha\beta}$ et c^{α} sont bornés et mesurables et les coefficients $a^{\alpha\beta}$ vérifient (3.5) ; nous ferons plus tard des hypothèses convenables concernant les fonctions e et f. Les équations plus générales ont été discutées dans les articles [15], [16], et [17]. Le Dr. Kotake les a également discutées en utilisant la méthode de Moser et Morrey dans ce séminaire, l'année dernière. Dans cette partie nous utilisons les méthodes de Kotake-Moser-Morrey.

DÉFINITIONS

Une fonction u <u>est une solution de</u> (4.1) (ou (4.2)) si $u \in L_2(G)$, $u \in H^1_2(D)$ pour chaque $D \subset\subset G$, et (4.1) (resp. (4.2)) est conservé. Une fonction v <u>est une sous-solution de</u> (4.1) si $v \in L_2(G)$, $v \in H^1_2(D)$ pour chaque $D \subset\subset G$, et

$$(4.3) \qquad \int_G (\psi_{,\alpha}\, a^{\alpha\beta} v_{,\beta} + \psi c^{\alpha} v_{,\alpha})dx \leqslant 0 \quad \psi \geqslant 0 \quad \psi \in H^1_{20}(G) \quad \Lambda(\psi) \subset G.$$

THÉORÈME 4.1

<u>Supposons que</u> (i) F <u>soit une fonction convexe et non négative sur</u> R_1, (ii) u <u>soit une solution de</u> (4.1), (iii) $v(x) = F[u(x)]$, <u>et</u> (iv) $v \in L_2(G)$. <u>Alors</u> v <u>est une sous-solution de</u> (4.1) <u>et</u>

$$(4.4) \qquad \int_D |\nabla v|^2 dx \leqslant (C_1 + C_2 a) \int_G v^2 dx \quad \text{si } D \subset G_a,$$

<u>où</u> C_1 <u>ne dépend que de</u> m_1, M_1 <u>et du vrai max de</u> $|C(x)|$, <u>et</u> C_2 <u>ne dépend que de</u> m_1 <u>et</u> M_1.

Démonstration : Premièrement, nous supposons que $F \in C^2(R_1)$ et vérifie une condition uniforme de Lipschitz. Alors il suit du théorème 1.5 que $v \in L_2(G)$ et $v \in H_2^1(D)$ pour chaque $D \subset\subset G$. Supposons que $\psi \in \mathrm{Lip}_c(G)$ et que $\psi \geqslant 0$ dans G et posons $\zeta = \psi F'(u)$ dans G. Alors $\Lambda(\zeta) \subset G$ et $\zeta \in H_{20}^1(G)$. En utilisant (4.1) avec cette fonction ζ, nous concluons que

$$(4.5) \quad 0 = \int_G [\psi,_\alpha a^{\alpha\beta} v,_\beta + \psi c^\alpha v,_\alpha + \psi F''(u) a^{\alpha\beta} u,_\alpha u,_\beta] dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_G (\psi,_\alpha a^{\alpha\beta} v,_\beta + \psi c^\alpha v,_\alpha) dx$$

Il suit aisément que v est une sous-solution de (4.1). Maintenant définissons η comme dans la démonstration du lemme 3.6 et posons

$$(4.6) \qquad \psi = \eta^2 v$$

dans l'équation (4.5). On en déduit que

$$(4.7) \qquad 0 \geqslant \int_G [\eta^2 (a^{\alpha\beta} v,_\alpha v,_\beta + c^\alpha v,_\alpha v) + 2\eta\eta,_\alpha a^{\alpha\beta} v v,_\alpha] dx.$$

L'inégalité (4.4) suit aisément de (4.7), de l'inégalité de Schwarz, et de l'inégalité $|2\, ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$.

En général, on peut choisir une suite $\{F_n\}$ de fonctions convexes dont chaque $F_n \in C^2(R_1)$ et vérifie une condition uniforme de Lipschitz telle que $F_n(u) \leq F(u)$ pour chaque n et u et $F_n(u) \to F(u)$ pour chaque u. Si $v_n(x) = F_n[u(x)]$, on en déduit que $0 \leq v_n(x) \leq v(x)$ pour chaque n et x, que $v_n \to v$ dans $L_2(G)$ et, par conséquent de l'inégalité (4.4) pour chaque n, que $v_n \to v$ dans $H_2^1(D)$ pour chaque $D \subset\subset G$. Le théorème suit aisément.

THÉORÈME 4.2

Supposons que F,u et v vérifient les hypothèses du théorème 4.1 avec $G = B_{R+a} = B(x_o, R+a)$. Alors

$$|v(x)|^2 \leq Ca^{-\nu} \int_{B_{R+a}} |v(y)|^2 dy \quad , \quad x \in B_R ,$$

où C ne dépend que de ν , m_1, M_1, et du vrai max de $|C(x)|$.

Démonstration : Définissons

$$s = \nu/(\nu-2), \quad \tau_n = s^n , \quad w_o = v, \quad w_n = v^{\tau_n} , \quad B_n = B(x_o, R+2^{-n} a).$$

En utilisant le théorème 4.1, nous concluons que w_n est une sous-solution de (4.1) sur B_n pour chaque n. Le reste de la démonstration est essentiellement le même que celle du théorème 3.1.

LEMME 4.1

Supposons que (i) F soit non-négative et convexe sur l'intervalle $[0,\infty)$, (ii) $H = -e^{-F}$ soit convexe sur $[0,\infty)$, (iii) u soit une solution non-négative (4.1) sur G, (iv) $v(x) = F[u(x)]$ sur G, et (v) $v \in L_2(G)$. Alors, v est une sous-solution de (4.1) sur G et

$$\int_D |\nabla v|^2 dx \leq Ca^{-2}|G| \qquad \text{si} \quad D \subset G_a$$

où C ne dépend que de m_1, M_1, et du vrai max de $|C(x)|$.

Démonstration : Premièrement, nous supposons que

$$H \in C^2[0,\infty] \ ; \quad -1 \leqslant H(u) \leqslant -\varepsilon \quad (\varepsilon < 0)$$

et que $H''(u)$ soit bornée sur $[0,\infty]$. On en déduit que $F \in C^2[0,\infty)$, F, F', et F'' sont bornées dans cet ensemble et que $F''(u) \geqslant [F'(u)]^2$. Posons $\zeta = \eta^2 F'(u)$ dans l'équation (4.1) où η est définie comme dans la démonstration du lemme 3.6 ; il suit aisément que $\zeta \in H^1_{20}(G)$ avec $\Lambda(\zeta) \subset G$. Il en résulte que

$$0 = \int_G [2\eta\eta,_\alpha a^{\alpha\beta} v,_\beta + \eta^2 F''(u)\ a^{\alpha\beta} u,_\alpha u,_\beta + \eta^2\ c^\alpha v,_\alpha] dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_G [\eta^2 (a^{\alpha\beta} v,_\alpha v,_\beta + c^\alpha v,_\alpha) + 2\eta\eta,_\alpha a^{\alpha\beta} v,_\beta] dx$$

et enfin

$$\int_G \eta^2 |\nabla v|^2 dx \leqslant C \int_G (\eta^2 + |\nabla\eta|^2) dx.$$

L'inégalité s'en déduit aisément.

Dans le cas général H est convexe avec $-1 \leqslant H(u) < 0$ sur $[0,\infty)$. On peut choisir une suite $\{H_n\}$ dont chaque H_n possède les propriétés désirées telle que $H_n(u) \leqslant H(u)$ et $H_n(u) \to H(u)$ sur $[0,\infty)$. Il suit que $F_n(u) \leqslant F(u)$ et $F_n(u) \to F(u)$ et le reste de la démonstration se fait comme dans la dernière partie de celle du théorème 4.1.

LEMME 4.2.

Supposons que $u \in H^1_2(B_R)$, $B_R = B(x_0,R)$, et que l'ensemble S de points x pour lesquels $u(x) = 0$ a la mesure $|S| \geqslant c_1 |B_R|$ où $c_1 > 0$. Alors

$$\int_{B_R} |u(x)|^2 dx \leqslant CR^2 \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx$$

où C ne dépend que de ν et c_1

Il suffit de démontrer l'inégalité pour $R = 1$.

Démonstration : Supposons que l'inégalité est fausse. Alors, il existe une suite $\{u_n\}$, telle que $\|u_n\|_2^1 = 1$, $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_2^1(B_1)$, $|S_n| \geqslant c_1 |B_1|$, et

$$\int_{B_1} |(u_n(x)|^2 dx > n \int_{B_1} |\nabla u_n|^2 \, dx .$$

S_n étant l'ensemble où $u_n(x) = 0$. On en déduit que $u_n \to u$ et $\nabla u_n \to 0$ dans $L_2(B_1)$ $u_n \to u$ dans $H_2^1(B_1)$ et que $u = d = \text{const.} \neq 0$ sur B_1 car $\|u\|_2^1 = 1$. Alors

$$d^2 |S_n| = \int_{S_n} |u_n - u|^2 dx \leqslant \int_{B_1} |u_n - u|^2 \, dx \to 0.$$

Nous obtenons une contradiction.

THÉORÈME 4.3

Supposons que (i) u soit une solution $\geqslant 0$ de (4.1) sur $B_{2R} \equiv B(x_0, 2R)$ et (ii) l'ensemble S des x où $u(x) \geqslant 1$ a une mesure $\geqslant c_1 |B_{2R}| (C_1 > 0)$. Alors

$$u(x) \geqslant c_2 > 0 \qquad \text{pour} \quad x \in B_R ,$$

où c_2 ne dépend que ν, m_1, M_1, C_1, et du vrai max de $|c(x)|$.

Démonstration. $\exists\, k$, $1 < k < 2$ tel que $|B_{2R} - B_{kR}| = c_1 |B_{2R}| 1/2$. Alors $|S \cap B_{kR}| \geqslant c_1 |B_{kR}| 1/2$. Définissons $F(u) = \max\,[-\log(u + \varepsilon), 0]$, où $\varepsilon > 0$ arbitraire. On voit aisément que F vérifie les hypothèses du lemme 4.1. Par conséquent

$$\int_{B_{kR}} |\nabla v|^2 dx \leqslant C_1 \, R^{\nu-2} , \quad v(x) = F[u(x)].$$

Car $v(x) = 0$ sur S et $|S \cap B_{kR}| \geqslant c_1 |B_{kR}| 1/2$, on en déduit que

$$\int_{B_{kR}} v^2\, dx \leqslant C_2 R^{\nu} .$$

Le théorème se démontre en utilisant le théorème 4.2.

THÉORÈME 4.4

Soit u une solution de (4.1) sur G. Alors $u \in \overset{\circ}{C}_{\mu_0}(G)$ où $0 < \mu_0 < 1$ et μ_0 ne dépend que de ν, m_1, M_1, et du vrai max de $|c(x)|$. Plus précisément

$$|u(x) - u(x_0)| \leqslant C \, \|u\|^{\circ}_{2,R+\delta} \, \delta^{-\tau} (|x - x_0|/R)^{\mu_0} ,$$

où

$$B_{R+\delta} = B(x_0, R+\delta) \subset G , \quad x \in B_R , \quad \tau = \nu/2 , \quad \delta \leqslant R ,$$

et C ne dépend que des mêmes quantités que μ_0.

Démonstration : Il suffit de démontrer l'inégalité. Nous supposons que $B(x_0, R + \delta) \subset G$. Il suit du théorème 4.2 que

$$|u(x)| \leqslant C_1 \, \delta^{-\tau} \, \|u\|^{\circ}_{2,R+\delta} , \quad x \in B_R .$$

Définissons $m = \text{vrai min. } u(x)$, $M = \text{vrai max. } u(x)$ pour $x \in B_R$ et choisissons $\bar{m}$ (unique) de telle sorte que $|S^+| \leqslant |B_R|/2$ et $|S^-| \leqslant |B_R|/2$, S^+ et S^- étant les ensembles de points $x \in B_R$ pour lesquels $u(x) > \bar{m}$ resp. $u(x) < \bar{m}$. Si $m < \bar{m} < M$, les fonctions $[M - u(x)]/(M - \bar{m})$ et $[u(x) - m]/(\bar{m} - m)$ vérifient les hypothèses du théorème 4.3 sur B_R avec $c_1 = 1/2$. Alors $m_1 \leqslant u(x) \leqslant M_1$ pour $x \in B_{R/2}$, où

$$m_1 = \bar{m} - h(\bar{m} - m), \quad M_1 = \bar{m} + h(M - \bar{m}) , \quad h = 1 - c_2 < 1 ,$$

c_2 étant la constante du théorème 4.3 avec $c_1 = 1/2$. On obtient le même résultat dans les cas où $\bar{m} = m$ et $\bar{m} = M$.

Maintenant, définissons

$\varphi(r) = [\text{vrai max } u(x)] - [\text{vrai min. } u(x)]$ pour $x \in B_r$, $r \leq R$.

Nous concluons du paragraphe précédent que

$$\varphi(2^{-n}R) \leq h^n L \ , \quad L = 2\, C_1 \delta^{-\tau} \ \|u\|^{o}_{2,R+\delta} \quad n = 1,2,\dots$$

Alors

$$\log \varphi(r) \leqslant \log L - \log h + (n+1)\log h \qquad \text{pour} \quad 2^{-n-1} R < r \leqslant 2^{-n}R \ ,$$

c'est-à-dire, pour $(n+1)\log 2 > \log(R/r) \geqslant n \log 2$. On en déduit

$$\varphi(r) \leqslant h^{-1} L(r/R)^{\mu_o} \ , \qquad \mu_o = -(\log h)/(\log 2).$$

Le théorème se démontre alors aisément.

Notation : Nous supposons que $|c(x)| \leqslant c$.

THÉORÈME 4.5.

$\exists R_o = R_o(\nu, m_1, M_1, c)$ et $C = C(\nu, m_1, M_1, c)$ tels que , $\forall R$ tel que $0 < R \leq R_o$ et $B_R = B(x_o, R) \subset G$,

(i) $\quad B(U,U) \geqslant 2^{-1} m_1 (\|U\|^1_{2,0,R})^2$

pour chaque $U \in H^1_{20}(B_R)$, où

$$B(U,\zeta) = \int_{B_R} (\zeta_{,\alpha} a^{\alpha\beta} U_{,\beta} + \zeta c^{\alpha} U_{,\alpha})dx \ ;$$

(ii) $\exists$ une solution unique u de (4.2) sur B_R telle que $u - u^* \in H^1_{20}(B_R)$ quel que soit $B_R \subset G$, $0 < R \leq R_o$,/ et e et $f \in L_2(B_R)$, et $u^* \in H^1_2(B_R)$; pour cette solution, on a

$$\|\nabla u\|^o_{2,R} \leqslant C[\|e\|^o_2 + M_1^{1/2} \|\nabla u^*\|^o_2 + 2^{-1/2}R(\|f\|^o_2 + c\|\nabla u^*\|) \ .$$

Démonstration : Posons $u = u^* + U$, $U \in H^1_{20}(B_R)$. L'équation (4.2) devient

$$B(U,\zeta) = I(\zeta) = -\int_{B_R} (E^{\alpha}\zeta_{,\alpha} + F\zeta)dx,$$

$$(E^{\alpha} = e^{\alpha} + a^{\alpha\beta} u^*_{;\beta} \ , F = f + c^{\alpha} u^*_{;\alpha})$$

Evidemment

$$B(U,U) \geqslant \int_{B_R} (m_1 \; |\nabla U|^2 - c \; |\nabla U| U) dx \geqslant$$

$$\geqslant 3/4 \; m_1 (\|U\|^o_{2,0})^2 - \frac{c^2}{m_1} \int_{B_R} U^2 \, dx \geqslant$$

$$\geqslant 3/4 \; m_1 \; \|U\|^2 - \frac{c^2}{2m_1} R^2 \; \|U\|^2$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré. L'inégalité (i) s'en déduit aisément et la deuxième conclusion du théorème s'obtient en utilisant (i) et le lemme de Lax et Milgram [18].

THÉORÈME 4.6.

Supposons que (i) $0 < R \leqslant R_o$ et $B(x_o, R) \subset G$;
(ii) $a_n^{\alpha\beta}(x)$ et $a^{\alpha\beta}(x)$ vérifient (3.5) et $|c_n(x)|$, $|c(x)| \leqslant c$ pour chaque n et chaque $x \in B_R$;
(iii) $a_n^{\alpha\beta}(x) \to a^{\alpha\beta}(x)$ et $c_n^{\alpha}(x) \to c^{\alpha}(x)$ p.p. sur B_R ;
(iv) $e_n^{\alpha} \to e^{\alpha}$ et $f_n \to f$ dans $L_2(B_R)$
(v) $u^*_n \to u^*$ dans $H^1_2(B_R)$
(vi) u_n et u soient les solutions uniques de $(4.2)_n$ et (4.2) telles que $u_n - u^*_n$ et $u - u^* \in H^1_{20}(B_R)$, resp. Alors $u_n \to u$ dans $H^1_{20}(B_R)$.

Démonstration : Posons

$$U_n = u_n - u^*_n \; , \quad U = u - u^* \; , \quad E_n^{\alpha} = e_n^{\alpha} + a_n^{\alpha\beta} u^*_n \quad , \quad F_n = f_n + c_n^{\alpha} u^*_n,$$

$$E^{\alpha} = e^{\alpha} + a^{\alpha\beta} u^*_{;\beta} \quad , \quad F = f + c^{\alpha} u^*_{;\alpha}$$

Alors, grâce au théorème 4.5, les $\|U_n\|_{2,0,R}$ sont bornés uniformément et

$$E_n^{\alpha} \to E^{\alpha} \qquad \text{et} \quad F_n \to F \quad \text{dans} \quad L_2(B_R).$$

Maintenant, soit $\{U_r\}$ une sous-suite arbitraire de $\{U_n\}$. $\exists$ une sous-suite $\{U_s\}$ de $\{U_r\}$ telle que $U_s \to$ une fonction U_o dans $H^1_{20}(B_R)$. Mais évidemment $B_s(U_s, \zeta) \to B(U_0, \zeta)$ et $L_s(\zeta) \to L(\zeta)$ $\forall$ $\zeta \in H^1_{20}(B_R)$; nous en concluons que $U_0 = U$.

THÉORÈME 4.7.

$\exists R_1 = R_1(\nu, m_1, M_1, c)$ et $C = C(\nu, m_1, M_1, c)(R_1 > 0)$ telle que

$$\|\nabla u\|^0_{2,r} \leq CL(r/R)^{\tau-1+\mu_0}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad L = \|\nabla u\|^0_{2,R} \quad \tau = \nu/2$$

pour chaque R, $0 < R \leq R_1$, et chaque solution u de (4.1) sur B_R telle que $\|\nabla u\|^0_{2,R} < +\infty$.

Démonstration : Grâce au théorème 4.6, il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où $u, a^{\alpha\beta}$, et $c^\alpha \in C^\infty(B_R)$. Evidemment nous pouvons supposer, aussi, que la moyenne de $u = 0$. Par conséquent

$$\|u\|^0_{2,R} \leq C(\nu) R \|\nabla u\|^0_{2,R}$$

En utilisant le théorème 4.3, nous concluons que

$$(4.8) \qquad |u(x) - u(x_0)| \leq C_1 L R^{1-\tau-\mu_0} |x - x_0|^{\mu_0}, \quad 0 \leq |x - x_0| \leq R/2.$$

En posant $\zeta = u - u_0$ dans $B_r (r \leq R/2)$, nous déduisons que

$$(4.9) \qquad \int_{B_r} [a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} u_{,\beta} + c^\alpha (u - u_0) u_{,\alpha}] dx = \int_{\partial B_r} (u - u_0) a^{\alpha\beta} u_{,\beta} n_\alpha dS.$$

En définissant $\varphi(r) = (\|\nabla u\|^0_{2,r})^2$, nous concluons de (4.8) et (4.9) que

$$(4.10) \qquad \begin{aligned} & m_1 \varphi(r) - cC_1 L R^{1-\tau-\mu_0} r^{\tau+\mu_0} [\varphi(r)]^{1/2} \leq \\ & \leq M_1 C_1 L R^{1-\tau-\mu_0} r^{\tau+\mu_0-1/2} [\varphi'(r)]^{1/2} \end{aligned}$$

Pour simplifier cette inégalité, posons

$$(4.11) \qquad t = r/R, \quad \varphi(r) = L^2 \Phi(t), \quad (\varphi'(r) = L^2 R^{-1} \Phi'(t))$$

Il résulte de (4.10) et (4.11) que

(4.12) $\Phi(1) = 1$, $\Phi(t) - C_2 R t^{\tau+\mu_0} [\Phi(t)]^{1/2} \leq C_3 t^{\tau+\mu_0-1/2} [\Phi'(t)]^{1/2}$,

Φ étant croissante.

Dans un intervalle $[a,b]$, $0 < a < b \leqslant 1/2$ dans lequel

$$\Phi(t) > 4C_2^2 R^2 t^{\nu+2\mu_0}$$

(4.12) entraîne

$$\Phi(t) < 2 C_3 t^{\tau+\mu_0-1/2} [\Phi'(t)]^{1/2}$$

d'où

(4.13) $\Phi(t) < K t^{\nu-2+2\mu_0}$, $K = \max[4 C_3^2(\nu - 2 + 2\mu_0),\ \Phi(b)/b^{\nu-2+2\mu_0}]$.

si $b = 1/2$ et $\Phi(b) > 4 C_2^2 R^2 b^{\nu+2\mu_0}$,

$$\Phi(b)/b^{\nu-2+2\mu_0} \leqslant 2^{\nu-2+2\mu_0}$$

car

$$\Phi(1/2) \leqslant \Phi(1) = 1. \quad \text{Si} \quad b \leqslant 1/2 \quad \text{et} \quad \Phi(b) = 4 C_2^2 R^2 b^{\nu+2\mu_0},$$

$$\Phi(b)/b^{\nu-2+2\mu_0} = 4 C_2^2 R^2 b^2 \leqslant C_2^2 R^2 \leqslant 2^{\nu-2+2\mu_0} \quad \forall\ R,\ 0 < R \leq R_1\ (\leqslant R_0).$$

Alors on en déduit que

(4.14) $\Phi(t) < K_1 t^{\nu-2+2\mu_0}$, $K_1 = \max[2^{\nu-2+2\mu_0},\ 4 C_3^2(\nu - 2 + 2\mu_0)]$,

$t \in (a,b)$.

Mais

$$4 C_2^2 R^2 t^{\nu+2\mu_0} \leqslant K_1 t^{\nu-2+2\mu_0} \quad \forall t \in [0,1/2] \quad \text{et} \quad R, 0 \leqslant R \leqslant R_1 .$$

THÉORÈME 4.8

Supposons que (i) G soit bornée et f soit bornée sur G ;

(ii) $e \in L_2(G)$ et vérifie

(4.15) $\int_{B(x_0,r)} |e|^2 dx \leqslant L^2 (r/R)^{\nu-2+2\mu}$, $0 < \mu < \mu_0$, $B(x_0,r) \subset B(x_0,R) \subset G$;

(iii) u soit une solution de $(4.2) \in H_2^1(G)$.

Alors $u \in \overset{\circ}{C}_{\mu}(G)$.

Soit V le potentiel de f sur G. Alors, $V \in C^1(E_\nu)$ pour chaque $\sigma, 0 < \sigma < 1$, et

$$\int_G (\zeta,_\alpha V,_\alpha - \zeta f)dx = 0 , \quad \zeta \in H^1_{20}(G). \tag{4.16}$$

En utilisant l'équation (4.16), l'équation (4.2) se réduit à

$$\int_G [\zeta,_\alpha (a^{\alpha\beta}u,_\beta + e^\alpha + V,_\alpha) + \zeta c^\alpha u,_\alpha]dx = 0$$

dans laquelle $e + \nabla V$ vérifie (4.15). Par conséquent nous pouvons supposer que $f = 0$.

Démonstration. Grâce au théorème 1.12, il suffit de démontrer que

$$\|\nabla u\|^\circ_{2,r} \leqslant K(r/R)^{\tau-1+\mu} , \quad 0 \leq r \leq R , \quad B(x_0,R) \subset G$$

pour un certain K. En utilisant le théorème 4.5, nous concluons que $u = U + H$ sur B_R, où U est la solution de (4.2) sur B_R qui $\in H^1_{20}(B_R)$, que H est une solution de (4.1) qui $\in H^1_2(B_R)$, et que

$$\|\nabla U\|^\circ_{2,R} \leqslant C_1 \|e\|^\circ_{2,R}$$

Par conséquent

$$\|\nabla H\|^\circ_{2,R} \leqslant \|\nabla u\|^\circ_{2,R} + C_1 \|e\|^\circ_{2,R}, \quad \|\nabla H\|^\circ_{2,r} \leqslant C_2 \|\nabla H\|^\circ_{2,R} (r/R)^{\tau-1+\mu_0}$$

Maintenant, définissons $\varphi(s) = \sup \|\nabla U\|^\circ_{2,Ss}$ pour toutes e qui vérifient (4.15), R étant remplacé par $S \leq R$, U étant la solution correspondante de (4.2) sur B_S qui $\in H^1_{20}(B_S)$. Puis, choisissons une e arbitraire qui vérifie (4.15). Nous pouvons écrire $U = U_S + H_S$ sur B_S où U_S est la solution de (4.2) $\in H^1_{20}(B_S)$. Evidemment e vérifie

$$\int_{B_r} |e|^2 dx \leq [L^2(S/R)^{\nu-2+2\mu}] (r/S)^{\nu-2+2\mu} \quad 0 \leq r \leq S .$$

En outre

$$\|\nabla U_S\|^{o}_{2,S} \leq C_1 L(S/R)^{\tau-1+\mu}, \quad \|\nabla H_S\|^{o}_{2,S} \leq L\,\varphi(S/R) + C_1 L(S/R)^{\tau-1+\mu}$$

en utilisant la définition de φ . Maintenant, supposons que $0 < r < S < R$. Alors

$$\|\nabla U\|_r \leq \|\nabla U_S\|_r + \|\nabla H_S\|_r \leq$$

$$\leq L(S/R)^{\tau-1+\mu}\,\varphi(r/S) + L[C_1(S/R)^{\tau-1+\mu} + \varphi(S/R)](r/S)^{\tau-1+\mu_o}$$

Comme e est arbitraire, nous en déduisons que

(4.18) $\varphi(s) \leq t^{\tau-1+\mu}\varphi(s/t) + [C_1 t^{\tau-1+\mu} + \varphi(t)](s/t)^{\tau-1+\mu_o}, \quad 0 < s < t < 1$

Evidemment φ est monotone et $\varphi(1) \leq C_1$. Choisissons σ , $0 < \sigma < 1$. Alors

$$\varphi(s) \leq S_o\, s^{\tau-1+\mu}, \quad \sigma \leq s \leq 1, \quad S_o \leq C_1 \sigma^{-\tau+1-\mu}$$

En utilisant (4.18) avec $\sigma^2 \leq s \leq \sigma$ et $t = \sigma^{-1}s$, nous obtenons

(4.19) $\varphi(s) \leq S_1 s^{\tau-1+\mu}$, où $S_1 = (S_o + C_1)(1+\omega) - C_1$, $\omega = \sigma^{\mu_o-\mu}$

Comme $S_1 \geq S_o$, (4.19) se maintient pour $\sigma^2 \leq s \leq 1$. En utilisant (4.18) avec $\sigma^4 \leq s \leq \sigma^2$ et $t = \sigma^{-2}s$, nous déduisons que

$$\varphi(s) \leq S_2\, s^{\tau-1+\mu}, \quad \sigma^4 \leq s \leq 1, \quad S_2 = (S_o + C_1)(1+\omega)(1+\omega^2) - C_1$$

En recommençant, nous obtenons

$$\varphi(s) \leq S\, s^{\tau-1+\mu}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad S = (S_o + C_1)(1-\omega)^{-1} - C_1$$

Le théorème s'obtient immédiatement.

V. Une autre classe des intégrales.

Dans cette partie nous supposons que f vérifie les conditions suivantes pour tous (x,z,p) :

$f \in C^2$, $N = 1$ $\qquad$ $k \geqslant \nu/2$

$m_1 V^k - K_1 \leqslant f(x,z,p) \leqslant M_1 V^k \qquad 0 < m_1 \leqslant M_1$

$$\sum (f_z^2 + f_{zz}^2 + f_{zx^\gamma}^2) \leqslant M_1^2 V^{2k} \qquad V = 1 + |p|^2$$

(5.1) $$\sum (f_{p_\alpha}^2 + f_{p_\alpha z}^2 + f_{p_\alpha x^\gamma}^2) \leqslant M_1^2 V^{2k-1}$$

$$m_1 V^{k-1} |\lambda|^2 \leqslant f_{p_\alpha p_\beta}(x,z,p) \lambda_\alpha \lambda_\beta \leqslant M_1 V^{k-1} |\lambda|^2$$

si les fonctions $a^{\alpha\beta}(x,z) \in C^2$ et vérifie (3.5) pour tous (x,z,λ), alors la fonction

$$f(x,z,p) = [a^{\alpha\beta}(x,z) p_\alpha p_\beta + 1]^k$$

vérifie les conditions (5.1) mais elle ne vérifie pas les conditions (3.1).

Pour ces intégrales on peut démontrer le lemme 3.1. Mais en suivant la méthode de la démonstration du lemme 3.2 nous trouvons qu'il faut remplacer les coefficients b_h^α et c_h et f_h^γ resp. par $P_h b_h^\alpha$, $P_h^2 c_h$, et $P_h f_h^\gamma$. Ce fait-ci introduit une difficulté : il faut savoir que $V_h^{k+1} \in L_1(D)$ uniformément (p.r. à h) pour chaque $D \subset\subset G$ mais nous savons seulement que $V_h^k \in L_1(D)$. C'est pour éviter cette difficulté que nous introduisons une nouvelle méthode dans ce paragraphe.

Définissons

(5.2) $$J(z,G) \equiv (2k+2)^{-1} \int_G V^{k+1} \, dx$$

LEMME 5.1

Supposons que $z^* \in H^1_{2k+2}(G)$ et G soit borné. Alors, il existe une fonction z_0 unique qui rend $J(z,G)$ minimum dans la famille de toutes les $z \in H^1_{2k+2}(G)$ telles que $z - z^* \in H^1_{2k+2,0}(G)$.

Démonstration : L'existence est évidente. L'unicité se déduit de la convexité de l'intégrale J.

NOTATION. Définissons $K_o = J(z_o,G)$, z_o étant la fonction introduite au lemme 5.1.

THÉORÈME 5.1

Supposons que $z^* \in H^1_{2k+2}(G)$ et G soit borné. Alors, pour chaque $K > K_o$ il existe une fonction z_k qui minimise $I(z,G)$ dans la famille $\mathcal{F}_k$ de toutes z telles que $z - z^* \in H^1_{2k+2,0}(G)$ et $J(z,G) \leqslant K$. La fonction z_k vérifie l'équation

$$(5.3) \qquad \int_G [\zeta_{,\alpha}(\mu F_{p_\alpha} + f_{p_\alpha}) + \zeta f_z]dx = 0 , \qquad \zeta \in H^1_{2k+2,0}(G) ,$$

pour un $\mu = \mu(K) \geqslant 0$. Il existe une suite $\{K_n\} \to +\infty$ telle que $K_n \mu(K_n) \to 0$. μ est unique si $z_K \neq z_o$.

Démonstration : L'existence est évidente car I et J sont semi-continues inférieurement par rapport à la convergence faible dans $H^1_{2k+2}(G)$. Si $J(z_K,G) < K$, il suit que (5.3) se conserve avec $\mu = 0$. Si $K > K_o$ et $J(z_K,G) = K$, z_K n'est pas une extrémale de J (convexité) et, par conséquent, il existe une fonction $\zeta_1 \in Lip_c(G)$ telle que

$$(5.4) \qquad \int_G \zeta_{1,\alpha} F'_{p_\alpha} (\nabla z_K) dx = 1 .$$

On en déduit que $J(z_K + \lambda\zeta_1, G)$ est croissant par rapport à λ . Supposons que ζ vérifie

$$(5.5) \qquad \int_G \zeta_{,\alpha} F_{p_\alpha}(\nabla z_K) dx = 0$$

et définissons

$$Z(x, \lambda) = z_K(x) + \lambda \zeta(x) - c \lambda^2 \zeta_1(x) ,$$

c étant une constante. Nous en déduisons que $J[Z(\cdot , \lambda),G] \leqslant K$ pour chaque

λ telle que $|\lambda| < \lambda_0$, c étant suffisamment grand et > 0. Comme $J(z_K,G) = K$ et z_K minimise I, nous en déduisons que

$$(5.6) \qquad \int_G (\zeta_{,\alpha} f_{p_\alpha} + \zeta f_z)dx = 0$$

pour chaque $\zeta \in Lip_c(G)$ qui vérifie (5.5).

Maintenant soit ζ arbitraire $\in Lip_c(G)$. Ecrivons

$$\zeta = \zeta^* + \lambda\, \zeta_1 \quad \text{où} \quad \lambda = \int_G (\zeta_{,\alpha} F_{p_\alpha})dx.$$

Evidemment ζ^* vérifie (5.5). Alors, (5.3) se maintient avec

$$\mu = -\int_G (\zeta_{1,\alpha} f_{p_\alpha} + \zeta_1 fz)dx$$

Comme $I(z,G) \geqslant I(z_K,G)$ toutes les fois que $J(z,G) < K$ nous concluons que

$$(5.7) \quad \lambda^{-1}[I(z_K - \lambda\zeta_1,G) - I(z_K,G)] \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \lambda < \lambda_1 .$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1}[I(z_K - \lambda\zeta_1,G) - I(z_K,G)] = \mu \geqslant 0.$$

Enfin, soit

$$\varphi(K) = I(z_K,G).$$

Evidemment φ est non-croissante et

$$\varphi(K + \Delta K) \leqslant I(z_K + \lambda\zeta_1,G) \quad \text{où} \quad \Delta K = J(z_K + \lambda\zeta_1,G) - J(z_K,G).$$

Car $\nabla K/\lambda \to 1$ en même temps que $\lambda \to 0$, nous concluons que

$$\varphi'(K) = -\mu(K) \quad \text{p.p.}$$

Alors, si $K_1 > K_0$, μ est sommable sur $[K_1,\infty)$ et

$$\int_{K_1}^{\infty} \mu(K)\, dK \leqslant \varphi(K_1) - I(z_1,G),$$

z_1 étant une fonction minorante pour $I(z,G)$.

Maintenant démontrons deux lemmes techniques.

LEMME 5.2

Supposons que (i) C_o soit la constante du théorème 1.13 ;
(ii) $w \in L_2(B_b)$ et $w \in H_2^1(B_r)$ pour $0 < r < b(B_r = B(x_o,r))$;
(iii) w vérifie l'inégalité

$$(5.8)\qquad \int_{B_r} |\nabla w|^2 dx \leq C_1 \int_{B_r} H^2 w^2 dx + C_2 a^{-2} \int_{B_r} w^2 dx$$

$$0 < a \leq r \quad , \quad r + a < b \; ;$$

(iv) $H \in L_\nu(B_b)$ et vérifie l'inégalité

$$(5.9)\qquad \left(\int_{B_r} H^\nu dx\right)^{2/\nu} \leq \varepsilon = 1/8\, C_o C_1 \quad , \quad H(x) \geqslant 0.$$

Alors

$$(5.10)\qquad \int_{B_r} |\nabla w|^2 dx \leq (8C_2 + 1) a^{-2} \int_{B_r} w^2 dx \; , \quad 0 < a \leq r \; , \quad r + a \leq b.$$

Démonstration : Supposons que $R < b$. Alors il y a une constante C_3 telle que

$$\int_{B_r} |\nabla w|^2 dx \leq C_3 (R - r)^{-2} \int_{B_r} w^2 dx \; , \quad (R/2) \leq r < R.$$

Nous déduisons du théorème 1.13 que

$$(5.11)\qquad \left\{\int_{B_r} |w|^{2s} dx\right\}^{1/s} \leqslant C_o \int_{B_r} (|\nabla w|^2 + r^{-2} w^2) dx \leqslant$$

$$\leqslant C_o (C_3 + 1)(R - r)^{-2} \int_{B_R} w^2 dx.$$

En utilisant (5.8), (5.9), et (5.11) avec $a = (R - r)/2$, nous obtenons

$$\int_{B_r} |\nabla w|^2 dx \leqslant [C_1 \epsilon\, C_o(C_3 + 1)\, 4 + 4\, C_2](R-r)^{-2} \int_{B_R} w^2 dx =$$

$$= [(C_3/2 + 1/2 + 4C_2)](R - r)^{-2} \int_{B_R} w^2 dx = C_3(R - r)^{-2} \int_{B_R} w^2 dx$$

LEMME 5.3

Supposons que (i) $w \in L_2(G)$ et $w \in H_2^1(D)$ pour chaque $D \subset\subset G$; (ii) $H \in L_\nu(G)$ et vérifie l'inégalité

$$\left(\int_{B(x_o,r)\wedge G} H^\nu dx\right)^{2/\nu} \leqslant C_3 r^\mu , \qquad \mu > 0 \quad (H > 0) ;$$

(iii) w vérifie l'inégalité

$$\int_{B(x_o,r)} |\nabla w|^2 dx \leqslant C_1 \tau^2 \int_{B(x_o,r+a)} H^2 w^2 dx + C_2 \tau^2 a^{-2} \int_{B(x_o,r+a)} w^2 dx \quad , \tau \geqslant 1,$$

toutes les fois que $B(x_o,r+a) \subset G$, $0 < a \leqslant r$. Alors il existe une constante C_4 qui ne dépend que de C_o, C_1, C_2, C_3 et d'une borne supérieure pour a telle que

$$\int_{B(x_o,r)} |\nabla w|^2 dx \leqslant C_4 \tau^\lambda a^{-2} \int_{B(x_o,r+a)} w^2 dx , \quad B(x_o, r+a) \subset G ,$$

$$0 < a \leqslant r , \quad \lambda = 2 + 4\mu^{-1}$$

Démonstration : Définissons α par l'équation

$$8\, C_o\, C_1\, C_3 \tau^2 \alpha^\mu = 1$$

Si $0 < a \leqslant \alpha$, nous pouvons couvrir $\overline{B(x_o,r)}$ en utilisant un nombre fini de boules $B(x_i, a/2)$ tel que chaque boule $B(x_i,a) \subset B(x_o,r+a)$ et il n'y a pas de points dans $B(x_o, r+a)$ qui appartiennent à plus de $K(\nu)$ des $B(x_i,a)$. Nous en concluons en utilisant le lemme 5.2 (en remplaçant C_1 par $C_1 \tau^2$, etc.) que

$$\int_{B(x_o,r)} |\nabla w|^2 dx \leqslant \sum_i \int_{B(x_i,a/2)} |\nabla w|^2 dx \leqslant \qquad (\tau \geqslant 1)$$

$$(5.12) \qquad \leqslant 4C_5 \tau^2 a^{-2} \sum_i \int_{B(x_i,a)} w^2 dx \leqslant 4\, KC_5 \tau^2 a^{-2} \int_{B(x_o,r+a)} w^2 dx$$

$$(C_5 = 8\, C_2 + 1)$$

Pour les valeurs plus grandes de a, (5.12) se maintient avec a remplacé par α . Nous en concluons que

$$\int_{B(x_o,r)} |\nabla w|^2 dx \leqslant 4\, KC_5 \tau^2 \bar{a}^2 \alpha^{-2} a^{-2} \int_{B(x_o,r+a)} w^2 dx$$

$\bar{a}$ étant une borne supérieure pour a . Le lemme s'en déduit en utilisant la définition de α .

THÉORÈME 5.2

Supposons que (i) f vérifie les conditions (5.1) avec $k > \nu/2$, (ii) G soit un domaine borné, et (iii) $z^* \in H^1_{2k}(G)$. Alors, il existe une fonction z telle que $z - z^* \in H^1_{2k,0}(G)$ qui rend $I(z,G)$ minimum dans la famille de toutes ces fonctions et $z \in C^1_\mu(G)$.

Démonstration : Nous supposons premièrement que $G \in C^1$ et $z^* \in C^1(\bar{G})$. Nous utilisons les notations de (5.2), le lemme 5.1 et le théorème 5.1. Nous supposons aussi que $K = K_n$ pour un certain n. Procédant de la même manière que dans la démonstration du lemme 3.2 en commençant avec l'équation (5.3) pour z_K nous concluons que

$$\int_{D'} \Big\{ \zeta_{,\alpha} [\mu A_{1h} a_{1h}^{\alpha\beta} z_{h,\beta} + A_h (a_h^{\alpha\beta} z_{h,\beta} + P_h b_h^{\alpha} z_h + P_h e_h^{\alpha\gamma})] +$$

$$(5.13) \qquad + \zeta (P_h b_h^{\alpha} z_{h,\alpha} + P_h^2 c_h z_h + P_h^2 f_h^{\gamma}) \Big\} dx = 0 \quad , \quad \zeta \in H^1_{2k+2,0}(G)$$

$$A_{1h} a_{1h}^{\alpha\beta}(x) = \int_0^1 F_{p_\alpha p_\beta}[p_K(x) + t\nabla p_K]dt \ , \quad A_{1h} = \int_0^1 V^k[p_K(x) + t\nabla p_K]dt.$$

Mais, cette fois, on a pour chaque K fini

$$(5.14) \qquad \begin{aligned} &A_{1h} \to V_K^k \quad \text{dans} \quad L_\rho \ , \ A_h \to V_K^{k-1} \quad \text{dans} \quad L_\sigma \\ &P_h \longrightarrow V_K^{1/2} \ \text{et} \ z_h \longrightarrow p_{K\gamma} \quad \text{dans} \quad L_{2k+2} \ , \ \rho = 1 + k^{-1} \ , \ \sigma = 1 + 2(k-1)^{-1} \end{aligned}$$

En posant $\zeta = \eta^2 z_h$, en utilisant l'inégalité de Schwarz, etc., nous obtenons

$$(5.15) \qquad \int_{D'} \eta^2 (\mu A_{1h} + A_h) |\nabla z_h|^2 dx \leqslant C \int_{D'} \Big\{ |\nabla \eta|^2 (\mu A_{1h} + A_h) z_h^2 + \\ + \eta^2 (P_h^2 + P_h^2 z_h^2) A_h \Big\} dx$$

Pour chaque K fini, V_K^{k+1} est sommable et, par conséquent, le membre de droite de l'inégalité (5.15) est borné uniformément pour $0 < |h| < h_0$. De la même manière que dans la démonstration du lemme 3.2, nous concluons que les $p_{K\gamma}$ et $U_K \in H_2^1(D)$ pour chaque $D \subset\subset G$ et qu'on peut faire tendre $h \to 0$ dans (5.13) et (5.15) pour obtenir

$$(5.16) \quad \int_{D'} \eta^2 (\mu_K V_K^k + V_K^{k-1}) |\nabla p_K|^2 dx \leqslant C \int_{D'} \Big\{ |\nabla \eta|^2 (\mu_K V_K^{k+1} + V_K^k) + \eta^2 V_K^{k+1} \Big\} dx$$

En définissant η , fonction de la démonstration du lemme 3.2.

$$U_K = \mu_K^{1/2} V_K^{(k+1)/2} + V_K^{k/2} \ , \quad D = B(x_0, r), \quad D' = B(x_0, r+a) \subset\subset G, \quad V_K = H_K^2$$

nous concluons que

$$(5.17)\quad \int_{B_r} |\nabla U_K|^2 dx \leqslant C_1 \int_{B_{r+a}} H_K^2 U_K^2 dx + C_2 a^{-2} \int_{B_{r+a}} U_K^2 dx$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de m_1, M_1, K_1, k, et ν et ne dépendent pas de K. Comme $I(z_K,G) \to$ minimum on en déduit que $\int_G V_K^k dx$ est bornée uniformément et, par conséquent,

$$\left(\int_{B_r} H_K^{\nu} dx\right)^{2/\nu} \leqslant \left(\int_{B_r} H_K^{2k} dx\right)^{1/k} |B_r|^{1-\nu/2k} \leqslant$$

$$(5.18)\qquad \leqslant L r^{\mu} \quad , \quad \mu > 0.$$

Par conséquent $\|U_K\|^1_{2,D}$ est bornée uniformément. Comme $\mu_K K \to 0$ nous déduisons que $\mu_K^{1/2} V_K^{(k+1)/2} \to 0$ dans $L_2(G)$ et $z_K \to z$, $U_K \to U = V^{k/2}$, $p_{K\gamma} \to p_\gamma$ etc. dans $H_2^1(D)$ pour chaque $D \subset\subset G$ et qu'on peut faire tendre $h \to 0$ dans l'équation (5.13) ; évidemment z rend $I(z,G)$ minimum.

Définissons $\psi = V^{(k-1)/2}$, $A^{\alpha} = f_{p_\alpha}$, $B = f_z$, $\zeta = \eta^2 U_L^{2\tau-2} p_\gamma$ de la même manière que dans la démonstration du lemme 3.6. On déduit aisément que toutes les hypothèses des lemmes 3.3, 3.4, et 3.5 sont vérifiées. En insérant ces ζ dans l'équation (5.13) (avec $h = 0$, $K = \infty$, $\mu = 0$) et en posant $w_L = U_L^{\tau-1} U$ nous voyons que w_L vérifie la condition

$$(5.19)\quad \int_{B_r} |\nabla w_L|^2 dx \leqslant C_1 \tau^2 \int_{B_{r+a}} V w_L^2 dx + C_2 \tau^2 a^{-2} \int_{B_{r+a}} w_L^2\, dx.$$

Il suit du lemme 5.3 et de l'inégalité (5.18) pour $H = V^{1/2}$ que

$$(5.20)\quad \int_{B_r} |\nabla w_L|^2 dx \leqslant C_4 \tau^{\lambda} a^{-2} \int_{B_{r+a}} w_L^2 dx = C_4 \tau^{\lambda} a^{-2} \int_{B_{r+a}} U_L^{2\tau-2} U^2 dx$$

Si $w = U^{\tau} \in L_2(B_{r+a})$ on peut déduite que $w \in H_2^1(B_r)$ et que l'inégalité (5.20) se maintient pour w. Alors, on peut recommencer la démonstration du théorème 3.1 avec

$$K_0 = 2\, C_0\, C_4 s^{-\lambda} R^{-2}, \quad K_1 = 4\, s^{\lambda} \qquad (s = \nu/(\nu-2))$$

pour

$$(5.21) \quad |U(x)|^2 \leqslant C|B(x_0,2R)|^{-1} \int_{B(x_0,2R)} |U(y)|^2\, dy ,$$

$$U = V^{k/2} , \quad B(x_0,2R) \subset\subset G,$$

où C ne dépend que de μ (voir (5.18)), m_1, M_1, K_1, k et d'une borne supérieure de $I(z,G)$.

Maintenant, supposons que $G \in C^1$ et $z^* \in H^1_{2k}(G)$. Alors il existe une suite $\{z^*_p\}$ dont chaque $z^*_p \in C^1(\bar{G})$ telle que $z^*_p \to z^*$ dans $H^1_{2k}(G)$. Pour chaque p on peut construire une fonction $z_p = \lim z_{pK}$ telle que $z_p - z^*_p \in H^1_{2k,0}(G)$, z_p rend $I(z,G)$ minimum pour toutes ces fonctions, et $z_p \in \mathrm{Lip}(G)$ avec les bornes impliquées par (5.21). Une sous-suite des z_p converge vers une fonction possédant les mêmes propriétés par rapport à z^*.

Enfin, supposons seulement que G soit borné et que $z^* \in H^1_{2k}(G)$. Soit z_0 une fonction mincrante qui rend $I(z,G)$ minimum telle que $z_0 - z^* \in H^1_{2k,0}(G)$. Soit $\{G_n\}$ une suite de domaines, dont chaque $G_n \in C^1$, telle que $G_n \subset G_{n+1}$ pour chaque n et $G = \cup G_n$. Pour chaque n on peut construire z_n de la même manière qu'au paragraphe précédent, telle que $z_n - z_0 \in H^1_{2k,0}(G_n)$. Chaque fonction Z_n qui est $= z_n$ dans G_n et qui est $= z_0$ dans $G - G_n$ est une fonction minorante pour I et $Z_n - z^*$ $H^1_{2k,0}(G)$. D'autre part, pour chaque $D \subset\subset G$, il existe un N tel que toutes les Z_n vérifient une condition de Lipschitz uniforme et fixée sur D pour tous $n \geqslant N$. Une sous-suite des Z_n converge vers une fonction z cherchée.

THÉORÈME 5.2'

Le théorème 5.2 se maintient dans le cas $k = \nu/2$.

Démonstration : La démonstration est essentiellement la même que celle du théorème précédent mais il faut remplacer d'abord l'inégalité (5.18) par la suivante: Pour chaque $D' \subset\subset G$, il existe des nombres $b > 0$ et $K_3 > K_0$ tels que

(5.22) $\left\{\int_{B(x_0,r)} H_K^{\nu}\, dx\right\}^{2/\nu} \leq \varepsilon = 1/8\ C_0 C_1$, $K \geqslant K_3$, $0 < r \leqslant b$, $B(x_0,b) \subset D'$

C_1 étant la constante de (5.17), K appartenant toujours à la sous-suite, etc. Pour démontrer ceci, posons $z = \lim z_K$; z est minorant. Les hypothèses concernant f impliquent l'existence des nombres m_2, M_2, et K_2 tels que

(5.23) $m_2\, |p|^{\nu} - K_2 \leqslant f(x, z, p) \leqslant M_2\, |p|^{\nu} + K_2$, $0 < m_2 \leqslant M_2$

Supposons que $B(x_0,a) \subset G$, que $0 < r < a$, et que $Z_r - z \in H^1_{\nu,0}(B_r)$. Alors nous obtenons en utilisant (5.23)

$$(5.24) \qquad m_2 \int_{B_r} |\nabla z|^{\nu}\, dx - K_2 |B_r| \leqslant I(z,B_r) \leqslant I(Z_r,B_r) \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \int_{B_r} |\nabla Z_r|^{\nu}\, dx + K_2 |B_r| \ .$$

Soit ξ un vecteur de longueur 1 et posons

$$Z_r(x_0 + s\xi) = \bar{z} + r^{-1} s[z(x_0 + r\xi) - \bar{z}], \quad \varphi(r) = \int_{B_r} |\nabla z|^{\nu}\, dx$$

$\bar{z}$ étant la moyenne de $z(x_0 + r\xi)$ par rapport à ξ . Notons par $\nabla_{\Theta} z$ et $\nabla_{\Theta} Z_r$ les gradients le long de $\partial B(0,1)$. En utilisant les résultats suivants

$$\int_{\partial B(0,1)} |z(x_0 + r\xi) - \bar{z}|^2 dS(\xi) \leqslant C(\nu) \int_{\partial B(0,1)} |\nabla_{\Theta} z|^2 dS(\xi)$$

$$|\nabla Z_r(x_0 + s\xi)|^2 = Z^2_{r,s} + s^{-2}\, |\nabla_{\Theta} Z_r(x_0 + s\xi)|^2 \ ,$$

nous trouvons que

$$\varphi(r) \leqslant C(\nu)\,\frac{M_2}{m_2}\, r\,\varphi'(r) + K_2\, C^*\, r^{\nu} \quad , \quad 0 < r < a$$

On en déduit aisément que

$$(5.25)\quad \int_{B(x_0,r)} V^{\nu/2}dx \quad \hat{C}(r/a)^{\mu} \quad , \quad 0 \leqslant r \leqslant a\ ,\ \mu > 0,\quad B(x_0,a) \subset G.$$

Maintenant, supposons que $D' \subset\subset G$, que $B(x_n,b_n) \subset D'$, que $K_n \to +\infty$ dans la sous-suite, que $b_n \geqslant \beta > 0$, que $x_n \to x_0$ et $b_n \to b$. En faisant des changements de coordonnées nous démontrons que

$$I[z_{K_n}, B(x_0,b)] \leqslant \liminf_{K_n \to \infty} I[z_{K_n}\ ,\ B(x_m,\ b_n)]$$

$$I[z, G - B(x_0,b)] \leqslant \liminf_{n \to \infty} I[z_{K_n}\ ,\ G - B(x_n,b_n)]$$

On en déduit aisément, en utilisant un domaine D'' avec $D' \subset\subset D'' \subset\subset G$,

que

$$(5.26)\quad I[z_K, B(x_0,b_1)] \leqslant I[z, B(x_0,b_1)] + \frac{m_1}{3}\,\varepsilon \quad , \quad K \geqslant K_2 \ ,\ B(x_0,b_1) \subset D'.$$

En utilisant (5.1), (5.25), et (5.26), nous obtenons

$$m_1 \int_{B(x_0,b_1)} V_K^{\nu/2}dx - K_1|B(x_0,b_1)| \leqslant I[z_K, B(x_0,b_1)] \leqslant I[z, B(x_0,b_1)] + m_1\varepsilon/3$$

$$\leqslant M_1 \int_{B(x_0,b_1)} V^{\nu/2}dx + m_1\,\varepsilon/3 \ .$$

Alors

$$\int_{B(x_0,b_1)} V_K^{\nu/2} dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{K_1}{m_1}\,|B(x_0,b_1)| + \frac{M_1}{m_1}\,\hat{C}(b_1/a)^{\mu}$$

si b_1 est $\leqslant b$ suffisamment petit et $B(x_0,b) \subset D'$. Il suit du lemme 5.2 que $U_K \in H_2^1(D)$ et $\|U_K\|_{2,D}$ est bornée uniformément pour chaque $D \subset\subset G$. On peut faire tendre $K \to \infty$ et on peut faire le reste de la démonstration de la même manière que celle du théorème 5.2 en utilisant (5.25).

VI. Les intégrales du § 3 dans les cas $1/2 < k < 1$.

La seule difficulté est que la démonstration du lemme 3.2 ne s'applique pas. Pour éviter cette difficulté nous définissons

$$J(z,G) = (1/2) \int_G |\nabla z|^2 dx$$

et nous procédons de la même manière que dans la partie précédente. Au lieu de l'inégalité (5.17) nous obtenons

$$(6.1) \quad \int_D (\mu_K \cdot 1 + V_K^{k-1}) \, |\nabla p_K|^2 dx \leqslant Ca^{-2} \int_{D'} (\mu_K + V_K^{k-1}) V_K \, dx \leqslant$$

$$\leqslant Ca^{-2} \int_{D'} V_K^k dx + 2 \, Ca^{-2} K \mu_k \quad \text{si} \quad D \subset D'_a \qquad (V_K = 1 + |z_K|^2 + |p_K|^2)$$

Comme $K\mu_K \to 0$ dans notre sous-suite, le membre à droite dans (6.1) est borné uniformément. D'autre part

$$\int_D |\nabla p_K|^{2k} dx = \int_D V_K^h V_K^{-h} \, |\nabla p_K|^{2k} \, dx \leqslant$$

$$(6.2) \qquad \left(\int_D V_K^k \, dx\right)^{1-k} \left(\int_D V_K^{k-1} \, |\nabla p_K|^2 \, dx\right)^k \qquad (h = k(1-k))$$

On en déduit que $p_K \to p$ dans $H^1_{2k}(D)$, que $V_K^{(k-1)/2} \, p_K \to V^{(k-1)/2} p$ dans $H^1_2(D)$, et que $U = V^{k/2} \in H^1_2(D)$.

Le reste des démonstrations du § 3 se fait de la même manière sauf pour un petit changement dans le lemme 3.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.B. Morrey, Jr., Existence and differentiability theorems for variational problems for multiple integrals, Partiel differential equations and continuum mechanics, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis., 1961, pp.241-270.

[2] --, Existence and differentiability theorems for the solutions of variational problems, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940),pp.439-458.

[3] --, Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, Univ. of Calif. Publ. in Math., N.S. 1 (1943), pp.1-130.

[4] --, Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, Ann. Sc. Norm. Pisa III 14 (1960), 1-61.

[5] O.A. Ladyzenskaya et N.N. Ural'tseva, Quasi-linear elliptic equations and variational problems with many independent variables, Russian Math. Surveys, London Math. Soc., Vol.16, n° 1, Jan-Feb. 1961, pp.17-91.

[6] L. Tonelli, Fondamenti del calcolo delle variazioni, Bologna, Zanichelli (3 vol.)

[7] --, Sur la semi-continuité des intégrales doubles du calcul des variations, Acta Math. 53 (1929), pp.325-346.

[8] --, L'estremo assoluto degli integrali doppi, Ann. Sc. Norm. Pisa (2) 3 (1933), pp.89-130.

[9] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, Ann. Sc. Norm. Pisa III 13 (1959), pp.1-48.

[10] R. Courant, Dirichlet's principal, conformal mapping, and minimal surfaces, Interscience Press, New-York (1950).

[11] C.B. Morrey, Jr., Quasi-convexity and the lower semi-continuity of multiple integrals, Pac. J. Math. 2 (1952), pp.25-53.

[12] J. Serrin, On the definition and properties of certain variational integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), pp.139-167.

[13] C.Y. Pauc, La méthode métrique en calcul des variations, Paris, Herman, 1941. En particulier p.54.

[14] J. Moser, A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure appl. Math. 13 (1960), pp.457-468.

[15] G. Stampacchia, Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellitiche, Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa III 12 (1958), pp.223-244.

[16] C.B. Morrey, Jr., Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity, Math. Zeit. 72 (1959), pp.146-164.

[17] G. Stampacchia, Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 51 (1960), pp.1-38.

[18] P.D. Lax et A.N. Milgram , Parabolic equations, Ann. of Math. Studies n°33, Princeton University Press, 1954, pp.167-190, particulièrement p.169.