Séminaire Jean Leray. Sur les équations aux dérivées partielles

Y. Dejean

Estimation des valeurs propres des membranes

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. nº 3, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A3_0>

ESTIMATION DES VALEURS PROPRES DES MEMBRANES

par

Y. DEJEAN

A. POSITION DU PROBLÈME (RAPPEL)

1°) Problème ; Equations.

On considère une membrane homogène fixée, ou élastiquement liée le long de son contour, soumise à aucune force extérieure ; on note D le domaine plan borné occupé par la membrane au repos, et Γ le contour limitant D.

Les vibrations de la membrane sont régies par l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

($U(x,y,t)$ = déplacement transversal à l'instant t du point (x,y)) avec la condition au bord :

$$U = 0 \quad \text{si la membrane est fixée}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + k(s)U = 0 \quad \text{si la membrane est élastiquement liée}$$

($\dfrac{\partial}{\partial \vec{n}}$ étant la dérivée suivant la normale extérieure à Γ, $k(s)$ une fonction de l'abscisse curviligne s).

2°) Solutions stationnaires ; Valeur propre fondamentale.

On cherche les solutions stationnaires : $U(x,y,t) = u(x,y)g(t)$

d'où
$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{g''}{g} = -\lambda$$

λ étant une constante à déterminer de telle sorte qu'il existe pour ces équations des solutions satisfaisant aux conditions au bord.

Il existe une infinité de telles valeurs propres qu'on peut ranger en une suite croissante ; on appelle valeur propre fondamentale la plus petite d'entre elles et on la note λ_1.

On démontre que :

- si la membrane est fixée

$$\lambda_1 = \underset{v}{\mathrm{Min}} \frac{\iint_D (\mathrm{grad}\ v)^2 dx\,dy}{\iint_D v^2 dx\,dy} \qquad (v = 0 \text{ sur } \Gamma)$$

- si la membrane est liée

$$\lambda_1 = \underset{v}{\mathrm{Min}} \frac{\iint_D (\mathrm{grad}\ v)^2 dx\,dy + \int_\Gamma k(s) v^2 ds}{\iint_D v^2 dx\,dy}$$

dans les deux cas, le minimum est atteint pour les fonctions propres associées à λ_1 (c'est-à-dire telles que $\Delta u + \lambda_1 u = 0$). Les autres valeurs propres s'obtiennent par récurrence avec des méthodes analogues et, en outre, des conditions d'orthogonalité (voir C.)

Nous allons maintenant étudier λ_1.

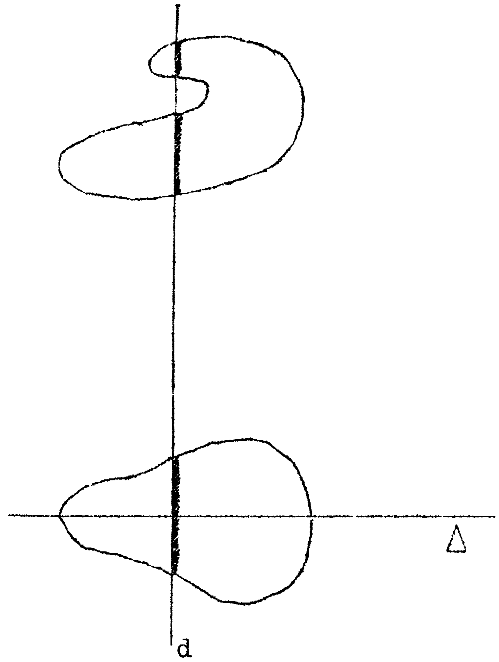
B. UTILISATION DE LA SYMÉTRISATION

(D'après "Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics" de G. Pólya et G. Szegö, paru aux "Annals of Mathematics Studies" n°27, Princeton 1951)

I. Définitions

1°) Symétrisation d'un domaine borné.

Soit D un domaine plan borné, Δ une droite : pour toute perpendiculaire d à Δ, on construit un segment porté par d, centré sur Δ et dont la longueur soit égale à la mesure de l'intersection de d avec D ; la réunion des segments obtenus lorsque d varie, est appelée domaine symétrisé de D par rapport à Δ.



L'aire est invariante par symétrisation.

2°) Fonctions équimesurables.

Dans $\underline{\underline{R}}^n$, soit μ la mesure de Lebesgue ; soit f une fonction réelle mesurable définie sur une partie mesurable de $\underline{\underline{R}}^n$; pour tout u réel, on pose

$$M(f\ ;\ u) = \mu(\{x : f(x) \geqslant u\})$$

nous dirons que f et g sont équimesurables si

$$M(f\ ;\ u) = M(g,u)\ \forall u$$

3°) Fonctions variant dans le même sens, en sens contraire.

Nous dirons que deux fonctions réelles f et g varient dans le même sens (resp en sens contraire) si

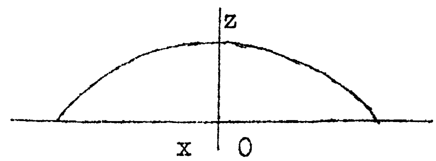
$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geqslant 0 \quad (\text{resp} \leqslant 0)\ \forall x,y$$

4°) Symétrisation d'une fonction.

Nous raisonnerons dans $\underline{\underline{R}}^2$, mais on peut donner les mêmes définitions dans $\underline{\underline{R}}^n$ en symétrisant, par exemple, par rapport à un hyperplan.

Soit donc f définie sur $\underline{\underline{R}}^2$, intégrable : nous dirons que f_1 est symétrisée de f par rapport à l'axe Ox, si, pour toute perpendiculaire à Ox :

- les restrictions de f et f_1 à cette perpendiculaire (= applications partielles en y) sont équimesurables,
- la restriction de f_1 à cette perpendiculaire décroît lorsqu'on s'éloigne de Ox, c'est-à-dire varie en sens contraire de la distance à Ox.



Coupe suivant un plan perpendiculaire à Ox

Existence de f_1 , f étant donnée : on est amené à considérer une fonction Φ d'une variable réelle x et à chercher une fonction Φ' paire et décroissante à droite de l'origine, et telle que Φ et Φ' soient équimesurables ; si l'on pose

$$\Phi'(x) = \sup_{M(\Phi\,;\,y) \geqslant x} y$$

la fonction Φ' est bien décroissante ;

la fonction $y \to M(\Phi\,;\,y)$ étant continue à gauche, on a

$$M(\Phi\,;\,\Phi'(x)) \geqslant x$$

ce qui entraîne : Φ et Φ' sont équimesurables.

II. <u>Théorème de Hardy, Littlewood et Pólya</u>.

<u>Théorème</u> : Soient f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, des fonctions réelles définies sur le même domaine borné de $\underline{\underline{R}}^n$; on suppose f, f_1 et f_2, d'une part, g, g_1 et g_2 d'autre part, équimesurables ; on suppose que f_1 et g_1 varient dans le même sens, que f_2 et g_2 varient en sens contraire ; alors

$$\int f_2\, g_2\, dx \leqslant \int f\, g\, dx \leqslant \int f_1\, g_1\, dx.$$

Pour la démonstration, voir Hardy, Littlewood and Pólya, "Inequalities", théorème 378.

III. Théorème fondamental.

Théorème. Soit f_1 la symétrisée de f par rapport à Ox ; pour toute fonction réelle G d'une variable réelle, on a alors

$$\iint G(f)dx\,dy = \iint G(f_1)\,dx\,dy$$

si, d'autre part, F est une fonction réelle de variable réelle qui soit convexe et croissante, on a

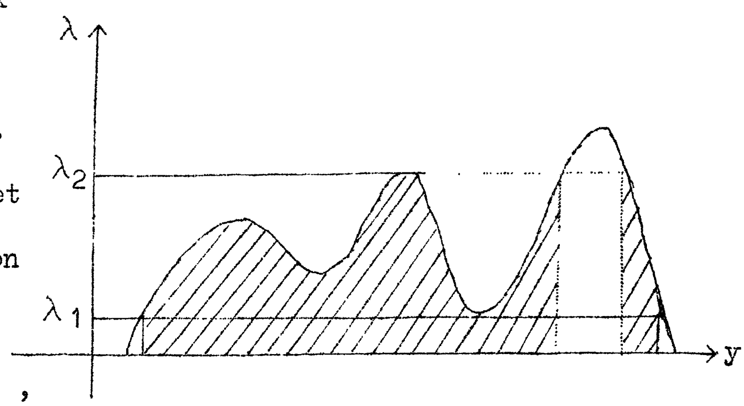
$$\iint F(|\text{grad } f|)dx\,dy \geqslant \iint F(|\text{grad } f_1|)dx\,dy$$

chacune des deux intégrales étant prise entre deux courbes de niveau ou à l'intérieur d'une courbe de niveau de f (resp f_1).

Principe de démonstration pour de bonnes fonctions : fixons x et démontrons l'inégalité pour les intégrales partielles en y. Considérons le premier membre et prenons la courbe de la fonction

$$y \to f(x,y) = \lambda$$

en projection sur l'axe des λ , nous aurons les intervalles déter-



minés par les couples d'extrema successifs de λ , et, grâce au choix du domaine d'intégration (courbes de niveau), sur chacun de ces intervalles nous aurons un nombre pair de fonctions inverses de $y \longrightarrow f(x,y)$, que nous noterons φ_k.

Nous allons décomposer l'intégrale partielle en y en somme d'intégrales correspondant aux intervalles de monotonie de la fonction λ , et pour chacune de ces intégrales, nous ferons le changement de variable $y = \varphi_k(\lambda)$.

Evaluons par exemple ce que nous obtenons en prenant un intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ de valeurs de λ, où on a $2m$ fonctions inverses :

$$\sum_{k=1}^{2m} \int_{[\varphi_k(\lambda_1),\ \varphi_k(\lambda_2)]} F(|\text{grad } f|)\, dy$$

(cette somme est la contribution à l'intégrale partielle en y, de la partie de la courbe située entre les ordonnées λ_1 et λ_2) le changement de variable donne

$$\sum_{k=1}^{2m} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(|\text{grad } f|)\, |\varphi'_k|\, d\lambda$$

lorsque x varie, la fonction φ_k dépend du paramètre x, et

$$f'_x = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \times \frac{1}{\varphi'_k}$$

d'où

$$|\text{grad } f| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\right)^2}}{|\varphi'_k|}$$

d'où, pour notre intégrale

$$\sum_{k=1}^{2m} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\right)^2}}{|\varphi'_k|}\right) |\varphi'_k|\, d\lambda$$

Considérons maintenant le second membre de l'inégalité du théorème et l'intégrale partielle en y correspondante : la courbe de niveau λ dans le plan des (x, y) (courbe d'équation $f_1(x, y) = \lambda$) coupe la droite d'abscisse x en deux points exactement et on a deux fonctions inverses pour la fonction partielle $y \longrightarrow f_1(x, y)$, opposées l'une de l'autre, soit φ et $-\varphi$, et, toujours d'après la définition de la symétrisée et des courbes de niveau,

$$2\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 + \dots + \varphi_{2m} - \varphi_{2m-1}$$

d'où, pour la portion de courbe de $y \to f_1(x, y)$ comprise entre λ_1 et λ_2 :

$$2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2}}{|\varphi'|}\right)|\varphi'|\, d\lambda$$

Il suffit de démontrer maintenant que

$$\sum_{k=1}^{2m} F\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\right)^2}}{|\varphi'_k|}\right)|\varphi'_k| \geqslant 2F\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2}}{|\varphi'|}\right)|\varphi'|$$

or,

$$2|\varphi'| = \sum_{k=1}^{2m} |\varphi'_k| = \sum_{k=1}^{2m} \alpha_k$$

$$2\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| = \sum_{k=1}^{2m} \left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\right| = \sum_{k=1}^{2m} \beta_k$$

tout revient donc à montrer que

$$\sum_{k=1}^{2m} \alpha_k F\left(\frac{\sqrt{1 + \beta_k^2}}{\alpha_k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{2m} \alpha_k\right) F\left(\frac{\sqrt{4 + (\sum \beta_k)^2}}{\sum \alpha_k}\right)$$

F étant convexe, on a

$$\sum_{k=1}^{2m} \alpha_k F\left(\frac{\sqrt{1 + \beta_k^2}}{\alpha_k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{2m} \alpha_k\right) F\left(\frac{\sum_{k=1}^{2m} \sqrt{1 + \beta_k^2}}{\sum \alpha_k}\right)$$

et l'inégalité de Minkowski donne

$$\sum_{k=1}^{2m} \sqrt{1+\beta_k^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{2m} 1\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{2m} \beta_k\right)^2}$$

$$\geqslant \sqrt{4 + (\sum \beta_k)^2} \qquad \text{car} \quad 2m \geqslant 2$$

F étant croissante, nous obtenons bien l'inégalité cherchée.

IV. Applications.

Grandeurs physiques attachées à un domaine :

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_{v} \frac{\iint_D (\text{grad } v)^2 \, dx \, dy}{\iint_D v^2 \, dx \, dy}$$

capacité

$$C = \operatorname*{Min}_{f} \frac{1}{\pi} \iint_D (\text{grad } f)^2 \, dx \, dy$$

(D étant le domaine limité par deux courbes fermées ; $f = 0$ sur la première, $f = 1$ sur la seconde)

rigidité à la torsion P :

$$\frac{1}{P} = \operatorname*{Min}_{f} \frac{\iint_D (\text{grad } f)^2 \, dx \, dy}{4\left(\iint_D f \, dx \, dy\right)^2}$$

Ces grandeurs sont de la forme

$$\text{Min} \frac{\int F(|\text{grad } f|)}{\int G(f)}$$

avec F remplissant les conditions du théorème : ce dernier nous enseigne donc que la symétrisation diminue λ_1 et C et augmente P.

On peut alors, par des symétrisations, se ramener à des domaines pour lesquels on sait calculer les grandeurs, et en déduire des inégalités ; par exemple, si l'on répète indéfiniment la symétrisation, on conclut que λ_1 , C et $\frac{1}{P}$ sont minorés par les grandeurs correspondantes pour le disque ayant même aire que le domaine étudié ; d'où

$$\lambda_1 \geqslant \frac{j^2\pi}{A} \quad , \qquad C \geqslant \frac{2\sqrt{A}}{\pi^{3/2}} \quad , \qquad P \leqslant \frac{A^2}{2\pi}$$

L'ouvrage de Pólya et Szegö contient une très grande quantité de tels résultats avec valeurs numériques.

C. QUOTIENT DE RAYLEIGH. CONVEXITÉ.

(D'après Pólya-Schiffer : "Convexity of Functionals by transplantation", Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem 1953-54).

I. Problème

On se donne un espace vectoriel réel U , 2 formes bilinéaires symétriques $\geqslant 0$ sur U : $A[u,v]$, $B[u,v]$, la seconde étant définie positive. On suppose que l'ensemble des $u \in U$ tels que $A[u,u] \leqslant$ cte est compact pour la norme sur U : $\sqrt{B[u,u]}$; on appelle quotient de Rayleigh le quotient

$$R[u] = \frac{A[u,u]}{B[u,u]} \qquad u \in U, \quad u \neq 0$$

On peut alors définir par récurrence les valeurs propres et les vecteurs propres :

1ère valeur propre $\lambda_1 = \underset{u}{\mathrm{Min}}\, R[u]$

fonction propre = fonction u telle que $\lambda_1 = R[u]$

on choisit φ_1 fonction propre telle que $B[\varphi_1, \varphi_1] = 1$.

Si l'on a $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \in U$ telles que

$$\lambda_i = R[\varphi_i] \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

$$B[\varphi_i, \varphi_j] = \delta_{ij} \qquad 0 \leqslant i, \ j \leqslant n-1$$

on construit

$$\lambda_n = \text{Min } R[u]$$

où l'on impose à u :

$$B[\varphi_i, u] = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

on prendra alors φ_n telle que $\lambda_n = R[\varphi_n]$, $B[\varphi_n, \varphi_n] = 1$

et $B[\varphi_n, \varphi_i] = 0 \quad i = 1, \ldots, n-1$

la suite λ_n est évidemment croissante.

Proposition. $A[\varphi_n, u] = \lambda_n B[\varphi_n, u]$ pour tout u B-orthogonal à $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Il suffit pour le voir d'annuler au point 0 la dérivée de la fonction $t \to R[\varphi_n + tu]$.

On déduit de ce résultat : $A[\varphi_i, \varphi_j] = \delta_{ij} \lambda_i$

Proposition. Si U est de dimension finie m, alors on a m valeurs propres distinctes ou confondues et m fonctions propres, et

$$R[u] \leqslant \lambda_m \qquad \forall u$$

II. Théorème fondamental (dû à Poincaré).

On peut l'énoncer ainsi

Théorème. Soit U' un sous-espace vectoriel de U, $R'[u]$ le quotient de Rayleigh défini sur U' à l'aide de deux formes A' et B' sur U' satisfaisant à des hypothèses analogues à celles faites sur A et B ; on suppose que $R[u] \leqslant R'[u] \ \forall u \in U'$. Alors $\forall n \leqslant \dim U'$, $\lambda_n \leqslant \lambda'_n$

Notations : dans la démonstration qui suit, nous affectons du signe prime : λ'_n, φ'_n, ... tout ce qui se rapporte à U', A', B', R'.

Donnons-nous n et considérons le sous-espace U'_n de U' engendré par $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n$, qui est un espace de dimension finie n ; si nous considérons $R'|U'$ et que nous cherchions valeurs propres et vecteurs propres, nous trouvons justement $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ et $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n$; donc, $\forall u \in U'_n, u \neq 0$, on a $R'[u] \leqslant \lambda'_n$, d'après la dernière proposition ; d'autre part on peut trouver $u_0 \in U'_n$, $u_0 \neq 0$, tel que

$$B[\varphi_i, u_0] = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n-1$$

(φ_i fonction propre relative à R)

alors
$$\lambda_n \leqslant R[u_0]$$

d'où
$$\lambda_n \leqslant R[u_0] \leqslant R'[u_0] \leqslant \lambda'_n$$

<u>Corollaire</u>.
$$\lambda_n = \min_{S_n} \left(\max_{\substack{u \in S_n \\ u \neq 0}} R[u] \right)$$

où S_n parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de U de dimension n.

<u>Preuve</u>. - Si S_n est un sous-espace vectoriel de U de dimension n, nous lui appliquons le théorème avec $R' = R\,|S_n$

- Cas particulier : S_n engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$

Nous allons maintenant tirer deux sortes de résultats de ce théorème.

III. <u>Théorèmes de convexité</u>.

<u>Théorème</u>. Supposons que A dépende d'un paramètre réel t : nous noterons A_t. Supposons que A_t soit concave au sens suivant :

$$\forall u, \ t \longrightarrow A_t[u,u]$$

est une fonction concave. Alors, $\forall$ l'entier n ,

$$t \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$$

est une fonction concave ($\lambda_i(t)$ désignant la ième valeur propre de $R_t = \frac{A_t}{B}$).

Nous allons, pour tout t_0 fixé, fabriquer une fonction concave majorant la fonction étudiée et prenant même valeur qu'elle au point t_o.

Prenons $t_0 = 0$ pour simplifier ; soient $\varphi_1^{(o)},\dots, \varphi_n^{(o)}$ les fonctions propres de rang inférieur à n de R_0 et U' le sous-espace engendré par ces fonctions; soient $\lambda'_1(t),\dots, \lambda'_n(t)$ les valeurs propres de $R_t|U'$; alors, le théorème de Poincaré donne, $\forall t$:

$$\lambda_i(t) \leqslant \lambda'_i(t)$$

Soit $(a_{ij}(t))$ la matrice, dans la base $(\varphi_i^{(o)})$, de la restriction de A_t à U' :

d'une part $a_{ii}(t) = A_t[\varphi_i^{(o)}, \varphi_i^{(o)}]$ est une fonction de t concave par hypothèse pour $0 \leqslant i \leqslant n$

d'autre part

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i(t)$$

est concave ; on a évidemment

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i(o) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(o)$$

d'où la conclusion.

<u>Théorème</u>. Supposons que B dépende d'un paramètre réel t : B_t, et soit fonction connexe de t au sens suivant : $\forall u$, la fonction $t \longrightarrow B_t[u,u]$ est convexe. Alors, $\lambda_i(t)$ désignant la i$^{\text{ème}}$ valeur propre de $R_t = \frac{A}{B_t}$, la fonction

$$t \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i(t)}$$

est convexe.

Démonstration analogue.

<u>Application</u>. Considérons le problème de la membrane et notons $D(1)$ le domaine D de la membrane du repos, et $D(\tau)$ le domaine transformé par l'application $(x,y) \longrightarrow (\tau x,y)$, τ réel quelconque ; le quotient de Rayleigh pour le problème de la membrane fixée le long de son contour est

$$R_\tau[u] = \frac{\iint_{D(\tau)} (\text{grad } u)^2 dx\, dy}{\iint_{D(\tau)} u^2 dx\, dy} \qquad u = \text{fonction définie sur } D(\tau), \text{ nulle au bord.}$$

Un changement de variable donne

$$R_\tau[u] = \frac{\iint_D \left[\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy}{\iint_D v^2\, dx\, dy}$$

v étant une fonction sur D nulle au bord.

Si nous posons $\frac{1}{\tau^2} = t$, nous pouvons appliquer le théorème de concavité : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$ est donc fonction concave de t.

IV. <u>Généralisations</u> (d'après Hersch, Notes aux comptes-rendus, séances du 6 mars et du 17 avril 1961).

<u>Définition</u>. Soit S_n un sous-espace de U de dimension n, soit $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs de S_n deux à deux B-orthogonaux ; nous poserons :

$$TR[S_n] = R[v_1] + \ldots + R[v_n]$$

c'est la trace de la matrice de la forme induite sur S_n par A, dans la base obtenue en normant les vecteurs v_i.

De même, si A est définie positive, on pose

$$TR\ inv\ [S_n] = \frac{1}{R[w_1]} + \ldots + \frac{1}{R[w_n]}$$

où $w_1, \ldots, w_n$ sont deux à deux A-orthogonaux.

Le théorème de Poincaré donne tout de suite

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \underset{S_n}{\mathrm{Min}}\ TR[S_n]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = \underset{S_n}{\mathrm{Max}}\ TR\ inv\ [S_n]$$

S_n parcourant l'ensemble des sous-espaces vectoriels de U de dimension n.

Soit maintenant $S(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ le sous-espace engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (les n premiers vecteurs propres de R sur U).

<u>Proposition</u>. $$\sum_{i=k+1}^{k+n} \lambda_i = \underset{\substack{S_n \text{ B-orthogonal} \\ \text{à } S(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}}{\mathrm{Min}} TR[S_n]$$

il suffit de considérer la somme directe de S_n et $S(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$.

De même si A est définie positive

<u>Proposition</u>. $$\sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{1}{\lambda_i} = \underset{\substack{S_n \text{ A-orthogonal à} \\ S(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}}{\mathrm{Max}} TR\ inv[S_n]$$

Les deux dernières propositions donnent des caractérisations récurrentes. On peut donner des caractéristiques directes. Par exemple :

Proposition. $$\sum_{i=k+1}^{k+n} \lambda_i = \operatorname*{Min}_{S_{k+n}} \Big(\max_{S_n \subset S_{k+n}} TR[S_n]\Big)$$

où S_{k+n} parcourt l'ensemble des sous-espaces de U de dimension $k+n$, et S_n l'ensemble des sous-espaces de S_{k+n} de dimension n.

Théorème. Supposons que A_1 et A_2 soient deux formes bilinéaires symétriques positives sur U ; posons

$$R_1[u] = \frac{A_1[u,u]}{B[u,u]}, \quad R[u] = \frac{A_2[u,u]}{B[u,u]}$$

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad R = \frac{R_1 + R_2}{2} ;$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\lambda_{k_1+i}^{(A_1)} + \lambda_{k_2+i}^{(A_2)}\Big) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_{k_1+k_2+i}^{(A)}$$

où k_1 et k_2 sont deux entiers $\geqslant 0$ quelconques et où $\lambda^{(A_1)}$ (resp $\lambda^{(A_2)}$, $\lambda^{(A)}$) désigne une valeur propre de R_1 (resp R_2, resp R).

Démonstration. Soient toujours $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ les fonctions propres de R ; soient $\varphi_1^{(A_i)}, \dots, \varphi_n^{(A_i)}, \dots$ les fonctions propres de R_i $(i = 1,2)$. Considérons le sous-espace $S(\varphi_1, \dots, \varphi_{k_1+k_2+n})$ engendré par $\varphi_1, \dots, \varphi_{k_1+k_2+n}$.

On peut trouver $S_n \subset S(\varphi_1, \dots, \varphi_{k_1+k_2+n})$ et B-orthogonal à

$$S(\varphi_1^{(A_1)}, \dots, \varphi_{k_1}^{(A_1)}) \text{ et } S(\varphi_1^{(A_2)}, \dots, \varphi_{k_2}^{(A_2)}),$$

donc, un resultat anterieur nous enseigne que

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_1+n} \lambda_i^{(A_1)} \leqslant TR^{(A_1)}[S_n]$$

$$\sum_{i=k_2+1}^{k_2+n} \lambda_i^{(A_2)} \leqslant TR^{(A_2)}[S_n]$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{k_1+i}^{(A_1)} + \lambda_{k_2+i}^{(A_2)}) \leqslant 2\ TR^{(A)}[S_n]$$

mais si l'on remarque alors que

$$TR^{(A)}[S_n] \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_{k_1+k_{2+i}}^{(A)}$$

on trouve bien le résultat cherché.

Ce théorème donne un résultat de convexité très général qui contient

- d'une part pour $k_1 = k_2 = 0$, le résultat déjà vu au paragraphe précédent,
- d'autre part pour $n = 1$:

$$\lambda_{k_1}^{(A_1)} + \lambda_{k_2}^{(A_2)} \leqslant 2\,\lambda_{k_1+k_2-1}^{(A)}$$

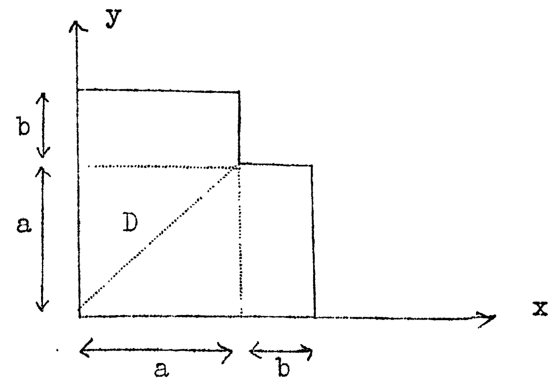
inégalité du type Weyl, donnée dans Math. Ann., 71, 1912, pour l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres.

D. UTILISATION DE PROBLÈMES A UNE DIMENSION

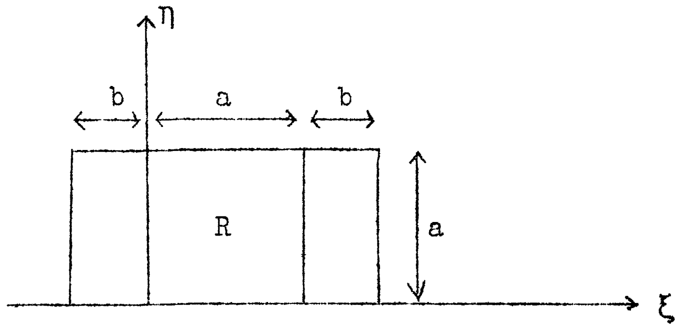
(D'après Hersch : "Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante" dans "Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik", vol.XI, fasc.5).

I. Problème.

On considère une membrane de la forme suivante, fixée le long de son contour



on peut majorer λ_1 : on considère le rectangle R :



on prend la première fonction propre $u_1(\xi, \eta)$ pour ce rectangle et on pose, pour $(x,y) \in D$:

$$v(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y) & \text{si} \quad y \leqslant x \\ u_1(y,x) & \text{si} \quad y \geqslant x \end{cases}$$

v est une fonction concurrente pour le domaine D donc la valeur propre fondamentale $\lambda_1(D)$ vérifie :

$$\lambda_1(D) \leqslant \frac{\iint_D (\text{grad } v)^2 dx\, dy}{\iint_D v^2 \, dx\, dy} = \lambda_1(R)$$

où $\lambda_1(R)$ est la valeur propre fondamentale du domaine rectangulaire, soit $\pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+2b)^2})$.

d'où

$$\lambda_1(D) \leq \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+2b)^2}\right)$$

Problème : comment minorer $\lambda_1(D)$?

II. Méthode de Payne-Weinberger.

L'idée est d'utiliser des problèmes auxiliaires à une dimension, c'est-à-dire des problèmes de cordes vibrantes.

Exposons le principe dans le cas d'une membrane fixée le long de son contour. Donnons-nous une valeur y_0 de y et traçons la droite $y = y_0$; supposons qu'elle coupe le domaine D d'une membrane suivant l'intervalle (a_{y_0}, b_{y_0}) ; nous considérons une corde vibrante d'extrémités fixes a_{y_0}, b_{y_0}, c'est-à-dire le problème

$$f''(x) + \mu f(x) = 0 \qquad f(a_{y_0}) = f(b_{y_0}) = 0$$

la valeur propre fondamentale est :

$$\mu_1 = \frac{\pi^2}{\delta_{y_0}^2} = \operatorname*{Min}_{v} \frac{\int_{a_{y_0}}^{b_{y_0}} v'^2\, dx}{\int_{a_{y_0}}^{b_{y_0}} v^2\, dx} \qquad v(a_{y_0}) = v(b_{y_0}) = 0$$

où $\delta_{y_0} = b_{y_0} - a_{y_0}$.

Si, alors, $u(x,y)$ est fonction propre fondamentale de la membrane, $v(x) = u(x,y_0)$ est une fonction concurrente pour l'évaluation du minimum ; d'où

$$\int_{a_{y_0}}^{b_{y_0}} u'^2_x(x,y_0)dx \geqslant \frac{\pi^2}{\delta_{y_0}^2} \int_{a_{y_0}}^{b_{y_0}} u^2(x,y_0)dx$$

si l'on pose $L_y = \sup_{y_0} \delta_{y_0}$ et si l'on intègre par rapport à y :

$$\iint_D u'^2_x \, dx\, dy \geqslant \frac{\pi^2}{L_y^2} \iint_D u^2 \, dx\, dy$$

en prenant maintenant des droites $x = x_o$, on obtient un résultat analogue ; l'addition membre à membre donne

$$\iint_D (\text{grad } u)^2 dx\, dy \geqslant \pi^2\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right) \iint_D u^2 dx\, dy$$

comme u est fonction propre fondamentale, on en déduit

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L^2 y}\right)$$

III. <u>Amélioration : cordes non homogènes</u>.

On peut améliorer la majoration en compliquant le problème auxiliaire : sur l'intervalle (a_{y_o}, b_{y_o}), nous considérons le problème

$$f''(x) + \mu \alpha_{y_o}(x)\, f(x) = 0 \qquad f(a_{y_o}) = f(b_{y_o}) = 0$$

$\alpha_{y_o}(x)$ étant une fonction choisie de x pour tout y_o ; c'est-à-dire que nous nous donnons une fonction de deux variables, $\alpha(x,y) = \alpha_y(x)$.

Alors la valeur propre fondamentale de ce problème de corde vibrante non homogène est :

$$\mu_1(y_o) = \operatorname*{Min}_v \frac{\int_{a_{y_o}}^{b_{y_o}} v'^2 \, dx}{\int_{a_{y_o}}^{b_{y_o}} \alpha(x,y_o) v^2 dx} \qquad v(a_{y_o}) = v(b_{y_o}) = 0$$

d'où, avec la fonction propre $u(x,y)$:

$$\int_{a_{y_0}}^{b_{y_0}} u'^2_x(x,y_0)dx \geqslant \mu_1(y_0) \int_{a_{y_0}}^{b_{y_0}} \alpha(x,y_0)\, u^2(x,y_0)\, dx$$

on obtient pour tout x_0 , une inégalité analogue, en se donnant une fonction $\beta(x,y)$. D'où, compte tenu de ce que u est fonction propre

$$\lambda_1 \iint_D u^2 dx\, dy \geqslant \iint_D [\mu_1(y)\alpha(x,y) + \nu_1(x)\beta(x,y)]u^2 dx\, dy$$

d'où

$$\lambda_1 \geqslant \inf_{(x,y)\in D} [\mu_1(y)\alpha(x,y) + \nu_1(x)\beta(x,y)]$$

$\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 1$, redonne la majoration du paragraphe précédent.

Problème : il est difficile d'utiliser directement cette majoration, car, en général on ne sait pas calculer les fonctions $\mu_1(y)$ et $\nu_1(x)$. Si, en revanche on prend le problème à l'envers et qu'on se donne pour tout y_0 une fonction $f_{y_0}(x)$, pour tout x_0 une fonction $g_{x_0}(y)$, chacune fonction propre d'un problème unidimensionnel, on a

$$\mu_1(y_0)\alpha(x,y_0) = -\frac{f''_{y_0}(x)}{f_{y_0}(x)}$$

$$\nu_1(x_0)\beta(x_0,y) = -\frac{g''_{x_0}(y)}{g_{x_0}(y)}$$

d'où, en posant $f(x,y) = f_y(x)$, $g(x,y) = g_x(y)$

$$\lambda_1 \geqslant \inf_{(x,y)\in D} \left(-\frac{f''_{x^2}}{f} - \frac{g''_{y^2}}{g}\right)$$

Nous allons donc maintenant nous donner f et g, et, tout problème unidimensionnel étant oublié, nous allons démontrer directement une telle inégalité.

IV. Principe de maximum

On se donne deux fonctions définies sur D : $f(x,y) > 0$ sur D, continue et deux fois dérivable par rapport à x, quelconque par rapport à y ; $g(x,y) > 0$ sur D, continue et deux fois dérivable par rapport à y, quelconque par rapport à x ; nous définirons le champ $\vec{p}$ par ses composantes

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{f'_x}{f} \\[2ex] -\dfrac{g'_y}{g} \end{array} \right.$$

on a alors
$$-\frac{f''_{x^2}}{f} - \frac{g''_{y^2}}{g} = \operatorname{div} \vec{p} - \vec{p}^{\,2}$$

et nous allons donc démontrer

$$\lambda_1 \geqslant \inf (\operatorname{div} \vec{p} - \vec{p}^{\,2})$$

nous supposerons, nous plaçant ainsi dans le cas général de la membrane élastiquement liée, que

$$\vec{p} \cdot \vec{n} \leqslant k(s)$$

(n normale extérieure au contour Γ de D)

Soit u fonction propre associée à la valeur propre fondamentale ; on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (\overrightarrow{\operatorname{grad} u} + u\,\vec{p})^2 &= \overrightarrow{\operatorname{grad} u}^{\,2} + \vec{p} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(u^2) + u^2\,\vec{p}^{\,2} \\ &= \overrightarrow{\operatorname{grad} u}^{\,2} + \operatorname{div}(u^2\,\vec{p}) + u^2(\vec{p}^{\,2} - \operatorname{div} \vec{p}) \end{aligned}$$

La formule de Stokes donne alors, après intégration de l'inégalité :

$$0 \leqslant \iint_D \overrightarrow{\operatorname{grad} u}^{\,2}\, dx\, dy + \int_\Gamma u^2(\vec{p} \cdot \vec{n})\, ds + \iint_D u^2(\vec{p}^{\,2} - \operatorname{div} \vec{p})\, dx\, dy$$

$$\leqslant \iint_D \overrightarrow{\operatorname{grad} u}^{\,2}\, dx\, dy + \int_\Gamma k(s) u^2\, ds + \iint_D u^2(\vec{p}^{\,2} - \operatorname{div} \vec{p})\, dx\, dy$$

u étant fonction propre, on en déduit bien

$$\lambda_1 \geqslant \inf_{(x,y)\in D} (\operatorname{div} \vec{p} - \vec{p}^{\,2})$$

Mais, en outre, si l'on prend $\vec{p} = -\dfrac{\overrightarrow{\text{grad }u}}{u}$, on a bien $\vec{p}\,.\,\vec{n} \leqslant k(s)$ d'après $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} + k(s)u = 0$; or on a alors

$$\operatorname{div} \vec{p} - \vec{p}^{\,2} = -\frac{\Delta u}{u} = \lambda_1$$

On peut donc, en définitive, affirmer que

$$\lambda_1 = \underset{\substack{\vec{p} \text{ satisfaisant aux} \\ \text{conditions énoncées}}}{\operatorname{Max}} \left[\inf_{(x,y)\in D} (\operatorname{div} \vec{p} - \vec{p}^{\,2}) \right]$$

Méthodes analogues : les hypothèses font intervenir de façon privilégiée les deux axes de coordonnées ; en fait on a des résultats tout à fait analogues en prenant plus généralement un nombre quelconque de directions privilégiées ; par exemple, si l'on prend 3 directions ξ , η , ζ , faisant deux à deux un angle de 120°, on aura

$$\lambda_1 = \operatorname*{Max}_{f,g,h} \left[2/3 \inf_{(x,y)\in D} \left(-\frac{f''_{\xi^2}}{f} - \frac{g''_{\eta^2}}{g} - \frac{h''_{\zeta^2}}{h} \right) \right]$$

où f est continue et deux fois dérivable en ξ , g continue et deux fois dérivable en η , h continue et deux fois dérivable en ζ , et où f, g, h sont astreintes à la condition

$$\frac{f'_\xi}{f}\,\frac{\partial \xi}{\partial \vec{n}} - \frac{g'_\eta}{g}\,\frac{\partial \eta}{\partial \vec{n}} - \frac{h'_\zeta}{h}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \vec{n}} \leqslant 2/3\; k(s)$$

V. <u>Adaptations diverses</u>.

Ce principe de maximum peut être adapté à d'autres problèmes : rigidité à la torsion, équation de Schrödinger. Indiquons ce qui se passe dans ce dernier cas : l'équation de Schrödinger indépendante du temps est

$$\Delta v + [\lambda - W]v = 0$$

on prend 3 fonctions f, g, h sur $\underline{\underline{R}}^3$, f deux fois dérivable en x , g,...

posons

$$\vec{p} = \left(-\frac{f'_x}{f}, -\frac{g'_y}{g}, -\frac{h'_z}{h}\right)$$

soit u fonction propre ; on a

$$0 \leqslant (\overrightarrow{\text{grad } u} + u\vec{p})^2 = \overrightarrow{\text{grad } u}^2 + \text{div}(u^2\vec{p}) + u^2(\vec{p}^{\,2} - \text{div }\vec{p})$$

d'où, avec des conditions aux limites convenables pour $\vec{p}$, et après application de la formule de Stokes :

$$0 \leqslant \iiint \overrightarrow{\text{grad } u}^2 dx\,dy\,dz + \iiint \text{div}(u^2\vec{p})dx\,dy\,dz + \iiint u^2(\vec{p}^{\,2} - \text{div }\vec{p})dxdydz$$

u étant fonction propre associée à λ_1, on en tire

$$\lambda_1 \geqslant \inf[W(x,y,z) + \text{div }\vec{p} - \vec{p}^{\,2}]$$

la considération du cas particulier $\vec{p} = -\dfrac{\overrightarrow{\text{grad } u}}{u}$ permet alors d'écrire

$$\lambda_1 = \underset{f,g,h}{\text{Max}}\left[\inf_{(x,y,z)} (W(x,y,z) + \text{div }\vec{p} - \vec{p}^{\,2})\right]$$

VI. <u>Application au problème initial</u>.

Nous prenons sur D le champ $p = (p_1, p_2)$ défini de la manière suivante :

dans I $p_1 = -k_1 \text{ cotg}(k_1 x)$

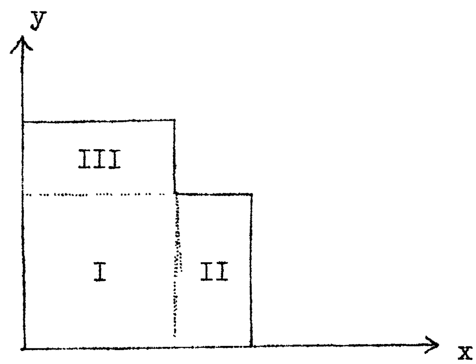
$p_2 = -k_1 \text{ cotg}(k_1 y)$

dans II $p_1 = -k_2 \text{cotg}[k_2(x-a-b)]$

$p_2 = -\frac{\pi}{a} \text{ cotg}(\frac{\pi}{a} y)$

dans III $p_1 = -\frac{\pi}{a} \text{ cotg}(\frac{\pi}{a} x)$

$p_2 = -k_2 \text{ cotg}[k_2(y-a-b)]$



k_1 et k_2 sont deux paramètres sur lesquels nous allons jouer. Le choix de la fonction cotg est dû au fait qu'elle donne div $\vec{p} - \vec{p}^2$ constant dans chacun des domaines I, II, III, et qu'en imposant

$$(1) \qquad 2\,k_1^2 = \frac{\pi^2}{a^2} + k_2^2$$

div $\vec{p} - \vec{p}^2$ est constant dans D ce qui rend évidemment très intéressante la minoration

$$\lambda_1 \geqslant \inf(\operatorname{div} \vec{p} - \vec{p}^2)$$

les conditions de continuité donnent, aux raccords des domaines I, II, et III :

$$(2) \qquad -\,k_1 \operatorname{coty}(k_1 a) = k_2 \operatorname{coty}(k_2 b)$$

on peut alors affirmer, k_1 et k_2 étant déterminés par (1) et (2), que

$$\lambda_1(D) \geqslant 2\,k_1^2$$

C'est là une minoration satisfaisante, ainsi que le montrent les quelques calculs qui permettent de tracer la courbe suivante :