Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

L. Gårding

Problème de Cauchy pour les équations quasi-linéaires strictement hyperboliques

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. nº 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A2_0>

PROBLEME DE CAUCHY POUR LES EQUATIONS QUASI-LINEAIRES STRICTEMENT HYPERBOLIQUES

par

L. GÅRDING

1. Introduction. Les résultats ci-dessous obtenus en collaboration avec J. Leray généralisent un peu ceux de Dionne (C.R. t.255, (1961), n°22, 2451-2452). Comme chez Dionne il s'agit de résoudre, avec des hypothèses minimales, le problème de Cauchy par une équation strictement hyperbolique quasi-linéaire dans une bande. Notre théorie est analogue à la théorie d'une équation ordinaire.

$$\frac{du}{dt} = f(t,u)$$

où l'on suppose que la fonction

$$\sup_u \left| \partial f(t,u)/\partial u \right|$$

est localement intégrable ; Dionne la suppose localement à carré intégrable. Les textes élémentaires de la théorie des équations différentielles la supposent bornée (condition de Lipshitz).

Les calculs étant très longs, on donne seulement une esquisse très brève de la démonstration.

2. Notations. Dérivées : $\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_\ell) = (D_1, \ldots, D_\ell)$; $(\partial/\partial x)^\alpha = D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_\ell^{\alpha_\ell}$; ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\ell$; D^j = l'ensemble $\{D^\alpha\}$ où $|\alpha| \leq j$; $D^{j,k}$ = l'ensemble $\{D^\alpha\}$ où $\alpha_1 \leq j$, $|\alpha| \leq j + k$ (ordre total $\leq j + k$ ordre en $D_1 \leq j$); $D^{j,0} = D^j$.

Soit $X = X_t \subset R^{\ell}$ la bande $0 \leq x_1 \leq t$ et $S = S_t$ l'hyperplan $x_1 = t$; $dS = dx_2 \ldots dx_{\ell}$.

Espaces sur S.- $L_p(S)$, norme $|f, S|_p = (\int |f(x)|^p \, dS)^{1/p}$; $L_{[p]}(S)$, norme $|f,S|_{[p]} = \sup |f,K|_p$, K cube unité $\subset$ S. Soit $P = \{ p_\alpha = p_{|\alpha|} \}$. Espace $L_P^{r,s}(S)$, norme $|D^{r,s} f,S|_P = \sum |D^{\alpha} f,S|_{p_\alpha}$ pour $D^{\alpha} \subset D^{r,s}$. Même chose avec $P \to [P]$. Ces espaces seront employés avec $P = p$, c'est-à-dire $p_\alpha = p$ pour tout α . Un théorème de Soboleff permet d'identifier $L_P^{r,s}$ (S) et $L_p^{r,s}$ (S) si

$$\frac{1}{p_\alpha} \quad \left[\frac{1}{p} - \frac{r+s-|\alpha|}{\lambda}\right]_+ \, , \; (\lambda > \ell - 1, \; [A]_+ = \max (0,A)).$$

Espaces sur $S \times Y$.- Soit Y un ouvert contenu dans un R^{ν} . Espace $L_{p,\infty}(S \times Y)$, norme $|f,S \times Y|_{p,\infty} = |g,S|_p$ où $g(x) = \sup\limits_{y} |f(x,y)|$. Même chose avec $p \to [p]$.

Espace $L_{p,\infty}^{r}(S \times Y)$, norme

$$|D^r f,S \times Y|_{p,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq r} |D_x^{\alpha} f, S \times Y|_{p,\infty} + \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta| \leq r \\ |\beta| \geq 1}} |D_x^{\alpha} D_y^{\beta} f,S \times Y|_{[p],\infty}$$

Même chose avec $p \to [p]$. Cet espace sera utilisé pour $p = 2$ et $(r - 1) > 2(\ell - 1)$. Dans ce cas, où les éléments de $L_{[2]}^{r}(S)$ ont des dérivées premières bornées, la substitution $f(x,y) \to f(x,g(x))$ où $g \in L_2^r(S)$ conduit à une fonction de L_2^r (S). Même chose avec $2 \to [2]$.

Note. On peut remplacer p par $P = \{ p_{\alpha\beta} \}$ et utiliser Soboleff pour faire des identifications.

Espaces sur B.- Le prototype de ces espaces est l'espace des $\varphi(u)$ définis sur un intervalle $I : 0 \leq u \leq t$ avec la norme $\|\varphi ,I\|_1 = |\varphi ,I|_{\infty} + |\varphi',I|_1$.

Cet espace est un anneau :

$$\| \varphi\psi, I\|_1 \leq \|\varphi, I\|_1 \; \|\psi, I\|_1 ,$$

et il a la propriété d'inversion : si $|1/\varphi, I|_\infty < \infty$, $1/\varphi$ appartient à l'espace.

Espace $L^{r,s}_{q,p}(X)$, norme

$$|D^{r,s} f, X|_{q,p} = \left(\int_0^t |D^{r,s} f, S_u|^q_p \, du\right)^{1/q}$$

En particulier, $L^{r,s}_{1,p}(X)$, normes

$$|D^{r,s} f, X|_{1,p}$$

et $(r > 0)$

$$\|D^{r,s} f, X\|_{1,p} = |D^{r,s} f, X|_{1,p} + |D^{r-1,s} f, X|_{\infty, p}.$$

Lemme utile : si $r \geq 1$ et si $\frac{1}{p} < [\frac{r-1}{\ell-1}]_t$, $(\frac{1}{p} = 0$ si $r = 1)$ alors l'espace $L^r_{1,p}(X)$ est un anneau :

$$\|D^r (f g), X\|_{1,p} \quad c \, \|D^r f, X\|_{1,p} \, \|D^r_g, X\|_{1,p}$$

où c ne dépend pas de t; il a la propriété d'inversion ci-dessus.

Espaces sur $X \quad Y$.- $L^r_{1,p,\infty}(X \times Y)$, normes

$$|D^r f, X \times Y|_{1,p,\infty} = \int_0^t |D^r f, S_u \times Y|_{p,\infty} \, du$$

$$\|D^r f, X \times Y\|_{1,p,\infty} = |D^r f, X \times Y|_{1,p,\infty} + |D^{r-1} f, X \times Y|_{\infty, p, \infty} .$$

Même chose avec $p \to [p]$. Cet espace sera utilisé pour $p = 2$, $(r-1) > 2(\ell - 1)$. Dans ce cas, si $g \in L^r_{\infty,2}(X)$, la substitution $f(x,y) \longrightarrow f(x,g(x))$ donne une fonction de $L^r_{1,2}(X)$. Même résultat avec $2 \to [2]$.

Espaces d'opérateurs différentiels sur X.- Soit

$$a(x,D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha, \quad |\alpha| \leq m+1$$

un opérateur différentiel dans X. Soit $Q = \{ q_\alpha = q_{|\alpha|} \}$ et soit $V^r_{1,[Q]}(X)$ la classe de ces opérateurs pour lesquels

$$a_\alpha(X) \in L_{1,[q_\alpha]}(X)$$

Normes

$$|D^r a, X|_{1,[Q]} = \sum |D^r a_\alpha, X|_{1,[q_\alpha]}.$$

et

$$\| D^r a, X \|_{1,[Q]} = |D^r a, X|_{1,[Q]} + |D^{r-1} a, X|_{\infty,[Q']}$$

où $q'_j = q_{j+1}$. Nous allons prendre

$$\frac{1}{q_\alpha} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{q_\alpha} < \left[\frac{m - |\alpha| + r}{\ell - 1}\right]_+ .$$

Si

$$\frac{r-1}{\ell - 1} > \frac{1}{2}$$

cela revient tout simplement à poser $Q = 2$, c'est-à-dire $q_\alpha = 2$ pour tout α. Lemme utile : $V^r_{1,[Q]}(X)$ est un module pour $L^r_{1,[p]}(X)$ où $p = q_{m+1}$; ce dernier espace a la propriété d'inversion. (Il faut souvent diviser par le coefficient principal a_1 de $a = a_1 D_1^{m+1} + \dots$).

Espaces d'opérateurs différentiels sur $X \times Y$.- On utilisera $V^r_{1,[2],\infty}(X \times Y)$, l'espace des opérateurs

$$\sum a_\alpha(x,y) D^\alpha, \quad |\alpha| \leq m+1$$

tels que

$$a_\alpha(x,y) \in L^r_{1,[2],\infty}(X \times Y)$$

normes

$$|D^r a, X \times Y|_{1,[2],\infty} = \sum_\alpha |D^r a_\alpha, X \times Y|_{1,[2],\infty}$$

et

$$\| D^r a, X \times Y\|_{1,[2],\infty} = \sum_\alpha \|D^r a_\alpha, X \times Y\|_{1,[2],\infty}$$

Ces espaces seront utilisés dans la théorie des opérateurs **quasi-linéaires.** Voir n°6.

3. Opérateurs différentiels hyperboliques. Soit

$$a = a(x,D) = \sum a_\alpha(x)\, D^\alpha \;, \qquad |\alpha| \leq m+1$$

un opérateur strictement hyperbolique dans la bande X **par rapport à la première** coordonnée. Soit

$$\operatorname{Pr} a = \sum a_\alpha(x)\, D^\alpha = a_1(x)\, D_1^{m+1} + \dots \;, \qquad |\alpha| = m+1 \;,$$

sa partie principale. Les racines λ_k de

$$\operatorname{Pr} a(x, \xi) = a_1(x) \prod_1^m (\xi_1 - \lambda_k(x, \xi_2, \dots, \xi_\ell)),\ (\xi_2, \dots \text{ réels}),$$

sont réelles ; on les suppose différentes entre elles pour $\xi_2, \dots \neq 0$; on pose

(1) $$\text{sép}(\operatorname{Pr} a, X) = \inf |\lambda_j(x,\xi) - \lambda_k(x,\xi)|^{-1}$$

pour $j \neq k$, $x \in X$ et $\xi_2^2 + \dots \quad \xi_\ell^2 = 1$. Soit

$$\max \omega(f,X)(s) = \sup |f(x) - f(y)| \;;\; x, y \in X \;,\; |x-y| \leq s$$

le module de continuité d'une fonction f sur X ; on pose

(2) $$\omega(\operatorname{Pr} a, X) = \quad \omega(a_\alpha, X) \;; \quad |\alpha| = m+1.$$

Soit Hyp (X) la classe de ces opérateurs qui sont **uniformément strictement hyperboliques** dans X, $1/a_1$ étant borné et $\operatorname{Pr} a$ borné et **uniformément continu.** On pose hyp (Pr a,X) = ω (Pr a,X), $|\text{Pr } a, X|_\infty + |1/a_1, X|_\infty$ + sép (Pr a,X) + ℓ + m

Soit Hyp_Q^r (X) la classe des opérateurs a tels que

$$a \in \text{Hyp}(X) , \qquad \text{Pr } a \in V^1_{[Q]} (X) , \qquad a \in V^r_{[Q]} (X) ;$$

la deuxième condition est superflue si $r > 0$; on pose

$$\chi^r (a,X) = \text{hyp} \ (\text{Pr } a, X), \|D^r a, X\|_{1,[Q]} + \|D^1 \text{ Pr } a, X\|_{1,[Q]} , Q^{-1}, r.$$

4. Inégalité d'énergie. Soit

$$b(x, \xi) = (m+1)^{-1} (\partial/\partial \xi_1) \text{ Pr } a(x, \xi)$$

Alors

$$2 \text{ Re af } \overline{bf} = \sum (\partial/\partial x_k) A_k(x,f) + A_0(x,f)$$

où les

$$A_k(x,f) = \sum A_{k\alpha\beta} (x) D^\alpha f(x) \overline{D^\beta f(x)}, \quad |\alpha| = |\beta| = m$$

sont des formes hermiliennes. Posons, en omettant l'indice 2 dans la dernière norme,

$$|E^{m+r} f,S|^2 = \int_S \Sigma (A_1 \ x, D^r f) \ dS + \tau |D^{m+r-1} f,S|^2$$

Alors, si τ est suffisamment grand, on a

$$(1) \qquad c^{-1} |D^{m+r} f,S| \leq |E^{m+r} f,S| \leq c |D^{m+r} f,S| ,$$

où $c = c(\text{hyp } (a,S))$ est fonction continue et croissante et de même pour $\tau = \tau(\text{hyp } (a,S))$ (τ grand positif). On a l'inégalité d'énergie

$$(2) \quad |E^{m+r} f,S| \leq (\exp (c|D^r a,X|_{1,[Q]} + c|D^1 a,X|_{1,[Q]})) |E^{m+r} f,S_0| + c|D^r af,X|_{1,2}$$

où $c = c(\chi^r(a,X))$ est fonction continue et croissante.

Note.- Si f est une onde pour a , c'est-à-dire si $af = 0$, (2) dit que

$$\left| E^{m+r} f,S \right| \leq e^{\varphi(t)} \left| E^{m+r} f,S_o \right| ,$$

où $\varphi(t) \to 0$ pour $t \to 0$. La forme $|E^{m+r} f,S|^2$ représente l'énergie de l'onde. Il suffit pour la suite d'employer $|D^{m+r} f,S|$ au lieu de $|E^{m+r} f,S|$ dans (2) ; or, vu (1), ca donne une inégalité moins bonne pour t petit : $|D^{m+r} f,S|^2$ est seulement une majorante de l'énergie. Pour mettre en évidence que l'énergie dépend de a nous la noterons aussi $|E_a^{m+r} f,S|$.

Note.- L'inégalité (2) vaut avec

$$\left| E^{m+r} f,X \right|_{\infty,2} = \sup_{0 \leq u \leq t} \left| E^{m+r} f,S_u \right|$$

à gauche. En effet, le membre droit est fonction non décroissante de t.

5. <u>Problème de Cauchy linéaire</u>. D'abord soit $C_2^{r,s}(X)$ le sous-espace de $L_{\infty,2}^{r,s}(X)$ dont les éléments $f(x)$, quand on les considère comme fonctions définies pour $0 \leq x_1 \leq t$ à valeurs dans, par exemple, $L_2^{r,s}(S_o)$, sont continues en x_1 (motivation de la notation : on remplace L_∞ par C). L'espace $C_2^{r,s}(X)$ est la fermeture dans $L_{\infty,2}^{r,s}(X)$ des fonctions indéfiniment dérivables, nulles pour $|x_2| + \ldots |x_\ell|$ grand.

Soit $a \in \mathrm{Hyp}_Q^r(X)$. Alors, étant donnés $v \in L_{1,2}^r(X)$ et $w \in L_2^{m,r}(S_o)$, il existe $u \in C_2^{m+r}(X)$ tel qu'on ait $a(x,D)u = v$ dans X, $D^m u = D^m w$ sur S_o. La solution satisfait à (4.2) :

$$\left| E^{m+r} u,X \right|_{\infty,2} \leq c' \left| E^{m+r} u,S_o \right| + c \left| D^r v,X \right|_{1,2}$$

en effet, avec les mêmes constantes ; le membre droit ne dépend que des données de Cauchy : en dérivant $au = v$ $r-1$ fois, les dérivées $D^{m+r}u$ pour $x_1 = 0$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des dérivées $D^{m,r}w$ et $D^{r-1}v$.

6. <u>Problème de Cauchy quasi-linéaire</u>. Il s'agira de résoudre

$$(1) \qquad a(x,D^m u,D)u = b(x,D^m u) \quad \text{dans } X$$

$$D^m u = D^m w \quad \text{sur } S_o \; .$$

Soit Y une partie d'un espace vectoriel dont les coordonnées y^γ se correspondent avec les dérivées $D^\gamma u(x)$ où $|\gamma| \leq m$; on pose $y = \{ y^\gamma \}$. Les opérateurs $a(x,D^m u,D)$ seront contenus dans $V^r_{1,[2]}(X)$ où

$$\frac{r-1}{\ell - 1} > \frac{1}{2} \quad .$$

Nous ferons les trois hypothèses suivantes

1°) $w \in L_2^{m,r}(S_o)$, Y est un ouvert contenant la fermeture W des valeurs de $D^m w(x)$ sur S_o ;

$$a(x,D^m w,D) \in Hyp(S_o)$$

Vu un lemme de Soboleff, W est compact.

2°) $a(x,y,D) \in V^r_{1,[2],\infty}(X \times Y)$

3°) $b(x,y) \in L^r_{1,2,\infty}(X \times Y)$.

THEOREME.- Sous ces hypothèses il existe un $T > 0$ tel que pour tout $0 \leq t \leq T$, le problème de Cauchy a une solution unique

$$u \in C_2^{m+r}(X) \; ,$$

l'opérateur $a(x,D^m u,D)$ appartient à $Hyp^r_2(X)$.

Note.- Vu Soboleff, $D^{m+1}u$ est continu.

Note.- On a choisi d'étudier le problème de Cauchy sur une bande ce qui masque le caractère local qu'a le problème dans le cas hyperbolique. On peut déduire du théorème précédent un théorème local.

Preuve esquissée.- 1°) On étend w à une fonction $w' \in C_2^{m+r}(X)$, $t \geq 0$ arbitraire, par exemple en prenant pour w' la solution d'un problème de Cauchy $A(\partial/\partial x)w' = 0$ pour $x_1 \geqslant 0$, $D^m w' = D^m w$ sur S_o, A étant hyperbolique de degré $m \quad 1$ à coefficients constants. En utilisant les théorèmes de substitution on constate que $D^m w' \in Y$, que $a(x, D^m w', D) \in Hyp_2^r(X)$ et que $b(x, D^m w') \in L_{1,2}^r(X)$ pour t assez petit et qu'on peut résoudre une suite finie de problèmes de Cauchy

$$a(x, D^m u_j(x), D)u_{j+1} = b(x, D^m u_j) \quad \text{dans } X$$

$$D^m u_{j+1} = D^m w \quad \text{sur } S_o .$$

où $j = 1, \ldots, r$ et $u_1 = w'$, toujours pour t assez petit. La fonction u_r appartient à $C_2^{m+r}(X)$; désormais nous la noterons u_o ; elle a la propriété que (1) équivaut à

(1')
$$a(x, D^m u, D)u = b(x, D^m u) \quad \text{dans } X$$

$$D^{m+r} u = D^{m+r} u_o \quad \text{sur } S_o .$$

2°) Soit E le symbole d'énergie qui correspond à l'opérateur $a(x, D^m u_o, D)$. Cet opérateur appartient à $Hyp_2^r(X)$ pour t petit.

Notons $Z = Z(t, \sigma)$ l'ensemble des fonctions $v(x)$ telles que

$$v \in C_2^{m+r}(X), \ |E^{m+r} v, X|_{\infty,2} \leq \sigma \ , \ D^{m+r} v = D^{m+r} u_o \quad \text{sur } S_o .$$

Si $\sigma > |E^{m+r} w, S_o|$, Z n'est pas vide.

3°) On démontre qu'il existe $T_1 = 1/c(\sigma)$ tel que pour tout $v \in Z$ et $t \leq T_1$ on a

$$D^m v(x) \in Y, \quad a = a(x, D^m v, D) \in Hyp_2^r(X) , \qquad \chi^r(a, X) \leq c(\sigma).$$

4°) On prend $t \leq T_1$ et on étudie l'application

(2)
$$v \longrightarrow u$$

venant du problème de Cauchy linéaire :

$$a(x, D^m v, D)u = b(x, D^m v) \quad \text{dans } X$$

$$D^{m+r} v = D^{m+r} u_0 \quad \text{sur } S_0$$

En posant

$$\| v \| = \left| E^{m+r} v, X \right|_{\infty,2} \quad \text{et} \quad \| u_0 \|_0 = \left| E^{m+r} u_0 , S_0 \right| ,$$

l'inégalité d'énergie donne, après quelques calculs, que

$$\| u \| \leq c(\sigma)\, k(t)\, e^{c(\sigma)k(t)} \psi (\| v \|) + e^{c(\sigma)k(t)} \| u_0 \|_0$$

où c, ψ , k sont continus et non-décroissants et $k(0) = 0$. Par conséquent, il existe $T = 1/c(\sigma)$ tel que, pour $t \leq T$,

$$\| v \| \leq \sigma \implies \| u \| \leq \sigma \quad ,$$

c'est-à-dire (2) applique Z dans Z.

5°) On suppose $t \leq T$, on définit une suite $\{ u_j \}_0^\infty$ dans Z par la condition suivante : (2) applique u_j sur u_{j+1} . On ne sait pas démontrer la convergence de cette suite dans $C_2^{m+r}(X)$ mais on peut la démontrer dans $C_2^{m+r-1}(X)$. L'élément limite u est la solution cherchée.

7. <u>Le problème de Cauchy non-linéaire</u> se ramène au problème de Cauchy quasi-linéaire (loc. cit.).