L. Gårding

Distributions invariantes

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. nº 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A1_0>

DISTRIBUTIONS INVARIANTES

par

L. GÅRDING

1. Soit X une variété et $\Gamma = \{\gamma\}$ un groupe opérant sur X, γx étant de classe $C = C^\infty$ sur X. Une distribution $g(x)$ sur X est dite invariante si $g(\gamma x) = g(x)$ pour tout γ.

Exemples.- 1°) $g(x)$ est une fonction invariante $\Longleftrightarrow$ g = constante sur les orbites Γx de X.

2°) $X = R^n$, $n > 1$, Γ le groupe d'automorphismes linéaires d'une forme quadratique $G(x) = \sum g_{jk} x_j x_k$. Toute distribution invariante ayant pour support l'origine est de la forme $Q(\Delta)\,\delta(x)$, Q = polynome, x_k

$$\Delta = \sum g^{jk}(\partial/\partial x_j)(\partial/\partial x_k).$$

3°) Même espace, même groupe, $G = \sum x_k^2$, (Γ = le groupe orthogonal). On obtient l'espace P' de toutes les distributions invariantes comme il suit (Schwartz). Soit I l'intervalle $\xi \geq 0$ et soit $d\gamma$ la mesure de Haar sur Γ, $\int d\gamma = 1$. Alors $f \longrightarrow (Mf)(\xi) = \int f(\gamma x)d\gamma$ où $\xi = xx = \sum x_j^2$ est une application continue surjective $C_o(R^n) \longrightarrow C_o(I)$, (indice $_o$: support compact) ; l'adjoint $M' : C'(I) \longrightarrow P' \subset C'(R^n)$ (C' = les distributions) est un isomorphisme (

Remarque.- $(Mf)(\xi) = \xi^{1-n/2} \int \delta(\xi - xx)\, f(x)dx$ à un facteur positif près.

Preuve.- $(Mf)(\xi) = \int f(\gamma y)d\gamma$ où $y = (\sqrt{\xi}, 0, \ldots, 0)$ est fonction paire régulière en $\sqrt{\xi}$, donc régulière en ξ. Si $h \in C_o(I)$ et $f(x) = h(xx)$, alors, $Mf = h$. Clair que M' est une application dans P'. Soit g P', alors

$$\int g(x)f(x)dx = \int g(x)f(\gamma x)dx = \int g(x)\ (Nf)(x)\,dx$$

où

$$(Nf)(x) = \int f(\gamma x)d\gamma \quad .$$

Donc

$$\int g(x)\, f\, (x)dx = \int g(x)(Mf)(xx)dx$$

est fonction linéaire continue de $Mf \in C_o(I)$; elle s'écrit $\langle h, Mf \rangle$ où $h \in C'(I)$.

2. Nous allons généraliser le dernier exemple en remplaçant R^n par un produit $X = R^n \times \ldots \times R^n$; m facteurs ; points $x = x_1, \ldots, x_m$; $x_k \in R^n$. D'abord, décrivons X/Γ, espace des orbites. Les paramètres de ces orbites sont les polynomes invariants classiques : les produits scalaires

(1) $$\xi_{jk} = x_j\, x_k$$

et, si $m \geq n$, les déterminants

(2) $$\sigma_\alpha = \text{dét}\ (x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})\ ;\ 1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \leq m$$

Si

$$\xi_{\alpha\beta} = \text{dét}\ (\xi_{\alpha_j \beta_k})$$

alors

(3) $$\sigma_\alpha\, \sigma_\beta = \xi_{\alpha\beta}\ .$$

Il est évident que, ξ étant la matrice (ξ_{jk}),

(4) $$\xi \geqslant 0, \quad \text{rang}\ \xi \leq n.$$

Soit R^N l'espace ayant pour coordonnées ξ_{jk} et σ_α ; soit $I = I^{n,m}$ la partie de cet espace où on a (3) et (4). Vu (3), la projection de I sur l'espace des ξ couvre deux fois la partie de cet espace où rang $\xi = n$.

Lemme 2.1. (1) et (2) donnent une application biunivoque $I \longrightarrow X/\Gamma$

Preuve : des calculs classiques.

3. <u>Semi-variété, notion ad hoc provisoire</u>. Soit A une partie d'un R^p (topologie induite) et soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$ la famille de toutes les applications

$$(1) \qquad U \ni u \longrightarrow x(u) \in A$$

qui appliquent une partie ouverte U d'un R^q (q quelconque) <u>dans</u> A et qui sont de classe C sur U. Notons $x(U)$ l'image de l'application (1).

Définition. On dit que A est une semi-variété si tout $x_0 \in A$ a au moins un voisinage de la forme $x(U)$, $x(u)$ appartenant à $\mathcal{F}$.

Remarque.- Si $x(u)$ est biunivoque et si u est fonction de classe C de q coordonnées de x convenablement choisies, A est une variété près de x_0 ; notre définition est la moitié de la définition d'une variété.

Définition. $C(A)$ = l'ensemble des $f(x)$ sur A telles que $f(x(u)) \in C(U)$ pour <u>tout</u> $x(u) \in \mathcal{F}$.

Exemples. 1°) Dans R, $A : x \geqslant 0$ est une semi-variété ; $C(A)$ = les fonctions $f(x)$ de classe C pour $x \geqslant 0$.

Preuve.- On prend $x(u) = u^2$ pour tout x_0. Les fonctions $f(x)$ définies ci-dessus appartiennent à $C(A)$ par définition. Réciproquement, si $f \in C(A)$ alors $g(u) = f(u^2) \in C(R)$ et $g(u) = g(-u)$. Par conséquent, toutes les dérivées de g d'ordre impair sont nulles pour $u = 0$; on a donc

$$f(x) = \sum_{0}^{n} a_k x^k + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

pour tout n, c'est-à-dire $f \in C$ au point $x = 0$.

2°) Vu (2.1) et 2.2), I est une semi-variété.

3°) Soit $f \in C$ dans un voisinage de A dans R^p. Alors la restriction de f à A est dans $C(A)$. En effet : $f(x(u)) \in C(U)$ pour tout $x(u) \in \mathcal{F}$.

Remarque. Soit $E(A)$ la restriction de $C(R^p)$ à A. On a vu que $E(A) \subset C(A)$ et que $E(A) = C(A)$ si $A : x \geqslant 0$, (plus généralement si A est un intervalle fermé). Si $A = I$ et $m < n$, on peut démontrer que $C(A) = E(A)$ est l'espace de toutes les fonctions de classe C dans le cône fermé (2.4). On ignore si $E(A) = C(A)$ pour toute semivariété A. En tout cas, $E(A)$ est un objet peu maniable (il faut employer des théorèmes de prolongement de type Whitney).

La topologie sur $C(A)$ est la moins fine telle que : $f(x) \longrightarrow f(x(u))$ applique continûment $C(A)$ dans $C(U)$ pour tout $x(u) \in \mathcal{F}$, $C(U)$ ayant la topologie de la convergence uniforme sur des compacts. Topologie sur $C_0(A)$: la limite inductive.

Nous allons voir que $C(I)$ est un Fréchet; on ignore si $C(A)$ l'est dans le cas général ($\mathcal{F}$ est une famille nombreuse !)

Remarque.- Quand Γ opère sur une semivariété A la notion de distribution invariante a un sens : en effet, $C(A)$ a un dual.

4. Fonctions invariantes. Soit Γ le groupe orthogonal. Soit $T = R^{\ell}$ et soit $P(T \times X)$ l'espace des fonctions $f(t,x)$ $C(T \times X)$ qui sont invariantes en x, $f(t, x) = f(t,x)$. Topologie induite. Par le lemme 2.1,

$$P \ni f(t,x) = F(t, \xi, \sigma)$$

définit une fonction F sur $T \times I$.

Lemme 4.1.- $f \to F$ est un isomorphisme $P(T \times X) \to C(T \times I)$ et un isomorphisme $P_0(T \times X) \longrightarrow C_0(T \times I)$.

Preuve esquissée.- Si $n = 1$, $I = I^{n,m}$ s'identifie avec R^m et le lemme est banal. Récurrence par rapport à n. Soit d'abord t_0, ξ_0, σ_0, un point de $T \times I$ où rang $\xi_0 > 0$ et soit $t(u)$, $\xi(u)$, $\sigma(u)$ une paramétrisation (3.2) d'un voisinage J de t_o, ξ_o, σ_o, assez petit pour qu'on y ait, par exemple, $\xi_{11} > 0$. Il s'agira de démontrer que si $f(t,x) \in P$ et si

$$F(t, \xi, \sigma) = f(t,x)$$

est la fonction correspondante sur I, alors $F(t(u), \xi(u), \sigma(u)) \in C$. Or, comme $\xi_{11} > 0$, chaque ξ, σ dans $t, \xi, \sigma \in J$ est l'image d'un $x \in X$ tel que

$$x_1 = (\sqrt{\xi_{11}}, 0, \dots 0)$$

$$x_2 = (\frac{\xi_{12}}{\sqrt{\xi_{11}}}, x_2')$$

$$\dots\dots$$

$$x_m = (\frac{\xi_{1m}}{\sqrt{\xi_{11}}}, x_m')$$

où $x_k' = a$ les coordonnées de x_k sauf la première. Par conséquent

$$f(t,x) = g(t, \sqrt{\xi_{11}}, \frac{\xi_{12}}{\sqrt{\xi_{11}}}, \dots, \frac{\xi_{1n}}{\sqrt{\xi_{11}}}, x')$$

où $g \in C^\infty$ est invariant par rapport au sous groupe de Γ qui laisse fixe la première coordonnée. Les invariants de x' sont

$$\xi'_{jk} = \xi_{jk} - \frac{\xi_{1j}\,\xi_{1k}}{\xi_{11}}$$

$$\sigma_\beta' = \sigma_{1\beta} / \sqrt{\xi_{11}}.$$

Par conséquent, en appliquant le lemme à $T' \times X'$ où $T' = T \times R^n$ on voit que

$$F(t(u), \xi(u), \sigma(u)) \in C.$$

Un raisonnement plus délicat s'applique si rang $\xi_0 = 0$ (Il emploie ceci : un polynome invariant de x est un polynome en ξ, σ, résultat classique dans la théorie des invariants). La partie topologique du lemme s'obtient sans difficulté.

5. <u>Distributions invariantes</u>. Soit

$$(Mf)(\xi,\sigma) = \int f(\gamma x)d\gamma$$

où $f \in C(X)$. Selon le lemme 4.1, M est une application continue $C(X) \to C(I)$ (et $C_0(X) \to C_0(I)$. M est aussi surjective : soit $g \in C(I)$; alors

$$f(x) = g(\xi(x), \sigma(x)) \in C(X)$$

et $Mf = g$ (si $\int d\gamma = 1$). Soit $P'(X)$ l'espace des distributions invariantes sur X et $C'(I)$ le dual de $C_0(I)$.

Théorème. M' est un isomorphisme

$$M' : C'(I) \to P'(X).$$

Preuve : Vu que M est surjectif, il suffit de prouver que M' est surjectif : soit $g \in P'$ et $f \in C_0(X)$. Alors $\langle g,f\rangle = \int g(x)\, f(x)dx = \int g(x)\, f(\gamma x)dx = \langle g,Nf\rangle$ où $(Nf)(x) = \int f(\gamma x)d\gamma$. Or, $Nf \in P_0$ et $Nf(x) = F(\xi,\sigma) = Mf(\xi,\sigma)$ est un isomorphisme $P_0 \to C_0(I)$. Par conséquent, il existe $h \in C'(I)$ tel que

$$\langle g,f\rangle = \langle h,Mf\rangle$$

pour tout $f \in C_0(X)$, c'est-à-dire $g = M'h$.

Remarque. On peut donc identifier les distributions invariantes sur X aux distributions sur I, à condition de définir une distribution sur I comme étant une fonctionnelle linéaire continue sur $C_0(I)$.

6. <u>Groupe de Lorentz</u>. Envisageons d'abord le cône du futur de l'espace de Lorents :

$$X : xx = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \geqslant 0, \quad x_1 \geqslant 0,$$

et le groupe de Lorentz restreint : Γ . Alors

(1) $$(Mf)(\rho) = \int_X \delta(\rho - xx)\, f(x)dx, \qquad \rho \geqslant 0$$

applique $C_o(X)$ sur un espace H qui consiste en toutes les fonctions $g(\rho)$ à support compact, de classe C pour $\rho > 0$, ayant près de $\rho = 0$ un développement asymptotique de la forme

$$g(\rho) \sim b_o + \sum_1^{\infty} (a_j \rho^j \log \frac{1}{\rho} + b_j \rho^j) .$$

L'application adjointe $M' : H' \to C'(X)$ a pour image l'espace P' des distributions invariantes sur X. (Méthée, thèse ; Gårding et Roos, cours de Varenna).

Les coefficients de $\rho^j \log \frac{1}{\rho}$ du développement de $(Mf)(\rho)$ ont la forme

$$\int Q(\Delta)\, \delta\, (x)\; f(x)dx$$

où Q est un polynome et Δ l'opérateur des ondes. On trouve une étude analogue pour le groupe orthogonal de signature arbitraire dans un article de Tengstrand (Math. Scand. 1960), complétant un article de de Rham.

Remarque.- Γ Etant non compact, on ne peut plus prendre la moyenne sur Γ. Or, pour le groupe orthogonal on a, à des facteurs positifs près,

$$r^{\frac{2-n}{2}} \int \delta(r - xx)\, f(x)dx = \int f(\gamma x')d\gamma$$

où $r = x'x'$; on a de même

$$(2) \qquad (rs - t^2)^{\frac{3-n}{2}} \int \delta\,(r - xx)\, \delta\,(s - yy)\, \delta\,(t-xy) f(x,y)dxdy = \int f(\gamma x', \gamma y')d\gamma$$

où $x'x' = r$, $y'y' = s$, $x'y' = t$ et $x, y, \ldots\ R^n$, $n\ \ 2$, et des formules analogues pour plus que deux vecteurs.

Maintenant prenons pour X le produit de deux cônes du futur, les points de X étant des couples de vecteurs x et y.

Essayons de remplacer (1) par l'analogue de (2) pour l'espace de Lorentz ; définissons M par la formule

$$(Mf)(\rho, \sigma, \tau) = (\tau^2 - \rho\sigma)^{-1/2} \int \delta\,(\rho - xx)\; \delta\,(\sigma - yy)\, \delta(\tau - xy) f(x,y)dxdy$$

où

$$xy = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4$$

et ρ, σ, τ varient dans le cône

$$\mathrm{I} : \quad \rho \geqslant 0, \quad \sigma \geqslant 0, \; \tau^2 \geqslant \rho\sigma .$$

Les éléments de Γ étant unimodulaires M est une distribution invariante fonction de ρ, σ, τ. Les trois variétés $xx = \rho$, $yy = \sigma$ et $xy = \tau$ se coupent régulièrement si $\tau^2 > \rho\sigma$; en ces points Mf est une fonction de classe C. Une étude complète des Mf reste à faire mais on peut dire ceci : introduisons des variables nouvelles définies par un rayon

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\rho+\sigma)^2 + 4(\tau^2-\rho\sigma)} + \rho + \sigma\right)$$

qui est positif sauf si $\rho = \sigma = \tau = 0$, et deux variables angulaires θ et α telles que

$$0 \leq \alpha \leq \min\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

définies par

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{(\mu+\sigma)/(\mu+\sigma)} = \sqrt{(\lambda-\rho)(\lambda-\sigma)}$$
$$\mu = \lambda \operatorname{tg}^2\alpha$$

où

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\rho+\sigma)^2 + 4(\tau^2-\rho\sigma)} + \rho + \sigma\right).$$

Alors, $M^*f(\lambda, \theta, \alpha) = (Mf)(\rho, \sigma, \tau)$ est fonction régulière pour $\lambda > 0$ et pour $\lambda = 0$ on a un développement asymptotique

$$(3) \quad M^*f \sim (N_0f)(\theta,\alpha) + \sum_1^{\infty}\left[(N_jf)(\theta,\alpha) + \log\frac{1}{\lambda}(L_jf)(\theta,\alpha)\right]\lambda^j$$

où les coefficients sont des fonctions régulières de θ et α. Pour θ et α

fixées, ils sont évidemment des distributions invariantes. Le support d'un N_j est la sous-variété de X où

$$xx = yy = xy = 0 ,$$

c'est-à-dire où x et y sont des vecteurs de longueur nulle proportionnels. Le support d'un L_j est le point $x = y = 0$.

En faisant varier $f \in C_o(X)$ on obtient un espace $H_o = M^*C_o(X)$ qui consiste en toutes les fonctions en λ, θ, α de classe C pour $\lambda > 0$, nulles pour λ grand, qui pour $\lambda = 0$ ont un développement (3) où les coefficients sont des fonctions régulières en θ, α ; ils ne sont pas arbitraires, il reste à les étudier. De toute façon si l'on munit H_o de la topologie la moins fine rendant $f \longrightarrow M^*f$ continu, on peut affirmer :

Théorème. Toute distribution invariante sur X s'écrit sous la forme $\langle h, M^*f \rangle$ où h appartient au dual H' de H_o.

Principales étapes de la preuve.- Il est évident que $\langle h, M^*f \rangle = \langle g,f \rangle$ donne une distribution invariante g. Réciproquement, soit $g(x,y) \in C'(X)$ invariant. Alors, elle est a fortiori invariante pour le sous-groupe de Γ qui laisse x_1 fixe. Par conséquent, vu un résultat précédent,

$$g(x,y) = g^*(x_1, y_1, x_2x_2 + \dots, y_2y_2 + \dots, x_2y_2 + \dots)$$

où $g^*(x_1, y_1, r, s, t)$ est une distribution sur le produit de R^2 par la semivariété $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $rs \geqslant t^2$. En faisant un changement de variables : $\rho = x_1^2 - r$, $\sigma = y_1^2 - s$, $\tau = x_1y_1 - t$ de classe C on voit donc que

$$g(x,y) = G(x_1, y_1, xx, yy, xy)$$

où G est une distribution sur la semivariété

$$(4) \qquad (x_1^2 - \rho)(y_1^2 - \sigma) \geqslant (x_1y_1 - \tau)^2 , \ \tau^2 \geqslant \rho\sigma .$$

En utilisant les transformations infinitésimales de Γ^{-1} on peut démontrer que l'invariance de g par rapport à Γ^{1} équivaut aux équations suivantes :

(5)
$$\left((x_1^2 - \rho)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 y_1 - \tau)\frac{\partial}{\partial y_1}\right) G = 0$$
$$\left((x_1 y_1 - \tau)\frac{\partial}{\partial x_1} + (y_1^2 - \sigma)\frac{\partial}{\partial y_1}\right) G = 0$$

pour G. En un point où l'on a la première inégalité (4) avec $>$, ces équations disent que G ne dépend pas de x_1 et de y_1. On peut étendre ce résultat à tous les points où $\rho + \sigma + \tau > 0$. Une étude approfondie de (5) permet de démontrer que tout g invariant à support $xx = yy = xy = 0$ s'écrit sous la forme donnée par le théorème où le support de h est contenu dans $\lambda = 0$, c'est-à-dire (h, M*f) est une somme finie

$$\sum \langle A_j, N_j f \rangle + \sum \langle B_j, L_j f \rangle \quad ,$$

les A_j et B_j étant des distributions en θ et α.

7. Anatomie des distributions invariantes. Le numéro 6 montre que si les orbites de X sous l'action de Γ^{1} sont compliquées, on peut avoir une situation compliquée. D'autre part pour le groupe orthogonal les orbites sont compliquées, mais la situation est simple. En utilisant les transformations infinitésimales de Γ^{1} on peut se placer dans la situation suivante dans une variété X : étant données un certain nombre d'opérations différentielles du premier ordre, $Z_1, \ldots, Z_\ell$ qui forment un système complet (le crochet $[Z_j, Z_k]$ est combinaison linéaire des Z) on cherche les distributions f(x) qui satisfont à $Z_1 f = \ldots = Z_\ell f = 0$. Vu le théorème de Frobenius, ce problème est simple au voisinage d'un point où la dimension du module engendré par les Z est constante. Pour les autres points on n'a aucun résultat général.