Daniel Sternheimer

Propriété multiplicative de l'indice analytique. Opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu. Produits tensoriels

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 22, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A7_0>

PROPRIÉTÉ MULTIPLICATIVE DE L'INDICE ANALYTIQUE. OPÉRATEURS DE CALDERON-ZYGMUND À SYMBOLE CONTINU. PRODUITS TENSORIELS

par Daniel STERNHEIMER

Introduction.

Dans l'exposé n° 14, on a vu que l'indice analytique i_a est une fonction additive sur $K(B(X) , S(X))$. Le but de cet exposé est de montrer une propriété multiplicative, à savoir que si

$$d_\nu \in K(B(X_\nu) , S(X_\nu)) \quad (\nu = 1 , 2) ,$$

en notant encore $d_1 \otimes d_2$ l'image canonique de cet élément de

$$K(B(X_1) , S(X_1)) \otimes K(B(X_2) , S(X_2))$$

dans $K(B(X) , S(X))$, où $X = X_1 \times X_2$, on a :

$$i_a(d_1 \otimes d_2) = i_a(d_1)\, i_a(d_2) . \tag{1}$$

On a vu (exposé n° 15) qu'en posant

$$\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E}_1 \otimes \underset{\sim}{E}_2 \oplus \underset{\sim}{F}_1 \otimes \underset{\sim}{F}_2 , \qquad \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_1 \otimes \underset{\sim}{E}_2 \oplus \underset{\sim}{E}_1 \otimes \underset{\sim}{F}_2 ,$$

et

$$\sigma = \sigma_1 \# \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \otimes I_{\underset{\sim}{E}_2} & - I_{\underset{\sim}{F}_1} \otimes \sigma_2^* \\ I_{\underset{\sim}{E}_1} \otimes \sigma_2 & \sigma_1^* \otimes I_{\underset{\sim}{F}_2} \end{pmatrix}$$

on pouvait représenter $d_1 \otimes d_2$ dans $K(B(X) , S(X))$ par $d(\underset{\sim}{E}_B , \underset{\sim}{F}_B , \sigma)$.

On sait que $i_a(d_\nu) = i_a(\sigma_\nu) = i_a(D_\nu)$ où D_ν est un opérateur de Calderon-Zygmund ρ-elliptique, de ρ-symbole σ_ν (quel que soit son choix dans le "ρ-relèvement" de σ_ν, et quel que soit le choix de ρ, degré d'homogénéité de σ_ν sur $T^*_\cdot(X_\nu)$). Afin de démontrer (1), il nous faut, pour calculer l'indice analytique en revenant à sa définition, "relever" $\sigma = \sigma_1 \# \sigma_2$ en un opérateur D, dont on calculera l'indice. Or $\sigma_\rho(D_\nu)$ est C^∞ en dehors de la section nulle de $T^*(X_\nu)$, donc $\sigma_\rho(D_\nu) \otimes I_{\underset{\sim}{E}_{3-\nu}}$ est C^∞ au-dessus de $T^*(X_\nu \times X_{3-\nu}) - T^*(X_{3-\nu})$, mais ne le sera au-dessus de $\dot{T}^*(X)$ que si σ_ν l'est au-dessus de $T^*(X_\nu)$ tout entier. Cependant, si $\rho > 0$ ou si σ_ν est de la forme $\alpha(x_\nu) I_{\underset{\sim}{E}_\nu}$, on peut prolonger σ_ν à tout $B(X_\nu)$ en une section continue, et alors $\sigma_\nu \otimes I_{\underset{\sim}{E}_{3-\nu}}$ sera continu au-dessus de $B(X)$. Comme i_a est indépendant de ρ (exposé n° 14), on pourra trouver D sous la forme $D_1 \# D_2$ (même matrice), pourvu que l'on puisse exhiber un opérateur ayant un symbole continu donné par le produit tensoriel de deux symboles C^∞ , et qu'on ait une théorie des opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu.

1. Opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu.

1.1 Définitions. - Soient X une variété C^∞ compacte de dimension n , E , F , ... des fibrés C^∞ à fibre vectorielle complexe (de dimension finie) sur X ; on note par $\underset{\sim}{E}$, $\underset{\sim}{F}$, ... leurs images réciproques au-dessus de $T^*(X)$. Les espaces $H^s(X ; E)$ sont hilbertisables. On hilbertise $H^o(X ; E)$ par le choix d'une mesure (C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue) sur X et d'une structure hermitienne sur E . On hilbertise alors $H^s(X ; E)$ par transport de structure, à l'aide des isomorphismes

$$G_s(X ; E) = H^s(X ; E) \to H^o(X ; E)$$

construits à l'exposé n° 13 (on pourrait aussi hilbertiser directement $H^s(X ; E)$ à l'aide d'une partition de l'unité $\sum \alpha_i^2 = 1$ subordonnée à un recouvrement fini de X en ouverts de coordonnées et de trivialité $\{\mathcal{U}_i\}$ par la relation

$$(T_1 \mid T_2)_s = \sum_i (\widetilde{\alpha_i T_1} \mid \widetilde{\alpha_i T_2})_s$$

où le $\sim$ désigne l'image sur $\underset{\sim}{R}^n$; mais ceci est moins commode pour la suite, et est d'ailleurs un cas particulier de ce qui précède). On supposera même X munie d'une métrique riemannienne C^∞ , ce qui permet de construire $B(X)$, $S(X)$. On peut alors identifier E avec $\overline{E}^* \otimes_X \Omega$ où

$$\Omega = (\overset{n}{\bigwedge} T^*(X))_t \approx \underset{\sim}{C} \times X$$

(t = tordu, par les deux orientations possibles de l'espace). E_B et E_S désigneront les images réciproques de E au-dessus de $B(X)$ et $S(X)$ respectivement.

On notera $\Gamma_\infty(X ; E , F ; \rho)$ au lieu de $\Gamma(X ; E , F ; \rho)$ comme précédemment, pour les opérateurs de Calderon-Zygmund ("op. de C.-Zyg." ou "op. C^∞.-Z.") à symbole dans $\mathcal{E}(T^*_{\bullet}(X) \; ; \mathcal{L}(\underset{\sim}{E} \; , \underset{\sim}{F}) \; ; \rho)$.

DÉFINITION 1. - $\Gamma_o(X \; ; E \; , F \; ; s \; , t) = \overline{\Gamma_\infty(X \; ; E \; , F \; ; s - t)}$, l'adhérence étant prise dans $\mathcal{L}(H^s(X \; ; E) \; , H^t(X \; ; F))$, muni de sa topologie d'espace banachisable (ou de Banach).

Cette définition ne dépend pas des structures choisies sur X , E , F . On le notera parfois $\Gamma_o^{s,t}(X \; ; E \; , F)$, ou $\Gamma_o^{s,t}(E \; , F)$, ou encore $\Gamma_o^{s,t}$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. C'est un sous-espace fermé, celui des opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu ("op. C^o.-Z.") ; cette dénomination sera justifiée plus loin.

DÉFINITION 2. - $K(X \; ; E \; , F \; ; s \; , t)$ = **espace des opérateurs compacts** de $\mathcal{L}(H^s(X \; ; E) \; , H^t(X \; ; F))$.

On notera parfois ce sous-espace fermé $K^{s,t}(X \; ; E \; , F)$, ou $K^{s,t}(E \; , F)$, ou $K^{s,t}$.

<u>Remarque</u>. - L'espace $\bigcap_s \mathcal{L}(H^s(X \; ; E) \; , H^{s-\rho}(X \; ; F))$ n'étant pas (muni de la topologie de la limite projective) banachisable, il y aurait de grosses difficultés à utiliser la fermeture $\Gamma_o(X \; ; E \; , F \; ; \rho)$ de $\Gamma_\infty(X \; ; E \; , F \; ; \rho)$ dans cet espace, ainsi que

$$K(X \; ; E \; , F \; ; \rho) = \bigcap_s K(X \; ; E \; , F \; , s \; , s - \rho) \supset \mathfrak{a}(X \; ; E \; , F \; ; \rho) \; .$$

PROPOSITION 1. - $K(X \; ; E \; , F \; ; s \; , t) \subset \Gamma_o(X \; ; E \; , F \; ; s \; , t)$.

En effet, $\mathfrak{a}(X \; ; E \; , F \; ; s - t) \subset K(X \; ; E \; , F \; ; s \; , t)$, car X est compacte. D'autre part, si $k \in K^{s,t}$, on peut l'approcher (dans $\mathcal{L}(H^s \; , H^t)$) par des opérateurs **de** rang fini, et chaque opérateur de rang fini R est approchable par des améliorants (à $\varepsilon\|R\|$ près), en approchant une base orthonormée de $\operatorname{Im} R$, de dimension ℓ , dans H^t à ε/ℓ près, par des éléments de $\mathcal{D}$, de **norme** 1 **dans** H^t . Donc

$$\overline{\mathfrak{a}(X \; ; E \; , F \; ; s - t)} \supset K(X \; ; E \; , F \; ; s \; , t)$$

(l'adhérence est prise dans $\mathcal{L}(H^s \; , H^t)$).

<u>Remarque</u>. - Cette dernière relation est encore valable dans $\underset{\sim}{R}^n$, où $\Gamma_o^{s,t}$ est engendré (comme sous-espace fermé de $\mathcal{L}(H^s \; , H^t)$) par les $(\alpha)(\beta)$ et les améliorants (d'ordre $s - t$, degré d'homogénéité des β). Dans le cas de X variété compacte, $\Gamma_o^{s,t}$ est engendré par les $(\alpha)(\beta)_{loc}$ (β "locaux") et $K^{s,t}$ (ou $\mathfrak{a}(X \; ; E \; , F \; ; s - t)$).

1.2 Propriétés des opérateurs C^0.-Z.

1° Composition. - Soient $A \in \Gamma_0(X ; E , G ; s , u)$ et $B \in \Gamma_0(X ; G , F ; u , t)$. Alors $B \circ A$ opère $H^s(X ; E) \to H^t(X ; F)$ et $B \circ A \in \Gamma_0(X ; E , F ; s , t)$. On le déduit de cette propriété pour les op. C^∞.-Z. par passage à la limite.

2° Transposition. Adjonction. - Soit $A \in \Gamma_0^{s,t}(E , F)$. Alors

$$ {}^tA \in \Gamma_0^{-t,-s}(F^* \otimes_X \Omega , E^* \otimes_X \Omega) $$

et

$$ A^* \in \Gamma_0^{-t,-s}(\overline{F}^* \otimes_X \Omega , \overline{E}^* \otimes_X \Omega) $$

(espace que l'on peut identifier à $\Gamma_0^{-t,-s}(F , E)$). On obtient ce résultat par passage à la limite (les applications $A \rightsquigarrow {}^tA$ et $A \rightsquigarrow A^*$ étant continues).

3° Adjonction hilbertienne. - Si $A \in \Gamma_0^{s,t}(E , F)$, on peut définir son adjoint hilbertien $A^+ \in \mathcal{L}(H^t(F) , H^s(E))$ à l'aide du produit scalaire. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^t(F) \arrow[r, "\approx", "G_t(F)"'] \arrow[d, "A^+"'] & H^0(F) \arrow[r, "\approx", "(\omega)_F"'] & H^0(\overline{F}^* \otimes_X \Omega) \arrow[r, "G_t(F)^*"'] & H^{-t}(\overline{F}^* \otimes_X \Omega) \arrow[d, "A^*"] \\
H^s(E) & H^0(E) \arrow[l, "G_{-s}(E)", "\approx"'] & H^0(\overline{E}^* \otimes_X \Omega) \arrow[l, "(\omega)_E^{-1}", "\approx"'] & H^{-s}(\overline{E}^* \otimes_X \Omega) \arrow[l, "G_{-s}(E)^*", "\approx"']
\end{tikzcd}$$

où $(\omega)_E$ et $(\omega)_E^{-1}$ sont (respectivement) définies par $f \rightsquigarrow f\omega$ et $f\omega \rightsquigarrow f$ ($f \in H^0(X ; E) = H^0(E)$), ω étant la C^∞-forme partout différente de zéro, de degré maximum, à l'aide de laquelle on définit la structure hilbertienne de $H^0(E)$, la dualité et l'antidualité entre $H^0(E)$, et $H^0(E^* \otimes_X \Omega)$ et $H^0(\overline{E}^* \otimes_X \Omega)$ (respectivement), donc aussi entre H^s et H^{-s} ; on a

$$ (g \mid f)_0 \ \text{(produit scalaire)} = (g , f\omega) \ \text{(antidualité)} = \int_X \langle g , \overline{f} \rangle \, \omega . $$

Les $G_{-s}(E)$ (et $G_t(F)$) étant ceux qui définissent les structures hilbertiennes sur les H^s, le diagramme ci-dessus est commutatif. Or les $G_{-s}(E)$, ... sont des op. C^∞.-Z., ainsi que les $(\omega)_E^{-1}$ et $(\omega)_F$, et on vient de voir que

$$ A^* \in \Gamma_0(X ; \overline{F}^* \otimes_X \Omega , \overline{E}^* \otimes_X \Omega ; -t , -s) . $$

D'après la propriété de composition des op. C^0.-Z., on a $A^+ \in \Gamma_0(X ; F , E ; t , s)$. Remarquons que si $A = (\alpha)$, $A^+ = (\overline{\alpha})$, et de même pour les "$(\beta)$ locaux".

1.3 <u>Le</u> $(0\ ,\ 0)$-<u>symbole pour</u> $\Gamma_o(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ 0\ ,\ 0)$. - On le définira à l'aide du :

LEMME. - Le 0-symbole σ_o est une application continue de norme $\leqslant 1$:

$$\mathcal{L}(H^o(E)\ ,\ H^o(F)) \supset \Gamma_\infty(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ 0) \to \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\ ,\ F))\ .$$

$\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\ ,\ F))$ désigne l'espace des sections continues du fibré $\mathcal{L}_S(E\ ,\ F)$, image réciproque de $\mathcal{L}(E\ ,\ F)$ par l'application $S(X) \to X$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Soit en effet $A \in \Gamma_\infty(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ 0)$. On sait (exposé n° 13) que

$$\forall\ \ (x\ ,\ \xi) \in T^*_\bullet(X)\ ,\quad \exists\ \ \{\Psi_j\}_{j\in N}\ ,\quad \Psi_j \in H^o(X\ ;\ E)\ ,\quad 0 \leqslant c < \|\Psi_j\|_o \leqslant C\ ,$$

telle que $\sigma_o(A)(x\ ,\ \xi)\Psi_j - A\Psi_j \to 0$ fortement dans $H^o(X\ ;\ F)$ pour $j \to \infty$, i. e.

$$\|\Psi_j\|_o(\|\sigma_o(A)(x\ ,\ \xi)\| - \varepsilon_j) \leqslant \|A\Psi_j\|_o \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(H^o,H^o)}\ \|\Psi_j\|_o\ ,$$

la norme de $\sigma_o(A)(x\ ,\ \xi)$ étant prise dans $(\mathcal{L}_S(E\ ,\ F))_{(x,\xi)}$ (norme de matrice), où $\varepsilon_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Donc

$$\|\sigma_o(A)(x\ ,\ \xi)\| \leqslant \|A\|_o\ ,\quad \forall\ \ (x\ ,\ \xi) \in T^*_\bullet(X)\ .$$

Donc $\|\sigma_o(A)\| \leqslant \|A\|_o$, la norme du 1er membre étant prise dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\ ,\ F))$; c'est

$$\max_{(x;\,\xi)\in S(X)} \|\sigma_o(A)(x\ ,\ \xi)\|\ ;$$

la norme du 2e membre est prise dans $\mathcal{L}(H^o(E)\ ,\ H^o(F))$.

Ainsi, $\|\sigma_o\| \leqslant 1$ comme opérateur $\mathcal{L}(H^o\ ,\ H^o) \to \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\ ,\ F))$ défini sur $\Gamma_\infty(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ 0)$. On peut donc <u>prolonger par continuité</u> σ_o en une application $\sigma_{o,o}$ de norme $\leqslant 1$ de $\Gamma_o(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ 0\ ,\ 0)$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\ ,\ F))$. Son noyau, qui était $\mathcal{a}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ 0)$, contient donc $K(E\ ,\ F\ ;\ 0\ ,\ 0) = \overline{\mathcal{a}(E\ ,\ F\ ;\ 0)}$. Si $A = \lim A_n$ dans $\mathcal{L}(H^o(E)\ ,\ H^o(F))$, $A_n \in \Gamma_\infty(E\ ,\ F\ ;\ 0)$, on aura donc :

$$\sigma_{o,o}(A) = \lim_{n\to\infty} \sigma_o(A_n)$$

dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\ ,\ F))$.

<u>Propriétés du</u> $(0\ ,\ 0)$-<u>symbole</u>. - Par passage à la limite, on aura pour $\Gamma_o^{o,o}$:

$\sigma_{o,o}({}^tA) = {}^t\check{\sigma}_{o,o}(A)$ (où $^\vee$ indique le changement de ξ en $-\xi$).

$$\sigma_{o,o}(A^*) = \sigma_{o,o}(A)^* \quad \text{et} \quad \sigma_{o,o}(B \circ A) = \sigma_{o,o}(B) \circ \sigma_{o,o}(A)$$

si A et $B \in \Gamma_o^{o,o}$ (les fibrés n'étant pas nécessairement les mêmes).

De plus,

$$\sigma_{o,o}(A^+) = (\sigma_{o,o}(A))^* .$$

En effet, $A^+ = (\omega)_E^{-1} A^*(\omega)_F$, si $A \in \Gamma_o^{o,o}(E\,,\,F)$. Or $(\omega)_F$ est un op. C^o.-Z. de symbole $\omega_\rho = \omega I_{\underset{\sim}{F}}$, et $(\omega)_E^{-1} = (\omega)_E^*$ en est un autre, de symbole

$$\omega^{-1}\, I_{\underset{\sim}{E}^*\otimes\Omega} = \omega^{-1}\, I_{\underset{\sim}{E}} .$$

D'où

$$\sigma_{o,o}(A^+) = \sigma_{o,o}(A^*) = \sigma_{o,o}(A)^* .$$

1.4. PROPOSITION 2. - $\Gamma_o/K(X\,;\,E\,,\,E\,;\,0\,,\,0)$ est isomorphe isométriquement à $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\,,\,E))$ des sections continues de $\mathcal{L}_S(E\,,\,E)$, ainsi qu'à l'algèbre $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\bullet(\underset{\sim}{E}\,,\,\underset{\sim}{E}\,;\,0))$ des sections prolongées en fonctions 0-homogènes à $\mathcal{L}(\underset{\sim}{E}\,,\,\underset{\sim}{E})$ au-dessus de $T^*_\bullet(X)$.

$\Gamma_o(X\,;\,E\,,\,E\,;\,0\,,\,0)$ est une sous-algèbre involutive fermée (l'involution étant définie par l'adjonction hilbertienne) de $\mathcal{L}(H^o(X\,;\,E))$, donc est une C^*-algèbre (cf. par exemple RICKART [1]). $K(X\,;\,E\,,\,E\,;\,0\,,\,0)$ est un idéal bilatère fermé de cette C^*-algèbre, donc $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ est aussi une C^*-algèbre.

1° Cas E "scalaire" trivial, $E = X \times \underset{\sim}{C}$. - Alors $\mathcal{C}(\mathcal{L}_s(E\,,\,E)) = \mathcal{C}(S(X))$ est une C^*-algèbre commutative, de même que $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$.

Remarquons que $\sigma_{o,o}$ induit une application $\dot{\sigma}_{o,o}$ de norme $\leqslant 1$ de $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_s(E\,,\,E))$ par $\dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A}) = \sigma_{o,o}(A)$ si A est un représentant de $\dot{A} \in \Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$. La norme est $\leqslant 1$, car on a :

$$\|\dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A})\| = \|\sigma_{o,o}(A)\| \leqslant \inf_{A\in\dot{A}} \|A\| = \|\dot{A}\| ,$$

la norme de $\dot{A}$ étant prise dans $\mathcal{L}(H^o)/K^{o,o}$. Ceci vaut dans le cas général.

Ici, nous avons le diagramme (commutatif)

$$\begin{tikzcd} \Gamma_o^{o,o} \arrow[d, "\text{proj}"'] \arrow[dr, "\sigma_{o,o}"] & \\ \Gamma^{o,o}/K^{o,o} \arrow[r, "\dot{\sigma}_{o,o}"] & \mathcal{C}(S(X)) \end{tikzcd}$$

Montrons que $\sigma_{o,o}$ (ou, ce qui revient au même, $\dot{\sigma}_{o,o}$) est bijective.
$\forall\ x \in X$, $(x , \xi) \in S(X)$, l'application $\dot{A} \rightsquigarrow \dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A})(x , \xi)$ est un caractère continu de $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$.

Soit inversement χ un caractère continu quelconque de cette C^*-algèbre. χ est un caractère sur tous les $(\dot{\alpha})$, $\alpha \in \mathcal{S}(X)$, donc il existe un $x \in X$ tel que $\chi((\dot{\alpha})) = \alpha(x)$ ((α) n'est jamais compact). Soit un ouvert de coordonnées autour de x , dans lequel $T^*_{x'}(X)$ (pour tout x' dans cet ouvert) est représenté par (x' , ξ) ; considérons une fonction $\beta(\xi) \in \mathcal{S}(\dot{T}^*(X))$ définie dans un voisinage de x contenu dans l'ouvert de coordonnées considéré ; il lui correspond un op. C^∞.-Z. (β) (c'est un "(β) local"), et χ est un caractère sur les $(\dot{\beta})$ ((β) n'est jamais compact), donc $\exists\ \xi$ tel que $\chi((\dot{\beta})) = \beta(\xi)$, avec $(x , \xi) \in S(X)$.

Soient maintenant $A \in \Gamma_o^{o,o}$ quelconque, $\varphi(x')$ une fonction sur X , C^∞ , $\varphi(x) = 1$ (ainsi qu'autour de x), $\varphi(x') = 0$ en dehors d'un voisinage de x inclus dans l'ouvert de coordonnées. On peut écrire :

$$A = (\varphi)\ A\ (\varphi) + (A - (\varphi)\ A\ (\varphi)) .$$

Donc

$$\sigma_{o,o}(A) = \varphi\ \sigma_{o,o}(A)\ \varphi + \sigma_{o,o}(A - (\varphi)\ A\ (\varphi)) .$$

D'où, pour le $(x , \xi) \in S(X)$ trouvé :

$$\dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A})(x , \xi) = \sigma_{o,o}((\varphi)\ A\ (\varphi))(x , \xi) .$$

Notons $\dot{\sigma}_{o,o}(x , \xi)$, l'application $\dot{A} \rightsquigarrow \dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A})(x , \xi)$.

$\chi - \dot{\sigma}_{o,o}(x , \xi)$ coïncide avec 0 sur les $(\dot{\alpha})$, sur les $(\dot{\beta})$ locaux (autour de x), et sur $\dot{K}^{o,o} = \{0\}$, donc l'application est nulle (<u>on peut se localiser autour de</u> x , d'après le calcul qui précède, et alors $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ est engendré par les $\widehat{(\alpha)(\beta)}_{loc} = (\dot{\alpha})(\dot{\beta})_{loc}$). Tous les caractères de $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ sont donc de la forme $\dot{\sigma}_{o,o}(x , \xi)$.

On a ainsi un homomorphisme de norme $\leqslant 1$:

$$\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o} \to \mathcal{C}(S(X)) , \qquad S(X) \text{ espace des caractères.}$$

D'après le théorème de Gel'fand (cf. [1]), c'est un isomorphisme (d'où la bijectivité), et une isométrie, car $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ est muni de sa norme de C^*-algèbre (commutative).

2° <u>Cas</u> E <u>trivial</u>, $E = X \times \underset{\sim}{C}^m$. - On passe du cas scalaire au cas considéré en tensorisant les algèbres en question par $\mathcal{L}(\underset{\sim}{C}^m, \underset{\sim}{C}^m)$, ce qui conserve noyau et image ; $\dot{\sigma}_{o,o}$ est donc un isomorphisme de C^*-algèbre , <u>donc une isométrie</u>.

3° <u>Cas</u> E <u>non trivial.</u> - Soit une partition de l'unité (finie)

$$\sum \alpha_i = 1 , \qquad \alpha_i \in \mathcal{D}(X) ,$$

subordonnée à un recouvrement de X par des ouverts $\{\mathcal{U}_i\}$ tels que $\forall$ i , j tels que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_j$ soit contenu dans un ouvert de coordonnées et de trivialité (il est clair que de tels ouverts existent). On a :

$$A = \sum_{i,j} (\alpha_i)\ A\ (\alpha_j) , \qquad \forall\ A \in \Gamma_o^{o,o}(X ; E , E) ;$$

on "localise" ainsi A .

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathcal{L}_s(E , E))$ quelconque. On a $f = \sum_i \alpha_i f$. Au-dessus de $\mathcal{U}_i$, E est trivial, et l'on est dans un ouvert de coordonnées ; on peut donc trouver un (et un seul) $\dot{A}_i \in \Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$, tel que $\dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A}_i) = \alpha_i f$, d'où la surjectivité du (0 , 0)-symbole , car on peut relever f en $\sum_i \dot{A}_i \in \Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$. Si de plus f = 0 , comme $\dot{\sigma}_{o,o}$ est un isomorphisme dans le cas trivial, tout $((\alpha_i)\ A\ (\alpha_j))^{\bullet}$ est nul, donc $\dot{A} = 0$.

Donc $\dot{\sigma}_{o,o}$ est un isomorphisme (algébrique) de $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{L}_s(E , E))$, de norme $\leqslant 1$; c'est donc aussi un isomorphisme topologique (théorème de Banach) et une isométrie, puisqu'il existe une seule norme de C^*-algèbre .

1.5. <u>Le</u> (s , t)-<u>symbole pour</u> $\Gamma_o(X ; E , F ; s , t)$. - On a les isomorphismes topologiques $G_s(X ; E) \in \Gamma_\infty(X ; E , E , s)$, de C^∞-symboles $|\xi|^s I_{\underset{\sim}{E}_x}$ en $(x , \xi) \in T^*(X)$ par exemple ; de plus, on a défini

$$(f \mid g)_s = (G_s f \mid G_s g)_o \quad \text{pour} \quad f , g \in H^s(X ; E) \quad (\text{donc } G_s^+ = G_{-s} = G_s^{-1}).$$

On a donc

$$\Gamma_o^{s,t} = G_{-t}(F) \circ \Gamma_o^{o,o}(E , F) \circ G_s(E) , \qquad K^{s,t} = G_{-t}(F) \circ K^{o,o}(E , F) \circ G_s(F) ,$$

$$\Gamma_o^{o,o} = G_t(F) \circ \Gamma_o^{s,t}(E , F) \circ G_{-s}(E) , \qquad K^{o,o} = G_t(F) \circ K^{s,t}(E , F) \circ G_{-s}(E) ,$$

et de même

$$\Gamma_\infty^{s-t}(E , F) = G_{-t}(F) \circ \Gamma_\infty^{o}(E , F) \circ G_s(E)$$

$$\Gamma_\infty^{o}(E , F) = G_t(F) \circ \Gamma_\infty^{o}(E , F) \circ G_{-s}(E)$$

car $G_\rho(X\,;E)$ est un isomorphisme $H^s(X\,;E) \to H^{s-\rho}(X\,;E)$, $\forall\ s \in \underset{\sim}{R}$.

DÉFINITION 3. - Soit $A \in \Gamma_o(X\,;E\,,F\,;s\,,t)$. On définit son (s , t)-symbole

$$\sigma_{s,t}(A) = \sigma_{o,o}(G_t(F)\ A\ G_{-s}(E)) .$$

Si $A = \lim A_n$ dans $\mathcal{L}(H^s(E)\,,H^t(F))$, $A_n \in \Gamma_\infty(X\,;E\,,F\,;s-t)$, on aura

$$\sigma_{o,o}(G_t(F)\ A\ G_{-s}(E)) = \lim_{n\to\infty} \sigma_o(G_t\ A_n\ G_{-s}) \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\,,F))$$

$$= \lim \sigma_{s-t}(A_n) \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\,,F)) ,$$

On voit ainsi que $\sigma_{s,t}$ peut s'obtenir aussi par prolongement par continuité de σ_{s-t} (défini pour Γ_∞^{s-t}) à $\Gamma_o^{s,t}$, et coïncide avec σ_{s-t} sur Γ_∞^{s-t} . Il est donc indépendant du choix particulier des G_s .

Les G_s nous donnent une bijection, qui est un isomorphisme d'espaces (de Banach) dans le cas général, et de C^*-algèbres si $E = F$, $s = t$, entre $\Gamma_o(X\,;E\,,F\,;s\,,t)$ et $\Gamma_o(X\,;E\,,F\,;0\,,0)$ ainsi qu'entre $K(X\,;E\,,F\,;s\,,t)$ et $K(X\,;E\,,F\,;0\,,0)$ (par $G_{-t}(F) \circ \square \circ G_s(E)$), donc, par passage au quotient, entre $\Gamma_o^{s,t}/K^{s,t}$ et $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$.

On a ainsi, par composition, un isomorphisme $\dot{\sigma}_{s,t}$ entre $\Gamma_o^{s,t}/K^{s,t}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E\,,F))$, qui coïncide avec $\dot{\sigma}_{s-t}$ sur $\Gamma_\infty^{s-t}/\mathcal{A}(s-t)$, où

$$\mathcal{A}(s-t) = \mathcal{A}(X\,;E\,,F\,;s-t) .$$

Homogénéité du (s , t)-symbole. - Notons $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\bullet(\underset{\sim}{E}\,,\underset{\sim}{F})\,;\rho)$ les sections continues du fibré $\mathcal{L}_S(E\,,F)$ prolongées en fonctions homogènes de degré ρ (en ξ) sur $T^*_\bullet(X)$.

Soit $A \in \Gamma_o(X\,;E\,,F\,;s\,,t)$; $A = \lim A_n$ dans $\mathcal{L}(H^s\,,H^t)$, où $A_n \in \Gamma_\infty^{s-t}$. Alors

$$\sigma_{s,t}(A) \in \mathcal{C}(\mathcal{L}_\bullet(\underset{\sim}{E}\,,\underset{\sim}{F})\,;s-t) ,$$

car $\sigma_{s-t}(A_n) \in \mathcal{E}(\mathcal{L}_\bullet(\underset{\sim}{E}\,,\underset{\sim}{F})\,;s-t)$. Or

$$\mathcal{C}(\mathcal{L}_\bullet(\underset{\sim}{E}\,,\underset{\sim}{F})\,;\rho) \approx \mathcal{C}(\mathcal{L}_\bullet(\underset{\sim}{E}\,,\underset{\sim}{F})\,;\rho') ,$$

l'isomorphisme étant donné, par exemple, par $f(x\,,\xi) \rightsquigarrow |\xi|^{\rho'-\rho} f(x\,,\xi)$.

D'où :

$$\begin{array}{ccccccc}\Gamma_o^{s,t} & \xrightarrow{\text{proj}} & \Gamma_o^{s,t}/K^{s,t} & \xrightarrow{\approx} & \Gamma_o^{o,o}/K^{o,o} & \underset{\approx}{\xrightarrow{\dot\sigma_{o,o}}} & \mathcal{C}(\mathcal{L}_{\bullet}(\underset{\sim}{E}\ ,\ \underset{\sim}{F})\ ;\ 0) \\ & & & \searrow^{\dot\sigma_{s,t}} & & & \downarrow\approx \\ & & & & & & \mathcal{C}(\mathcal{L}_{\bullet}(\underset{\sim}{E}\ ,\ \underset{\sim}{F})\ ;\ s-t)\ ,\end{array}$$

ce diagramme étant commutatif, et $\dot\sigma_{s,t}$ étant un isomorphisme topologique.

Propriétés du $(s\ ,\ t)$-symbole. - On les obtient par passage à la limite :

(a) Si $A \in \Gamma_o(X\ ;\ E\ ,\ G\ ;\ s\ ,\ u)$ et $B \in \Gamma_o(X\ ;\ G\ ,\ F\ ;\ u\ ,\ t)$, on a

$$\sigma_{s,t}(B \circ A) = \sigma_{u,t}(B) \circ \sigma_{s,u}(A)\ .$$

(b) $\sigma_{-t,-s}({}^tA) = {}^{tv}\sigma_{s,t}(A)$ et $\sigma_{-t,-s}(A^*) = \sigma_{s,t}(A)^*$

(c) $\sigma_{t,s}(A^+) \begin{cases} = \sigma_{s;t}(A)^* & \text{sur } S(X) \\ = \sigma_{-2s}(G_{-2s}(E))\ \sigma_{s,t}(A)^*\ \sigma_{2t}(G_{2t}(F)) & \text{sur } T^*_{\bullet}(X)\end{cases}$ (il y a un facteur $|\xi|^{2t-2s}$).

1.6. Égalité des normes.

THÉORÈME 1. - L'application $\dot\sigma_{s,t} = \dfrac{\Gamma_o^{s,t}}{K^{s,t}}(X\ ;\ E\ ,\ F) \to \mathcal{C}(\mathcal{L}_{\bullet}(\underset{\sim}{E}\ ,\ \underset{\sim}{F})\ ;\ s-t)$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach, et de C^*-algèbres, si $E = F$, et $s = t$.

1° $\Gamma_o^{s,s}(X\ ;\ E\ ,\ E)$ est une C^*-algèbre, avec l'adjonction hilbertienne, ainsi que $\Gamma_o^{s,s}/K^{s,s}$ (car $K^{s,s}$ est un idéal bilatère fermé). Or il existe une seule norme de C^*-algèbre, et c'est celle dont est munie $\Gamma_o^{s,s}/K^{s,s} \subset \dfrac{\mathcal{L}(H^s(X\ ;\ E))}{K^{s,s}}$. D'où l'isométrie du $(s\ ,\ s)(E\ ,\ E)$-symbole :

$$\|\dot\sigma_{s,s}(\dot A)\| = \|\dot A\|_{\mathcal{L}(H^s)/K^{s,s}}$$

la norme du premier membre étant calculée dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_s(E\ ,\ E))$ (et ce sera, par définition, celle du terme correspondant dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_{\bullet}(\underset{\sim}{E}\ ,\ \underset{\sim}{E})\ ;\ 0)$).

2° LEMME. - Soit $A \in \Gamma_o^{s,t}(E\ ,\ F)$, $\dot A \in \Gamma_o^{s,t}/K^{s,t}$. Alors

$$\|\dot A\|_{\frac{\mathcal{L}(H^s(E),H^t(F))}{K^{s,t}(E,F)}} = \|\dot{\overline{\sqrt{A^+ A}}}\|_{\frac{\mathcal{L}(H^s(E)}{K^{s,s}}} \quad \text{et} \quad \sigma_{s,s}(\sqrt{A^+ A}) = \sqrt{\sigma_{t,s}(A^+)\ \sigma_{s,t}(A)}$$

En effet, on a

$$A : H^s(X ; E) \to H^t(X ; F) , \qquad A^+ : H^t(X ; F) \to H^s(X ; E) ,$$

d'où

$$\sqrt{A^+ A} : H^s(X ; E) \to H^s(X ; E)$$

(pour f et $g \in H^s(X ; E)$, $(Af \mid Ag)_t = (A^+ A f \mid g)_s = (\sqrt{A^+ A} f \mid \sqrt{A^+ A} g)_s$; cf. RIESZ et NAGY, Analyse fonctionnelle [2]). On en déduit qu'il existe des isométries partielles (isométries sur un sous-espace fermé, 0 sur son orthogonal)

$$\mathcal{U} : H^s(X ; E) \to H^t(X ; F) \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \mathcal{U}^+ : H^t \to H^s$$

telles que $A = \mathcal{U}\sqrt{A^+ A}$ et $\sqrt{A^+ A} = \mathcal{V}A$.

On a

$$\|\dot{\mathcal{U}}\| = \inf_{k \in K^{s,t}} \|\mathcal{U} + k\| \leqslant \|\mathcal{U}\| = 1 ,$$

et de même $\|\dot{\mathcal{V}}\| \leqslant \|\mathcal{V}\| = 1$.

D'où

$$\|\dot{A}\| \leqslant \|\dot{\overline{\sqrt{A^+ A}}}\| \leqslant \|\dot{A}\| , \qquad \text{i. e.} \quad \|\dot{\overline{\sqrt{A^+ A}}}\| = \|\dot{A}\| .$$

De plus, $A^+ A = \sqrt{A^+ A} \circ \sqrt{A^+ A}$, donc

$$\sigma_{s,s}(A^+ A) = (\sigma_{s,s}(\sqrt{A^+ A}))^2$$

(ponctuellement sur X) et

$$\sigma_{s,s}(\sqrt{A^+ A}) = \sqrt{\sigma_{s,s}(A^+ A)} = \sqrt{\sigma_{t,s}(A^+)\ \sigma_{s,t}(A)} ,$$

d'où le lemme.

On en déduit

$$\|\dot{A}\| = \|\dot{\overline{\sqrt{A^+ A}}}\| = \|\sqrt{\sigma_{s,t}(A)^* \ \sigma_{s,t}(A)}\|_{\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E,E))} = \|\sigma_{s,t}(A)\|_{\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E,F))} .$$

$$= \|\sigma_{s,t}(A)\|_{\mathcal{C}(\mathcal{L}_{\cdot}(\underset{\sim}{E},\underset{\sim}{F}) ; s-t)} .$$

D'où le théorème annoncé.

1.7. <u>Opérateurs de Calderon-Zygmund</u> "C^o-<u>elliptiques</u>" .

DÉFINITION 4. - Un opérateur de C^o.-Z. est dit "C^o-elliptiques" si son symbole est inversible dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E , F))$.

THÉORÈME 2. - $A \in \Gamma_o(X ; E , F ; s , t)$ est C^o-elliptique si et seulement si $\exists$ $A' \in \Gamma_o(X ; F , E ; t , s)$ tel que

$$A'A = I_E + C , \qquad C \in K(X ; E , E ; s , s)$$

$$AA' = I_F + D , \qquad D \in K(X ; F , F ; t , t) .$$

La démonstration est analogue au cas des op. C^∞.-Z.-elliptiques (on prend pour A' un relèvement quelconque de $(\sigma_{s,t}(A))^{-1}$).

<u>Remarque</u>. - Il est en général faux qu'un opérateur C^o-elliptique soit hypoelliptique (car C et D sont seulement compacts). Mais on verra plus loin que si $A \in \bigcap_s \Gamma_o^{s,s-\rho}$ et est C^o-elliptique, de même $(s , s - \rho)$-symbole $\forall$ $s \in \underset{\sim}{R}$, on aura $AT \in \mathcal{D}(X ; F)$ $\Longrightarrow$ $T \in \mathcal{D}(X ; E)$ (c'est une propriété d'hypoellipticité globale ; cf. théorème 5).

Il résulte du théorème 2 et de l'exposé n° 12 que tout opérateur C^o-elliptique possède un indice, et même qu'un op. C^o.-Z. possède un indice si et seulement s'il est C^o-elliptique. L'indice en question est calculé comme indice d'un opérateur $H^s(X ; E) \to H^t(X ; F)$; comme on peut ajouter à cet opérateur un opérateur (compact) de $K^{s,t}$ sans changer son indice (exposé n° 12), l'indice ne dépend que du symbole $\sigma_{s,t}$ de l'opérateur (mais attention, si l'on a

$$A \in \Gamma_o^{s,t}(X ; E , F) \cap \Gamma_o^{s',t'}(X ; E , F) , \text{ avec } \sigma_{s,t}(A) \neq \sigma_{s',t'}(A) \text{ sur } S(X) ,$$

ce qui est a priori possible, les indices de $A_s : H^s \to H^t$ et $A_{s'} : H^{s'} \to H^{t'}$ peuvent être différents. Nous ignorons si cette circonstance peut se produire).

THÉORÈME 3. - <u>L'indice analytique (des opérateurs de C.-Z.</u> C^o<u>-elliptiques) est une fonction (additive) sur</u> $K(B(X) , S(X))$.

Même démonstration qu'à l'exposé 14. Il nous faut pour cela savoir que, pour les C^o-symboles , comme pour les C^∞-symboles , deux symboles homotopes donnent le même indice i_a . Dans le cas C^∞ , on le montrait par relèvement θ de symboles homotopes en opérateurs homotopes de H^s dans $H^{s-\rho}$. Pour les C^o-symboles , il n'y a pas de relèvement θ (voir page 22-15). Mais c'est ici encore plus simple. Si un symbole σ' est assez voisin du symbole σ , les opérateurs A_s et A'_s correspondants vérifient

$$\|\dot{A}'_s - \dot{A}_s\| = \max \|\sigma' - \sigma\| \qquad \text{(voir théorème 1)},$$

donc $A'_s - A_s$ est la somme d'un petit opérateur et d'un opérateur compact, donc

A'_s et A_s ont même indice ; alors si un symbole varie continûment dans $C(\mathrm{Iso}_{S(X)}(E , F))$, l'indice reste constant, d'où le résultat cherché.

2. Produit tensoriel de "relèvements canoniques".

Soient donnés deux symboles

$$\sigma_\nu \in \mathcal{S}(X_\nu , T^*_\bullet(X_\nu) ; \mathcal{L}(E_\nu , F_\nu) ; \rho_\nu) \qquad (\nu = 1 , 2) .$$

Si $\rho_\nu > 0$, ou si $\rho_\nu = 0$, σ_ν étant une fonction sur X_ν seul (un "α"), on peut prolonger (par 0 dans le premier cas, par la valeur commune sur les sphères cotangentes dans le second cas) σ_ν à tout $T^*(X_\nu)$, donc en particulier à $B(X_\nu)$, en une section continue, appartenant à $C(\mathcal{L}(\underset{\sim}{E}_\nu , \underset{\sim}{F}_\nu) ; \rho_\nu))$.

On a alors

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 \in C(\mathcal{L}_{B(X)}(E_1 \otimes E_2 , F_1 \otimes F_2) ; \rho_1 + \rho_2) ,$$

donc en particulier

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 \in C(\mathcal{L}_{S(X)}(E_1 \otimes E_2 , F_1 \otimes F_2) ; \rho_1 + \rho_2)$$

où $X = X_1 \times X_2$, ce qui n'est pas le cas si les ordres ρ_ν ne sont pas comme ci-dessus.

Considérons une partition de l'unité $\{\varphi_i^\nu(x_\nu)\}_{i \in I_\nu}$ subordonnée à un recouvrement $\{\mathcal{U}_i^\nu\}$ de X_ν par des ouverts tels que toutes les fois que $\mathcal{U}_i^\nu \cap \mathcal{U}_k^\nu \neq \emptyset$, $\mathcal{U}_i^\nu \cup \mathcal{U}_k^\nu$ est contenu dans un ouvert de coordonnées et de trivialité pour tous les fibrés considérés ($i , k \in I_\nu$, ensemble fini d'indices, car X_ν est compacte). Désignons par $\sim$ la "descente sur $\underset{\sim}{R}^{n_\nu}$ " et par $\smile$ la "remontée sur X_ν ". On peut alors considérer le relèvement "canonique" de

$$\sigma_\nu : \theta_\nu(\sigma_\nu) = \sum_{i,k} \overbrace{\theta(\widetilde{\varphi_i^\nu \sigma_\nu})(\widetilde{\varphi_k^\nu})} ,$$

où θ désigne le relèvement canonique sur $\underset{\sim}{R}^n$ (exposé n° 9) ; on "remonte" sur la variété un opérateur à bisupport compact dans $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_k$.

Les $\{\varphi_i^1(x_1)\, \varphi_{i'}^2(x_2)\}$ forment une partition de l'unité sur $X_1 \times X_2$, subordonnée à $\{\mathcal{U}_i^1 \times \mathcal{U}_{i'}^2\}$, et on a

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 = \sum_{i,i'} \varphi_i^1\, \sigma_1 \otimes \varphi_{i'}^2\, \sigma_2 .$$

On peut donc considérer

$$\theta_1(\sigma_1) \otimes \theta_2(\sigma_2) = \sum_{i,i',k,k'} \theta(\varphi_i^1\,\sigma_1) \otimes \theta(\varphi_{i'}^2\,\sigma_2)(\varphi_k^1\,\varphi_{k'}^2)$$

opérateur agissant (avec $\mathcal{H} = \mathcal{D} = \mathcal{E}$, ou $\mathcal{H} = \mathcal{D}' = \mathcal{E}'$, car X_1 et X_2 sont compactes) :

$$\mathcal{H}(X_1 , E_1) \otimes \mathcal{H}(X_2 , E_2) \to \mathcal{H}(X_1 , F_1) \otimes \mathcal{H}(X_2 , F_2)$$

donc prolongeable par continuité au produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ (muni de la topologie ε , ou π , ou encore au produit ε de ces espaces ; cf. [3], SCHWARTZ, Distributions à valeurs vectorielles) en un opérateur $(X = X_1 \times X_2)$

$$\theta_1(\sigma_1) \hat{\otimes} \theta_2(\sigma_2) : \mathcal{H}(X , E_1 \otimes E_2) \to \mathcal{H}(X , F_1 \otimes F_2) .$$

On aimerait bien que ce prolongement $\theta_1(\sigma_1) \hat{\otimes} \theta_2(\sigma_2)$, que l'on peut d'ailleurs considérer pour tout couple d'opérateurs de C^∞.-Z. , soit encore un opérateur de Calderon-Zygmund ; malheureusement, les espaces H^s ne sont pas factorisables (tout au plus a-t-on des isomorphismes entre H^k et $\bigcap_{o \leq \ell+m \leq k} H_1^\ell \hat{\otimes} H_2^m$, et entre H^{-k} et $\bigoplus_{\ell+m \leq k} H_1^{-\ell} \hat{\otimes} H_2^{-m}$, où $k , \ell , m \in \underset{\sim}{N}$, $\hat{\otimes}$ désignant la complétion de l'espace préhilbertien obtenu avec $(f_1 \otimes f_2 \mid g_1 \otimes g_2) = (f_1 \mid g_1)(f_2 \mid g_2)$; cf. [4]), et on ne peut pas dire a priori que le produit tensoriel de deux opérateurs C^∞.-Z. est de type analogue. Cependant :

THÉORÈME 4. - <u>Si</u> $\sigma_\nu \in \mathcal{E}(X_\nu , T^*_\bullet(X_\nu) ; \mathcal{L}(E_\nu , F_\nu) ; \rho_\nu)$ <u>avec</u> $\rho_\nu > 0$, <u>ou</u> $\rho_\nu = 0$ <u>si</u> σ_ν <u>est fonction sur</u> X_ν <u>seulement, on a</u> :

$$\theta_1(\sigma_1) \hat{\otimes} \theta_2(\sigma_2) \in \bigcap_{s-t=\rho_1+\rho_2} \Gamma_o(X_1 \times X_2 ; E_1 \otimes E_2 , F_1 \otimes F_2 ; s , t)$$

<u>et</u> $\forall$ $s , t \in \underset{\sim}{R}$ <u>avec</u> $s - t = \rho_1 + \rho_2$:

$$\sigma_{s,t}(\theta_1(\sigma_1) \hat{\otimes} \theta_2(\sigma_2)) = \sigma_1 \otimes \sigma_2 .$$

Avec les partitions de l'unité considérées plus haut, il suffit de démontrer le théorème localement, auquel cas (les fibrés étant alors triviaux, au-dessus d'ouverts de trivialité) on se ramène au cas scalaire (par tensorisation avec les espaces de matrices convenables). On doit donc démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - <u>Soient</u> $\theta_\nu(\sigma_\nu) \in \Gamma_\infty(\underset{\sim}{R}^{n_\nu} ; \rho_\nu)$, <u>de</u> ρ_ν<u>-symbole</u> σ_ν ($\rho_\nu > 0$; <u>ou</u> $\rho_\nu = 0$, σ_ν <u>étant un</u> $\alpha(x_\nu)$). Alors

$$\theta_1(\sigma_1)\ \theta_2(\sigma_2) \in \bigcap_{s-t=\rho_1+\rho_2} \Gamma_o(\underset{\sim}{R}^{n_1} \times \underset{\sim}{R}^{n_2} ; s , t)$$

<u>et son</u> $(s\,,\,t)$-<u>symbole continu est</u> $\sigma_1\,\sigma_2$.

Soient d'abord α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , et $\sigma_\nu = \alpha_\nu\,\beta_\nu$. Alors

$$\theta_1(\sigma_1)\;\theta_2(\sigma_2) = (\alpha_1\;\alpha_2)(\beta_1\;\beta_2)\;;$$

la fonction $\beta_1\,\beta_2$ est homogène d'ordre $\geqslant 0$, et partout continue ; donc $\theta_1(\sigma_1)\;\theta_2(\sigma_2)$ est un op. C.-Z. C^0 de symbole $\sigma_1\;\sigma_2$ d'après le lemme suivant, où $\beta(\xi) = \beta(\xi_1\,,\,\xi_2) = \beta_1(\xi_1)\;\beta_2(\xi_2)$, $\ell = n_1 + n_2$:

LEMME. - <u>Soit</u> $(\beta_n) \in \Gamma_\infty(\underset{\sim}{R}^\ell\;;\;\rho)$ <u>de symbole</u> $\beta_n(\xi)$. <u>Soit</u> $S^{\ell-1}$ <u>la sphère unité de</u> $(\underset{\sim}{R}^\ell)^*$, <u>et supposons que</u> $\beta_n \to \beta$ <u>dans</u> $\mathcal{C}(S^{\ell-1})$.

<u>Alors</u> $(\beta) = \mathfrak{F}\beta\,\star \in \Gamma_0(\underset{\sim}{R}^\ell\;;\;\rho) = \bigcap_{s-t=\rho} \Gamma_0(\underset{\sim}{R}^\ell\;;\;s\,,\,t)$, <u>et son</u> $(s\,,\,s-\rho)$-<u>symbole continu</u>, $\forall\; s$, <u>est</u> $\beta(\xi)$.

A l'aide de ce lemme, on peut prolonger θ aux β continus en $\theta(\beta) = (\beta)$; ce n'est pas le cas pour les α continus. La multiplication par $\alpha(x) \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^\ell)$, **même** à support compact, n'est pas un opérateur sur H^s pour $s > 0$: on sait seulement qu'au symbole $\alpha(x)$ à support compact, et continu, correspond

$$(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\;(\alpha(x))(|\xi|^s)\;,$$

mais ce relèvement dépend de s , et n'est pas le prolongement du θ défini pour les symboles C^∞ .

On a en effet

$$\beta(\xi) = |\xi|^\rho\;\mathring{\beta}(\xi')\;,\qquad \xi' \in S^{\ell-1}\;,$$

et de même pour β_n ; or $\beta_n \to \beta$ dans $\mathcal{C}(S^{\ell-1})$, donc

$$\sup_{S^{\ell-1}} |\mathring{\beta}_n(\xi') - \mathring{\beta}(\xi')| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\;.$$

D'où

$$\forall\; f \in H^s\;,\qquad \|(\beta_n)f - (\beta)f\|_{s-\rho} \leqslant \sup_{S^{\ell-1}} |\mathring{\beta}_n - \mathring{\beta}|\;\|f\|_s\;.$$

Donc $(\beta_n) \to (\beta)$ dans $\mathcal{L}(H^s\,,\,H^{s-\rho})$ et a pour tout $s \in \underset{\sim}{R}$. Donc $(\beta) \in \Gamma_0(\underset{\sim}{R}^\ell\;;\;s\,,\,t-\rho)$. Or $\sigma_\rho((\beta_n)) = \beta_n$, et $\beta_n \to \beta$ dans $\mathcal{C}(S^{\ell-1})$, donc $\sigma_{s,s-\rho}((\beta)) = \beta$ pour tout s .

Ceci démontre le lemme, donc la proposition 3 , pour σ_1 et σ_2 décomposés. Passons au cas général.

Soient

$$\alpha_\nu(x_\nu) \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^{n_\nu}) \ , \quad \beta_\nu \in \mathcal{E}((\underset{\sim}{R}^{n_\nu})^* - \{0\} \ ; \ \rho_\nu) \quad \text{où} \quad \rho_\nu > 0 \ ,$$

i. e. $\beta_\nu \in \mathcal{C}((\underset{\sim}{R}^{n_\nu})^* \ ; \ \rho_\nu)$ également. Posons $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

On a une application continue :

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^{n_1}) \times \mathcal{E}((\underset{\sim}{R}^{n_1})^* - \{0\} \ ; \ \rho_1) \times \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^{n_2}) \times \mathcal{E}((\underset{\sim}{R}^{n_2})^* - \{0\} \ ; \rho_2) \to \bigcap_s \Gamma_o(\underset{\sim}{R}^{n_1+n_2} \ ; \ s \ , \ - s - \rho)$$

$$(\alpha_1 \ , \ \beta_1 \ , \ \alpha_2 \ , \ \beta_2) \rightsquigarrow (\alpha_1 \ \alpha_2)(\beta_1 \ \beta_2) = \theta_1(\alpha_1 \ \beta_1) \ \theta_2(\alpha_2 \ \beta_2) \ ;$$

l'espace d'arrivée est muni de la topologie de $\bigcap_s \mathcal{L}(H^s \ , \ H^{s-\rho})$ (limite projective). La continuité est évidente (il suffit d'ailleurs de vérifier la continuité séparée).

Cette application passe au produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ (π ou ε) :

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^{n_1} \times ((\underset{\sim}{R}^{n_1})^* - \{0\}) \ ; \ \rho_1) \times \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^{n_2} \times ((\underset{\sim}{R}^{n_2})^* - \{0\}) \ ; \ \rho_2) \to \bigcap_s \Gamma_o(\underset{\sim}{R}^{n_1+n_2} \ ; \ s \ , \ s - \rho)$$

$$(\sigma_1 \ , \ \sigma_2) \rightsquigarrow \theta_1(\sigma_1) \ \theta_2(\sigma_2) \ .$$

donc $\theta_1(\sigma_1) \ \theta_2(\sigma_2)$ est un opérateur C^o.-Z. , et ce pour tout s .

De plus, le $(s \ , \ s - \rho)$-symbole de $(\alpha_1 \ \alpha_2)(\beta_1 \ \beta_2)$ était $\alpha_1 \ \beta_1 \ \alpha_2 \ \beta_2$. D'après la continuité de ce symbole (comme application $\Gamma_o^{s,s-\rho} \to \mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n \times S^{n-1} \ ; \ \rho)$), et sa linéarité, le $(s \ , \ s - \rho)$-symbole de $\theta_1(\sigma_1) \ \theta_2(\sigma_2)$ est $\sigma_1 \ \sigma_2$, et ce pour tout s .

3. Produit tensoriel et indice analytique.

Soit donc $d_\nu = d(E_{\nu_B} \ , \ F_{\nu_B} \ , \ \sigma_\nu)$. On peut considérer $d_1 \otimes d_2$ comme représenté par $d(E_B \ , \ F_B \ , \ \sigma)$ (cf. page 22-01).

Prenons les σ_ν définissant les d_ν ρ-homogènes (le même ρ) avec $\rho > 0$ (on peut prendre $\rho = 0$ si ce sont des "α"), ce qui est toujours possible (changer le degré d'homogénéité des σ_ν ne change pas le d_ν correspondant). On a alors

$$\sigma_1 \# \sigma_2 = \sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{L}_{B(X)}(E \ , \ F) \ ; \ \rho) \qquad \text{où} \quad X = X_1 \times X_2 \ .$$

LEMME. - Supposons σ_ν inversible, i. e. $\sigma_\nu \in \mathcal{E}(T^*_\bullet(X_\nu) \ ; \ \mathrm{Iso}_{S(X_\nu)}(E_\nu \ , \ F_\nu) \ ; \ \rho)$, avec $\rho > 0$ ($\rho = 0$ si c'est un α inversible). Alors

$$\sigma_1 \# \sigma_2 \in \mathcal{C}(\mathrm{Iso}_{S(X)}(E \ , \ F) \ ; \ \rho) \ .$$

COROLLAIRE. - Si $\theta_\nu(\sigma_\nu)$ est un opérateur C^∞.-Z. ρ-elliptique ($\rho > 0$ ou $\rho = 0$ si c'est un α) de ρ-symbole σ_ν , alors $\theta_1(\sigma_1) \# \theta_2(\sigma_2)$ est C^o-elliptique $\in \Gamma_o^{s,s-\rho}(X\,;\,E\,,\,F)$, $\forall$ s , de $(s\,,\,s-\rho)$-symbole $\sigma_1 \# \sigma_2$, $\forall$ s .

En effet (ici, comme p. 22-01, on note $\underset{\sim}{I}_E$ pour $\sigma_o(I_E)$) :

$$(\sigma_1 \# \sigma_2)^* (\sigma_1 \# \sigma_2) = \begin{pmatrix} \sigma_1^* \sigma_1 \otimes \underset{\sim}{I}_{E_2} + \underset{\sim}{I}_{E_1} \otimes \sigma_2^* \sigma_2 & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{I}_{F_1} \otimes \sigma_2 \sigma_2^* + \sigma_1 \sigma_1^* \otimes \underset{\sim}{I}_{F_2} \end{pmatrix}$$

est donc un opérateur hermitien partout $\geqslant 0$, et > 0 en tout point où un au moins des σ_ν est un isomorphisme, i. e. sur $T^*_\bullet(X)$, et donc est homotope à l'identité sur $S(X)$; donc σ est C^o-inversible. La formule donnant σ (opération "bidule" : $\sigma_1 \# \sigma_2$) montre son homogénéité, de degré ρ . Le corollaire découle du lemme et du théorème 4.

Par conséquent, en posant $D_\nu = \theta_\nu(\sigma_\nu)$, $D = D_1 \# D_2$ est inversible modulo les compacts (car C^o-elliptique), donc possède un indice comme opérateur

$$H^s(X\,;\,E) \to H^{s-\rho}(X\,;\,F)\ , \qquad \forall\ s\ .$$

Or son $(s\,,\,s-\rho)$-symbole est le même pour tout s , donc l'indice de l'opérateur

$$D = D_1 \# D_2 = \begin{pmatrix} D_1 \hat{\otimes} I_{E_2} & -I_{F_1} \hat{\otimes} D_2^* \\ I_{E_1} \hat{\otimes} D_2 & D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} \end{pmatrix}$$

(défini sur $\mathcal{D}'(X\,;\,E)$) est le même sur tout $H^s(X\,;\,E)$ (on suppose ici identifiées les sections de E_ν et celles de $\overline{E}^* \otimes_X \Omega$). Nous allons le calculer.

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> A <u>un opérateur</u> : $H^s(X\,;\,E) \to H^{s-\rho}(X\,;\,F)$, $\forall$ s <u>(donc agissant</u> $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$), <u>supposé à indice. Notons</u> A_s <u>sa restriction à</u> $H^s(X\,;\,E)$. <u>Si</u> $i_a(A_s)$ <u>est indépendant de</u> s , <u>on a</u> :

(i) $\operatorname{Ker} A_s \subset \mathcal{D}(X\,;\,E)$;
(ii) $AT \in H^{s-\rho}(X\,;\,F) \implies T \in H^s(X\,;\,E)$ ("hypoellipticité globale")
(iii) $i_a(A_s) = i_a(A_{\mathcal{D}}) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^*$.

COROLLAIRE. - Soit $A \in \bigcap_s \Gamma_o(X ; E , F ; s , s - \rho)$, avec $\sigma_{s,s-\rho}(A) = \sigma_{(\rho)}(A)$, indépendant de s , A étant C^o-elliptique (à indice) , $\forall$ s . Alors $i_a(A_s)$ est indépendant de s (il ne dépend que de $\sigma_{(\rho)}(A)$), donc

$$\mathrm{Ker}\, A \subset \mathcal{D} \ , \quad \mathrm{Ker}\, A^* \subset \mathcal{D}(X ; F) \ ,$$

$$i_a(A_s) = i_a(A_{\mathcal{D}'}) = i_a(A_{\mathcal{D}}) = \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{Ker}\, A^*$$

et de plus (hypoellipticité globale des op. C^o.-Z.-elliptiques)

$$AT \in \mathcal{D} \implies T \in \mathcal{D} \ .$$

Ceci est vrai en particulier pour $A = A_1 \# A_2$ où A_1 et A_2 sont C^∞-elliptiques, d'ordre (le même) $\geqslant 0$ (nul, seulement si ce sont des (α)).

Démontrons ce théorème 5.

LEMME 1. - <u>Soient</u> $\mathcal{E}_o$, $\mathcal{E}_1$ <u>deux espaces vectoriels topologiques,</u> $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_o$, <u>avec injection continue dense. Soit</u> $K \subset \mathcal{E}_o$ <u>un sous-espace fermé de codimension</u> n <u>finie. Alors</u> $K \cap \mathcal{E}_1$ <u>est un sous-espace fermé, de codimension</u> n <u>dans</u> $\mathcal{E}_1$.

En effet, K est défini par l'annulation de $e_1', \dots, e_n' \in \mathcal{E}_o' \subset \mathcal{E}_1'$, linéairement indépendantes, et $K \cap \mathcal{E}_1$ est encore défini dans $\mathcal{E}_1$ par leur annulation, et elles sont encore indépendantes dans $\mathcal{E}_1'$ ($\mathcal{E}_1$ est dense dans $\mathcal{E}_o$).

PROPOSITION 4. - <u>Soient</u> $\mathcal{E}_o$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_o$, $\mathcal{F}_1$ <u>quatre espaces vectoriels topologiques, et le diagramme suivant, où les</u> u_ν <u>sont des applications linéaires continues à indice</u> $(\nu = 0 , 1)$, $\mathrm{Im}\, u_\nu$ <u>étant fermée dans</u> $\mathcal{F}_\nu$, <u>les injections étant denses et</u> $u_o|_{\mathcal{E}_1} = u_1$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{u_1} & \mathcal{F}_1 \\ \downarrow\cap & & \cap\downarrow \\ \mathcal{E}_o & \xrightarrow{u_o} & \mathcal{F}_o \end{array}$$

<u>Alors</u>

(i) $$\dim \mathrm{Ker}\, u_1 \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, u_o$$

(ii) $$\dim \mathrm{Coker}\, u_1 \geqslant \dim \mathrm{Coker}\, u_o$$

<u>donc</u> $i_a(u_1) \leqslant i_a(u_o)$, <u>et si</u> $i_a(u_o) = i_a(u_1)$, <u>on a</u>

(iii) $$\mathrm{Ker}\, u_1 = \mathrm{Ker}\, u_o$$

<u>et l'application</u> $\mathrm{Coker}\, u_1 \to \mathrm{Coker}\, u_o$ <u>est bijective.</u>

(i) est évidente, car $\operatorname{Ker} u_1 \subseteq \operatorname{Ker} u_o$. Par le lemme 1,

$$\operatorname{codim}_{\mathfrak{F}_1}(\operatorname{Im} u_o \cap \mathfrak{F}_1) = \operatorname{codim}_{\mathfrak{F}_o}(\operatorname{Im} u_o) .$$

Or $\mathfrak{F}_1 \supset \operatorname{Im} u_1 \subset \operatorname{Im} u_o \subset \mathfrak{F}_o$, donc $\operatorname{Im} u_o \cap \mathfrak{F}_1 \supset \operatorname{Im} u_1$. D'où

$$\dim \operatorname{Coker} u_o = \operatorname{codim}_{\mathfrak{F}_o}(\operatorname{Im} u_o) = \operatorname{codim}_{\mathfrak{F}_1}(\operatorname{Im} u_o \cap \mathfrak{F}_1) \leqslant \operatorname{codim}_{\mathfrak{F}_1}(\operatorname{Im} u_1) = \dim \operatorname{Coker} u_1 .$$

Si $i_a(u_o) = i_a(u_1)$, on devra avoir

$$\begin{cases} \dim \operatorname{Ker} u_o = \dim \operatorname{Ker} u_1 < \infty \\ \dim \operatorname{Coker} u_o = \dim \operatorname{Coker} u_1 < \infty . \end{cases}$$

Or $\operatorname{Ker} u_1 \subset \operatorname{Ker} u_o$ ($\subset \mathcal{E}_o$) et les deux ont même dimension finie, donc

$$\operatorname{Ker} u_o = \operatorname{Ker} u_1 \subset \mathcal{E}_1 ,$$

et de même $\operatorname{Im} u_1 = \operatorname{Im} u_o \cap \mathfrak{F}_1$ (même codimension finie dans $\mathfrak{F}_1$; et ils sont tous les deux fermés).

De plus, soit $f_1 = u_o e_o$, $f_1 \in \mathfrak{F}_1$, $e_o \in \mathcal{E}_o$, i. e. $f_1 \in \operatorname{Im} u_o \cap \mathfrak{F}_1 = \operatorname{Im} u_1$. Alors il existe $e_1 \in \mathcal{E}_1$ tel que $f_1 = u_1 e_1$. Or $u_o(e_1 - e_o) = 0$, donc

$$e_1 - e_o \in \operatorname{Ker} u_o \subset \mathfrak{F}_1 ,$$

i. e. $e_o \in \mathcal{E}_1$. Donc $u_o(\mathcal{E}_o) \cap \mathfrak{F}_1 = u_1(\mathcal{E}_1)$. (C'est une propriété d'hypoellipticité).

Donc l'application

$$\operatorname{Coker} u_1 = \frac{\mathfrak{F}_1}{\operatorname{Im} u_1} \to \frac{\mathfrak{F}_o}{\operatorname{Im} u_o} = \operatorname{Coker} u_o ,$$

définie par

$$\{f_1 + \operatorname{Im} u_1\} \rightsquigarrow \{f_1 + \operatorname{Im} u_o\} ,$$

est injective $(u_o^{-1}(\mathfrak{F}_1) \subset \mathcal{E}_1)$, et donc bijective (car ces espaces ont même dimension finie).

<u>Démonstration du théorème</u> 5. - A_s étant à indice, et H^s Hilbert (donc Fréchet), $\operatorname{Im} A_s$ est fermée (exposé 12). On a le diagramme $(t \leqslant s)$:

$$\begin{array}{ccc} H^s(X\ ;\ E) & \xrightarrow{A_s} & H^{s-\rho}(X\ ;\ F) \\ \cap\big\downarrow & & \cap\big\downarrow \\ H^t(X\ ;\ E) & \xrightarrow{A_t} & H^{t-\rho}(X\ ;\ F) \end{array}$$ et A_s et A_t ont même indice.

Donc $\forall \quad t \leqslant s$,

$$\operatorname{Ker} A_t = \operatorname{Ker} A_s \subset H^s(X ; E)$$

et par conséquent, comme $\mathcal{D} = \bigcap H^s$, $\mathcal{D}' = \bigcup H^s$:

$$\operatorname{Ker} A_t \subset \mathcal{D}(X ; E) ,$$

et de plus, si $A_t \, T \in H^{s-\rho}$ ($T \in H^t$ a priori, ce qui est toujours vrai pour un certain t assez "petit", car X est compacte), $T \in H^s$. Donc $AT \in \mathcal{D} \implies T \in \mathcal{D}$, car alors

$$T \in \mathcal{D}' \implies T \in H^t \implies A_t \, T \in H^{s-\rho} , \quad \forall \ s \geqslant t \implies T \in H^s , \quad \forall \ s \geqslant t .$$

On en déduit que $A(\mathcal{D}) = \bigcap\limits_s A(H^s)$ est fermé dans $\mathcal{D}$, donc A est encore un homomorphisme de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Mais les mêmes résultats sont valables pour A^* . Alors

$$i_a(A_{\mathcal{D}}) = \dim \operatorname{Ker} A_{\mathcal{D}} - \dim \operatorname{Ker} A^*_{\mathcal{D}'} = \dim \operatorname{Ker} A_s - \dim \operatorname{Ker} A^*_{-s+\rho} = i_a(A_s)$$

pour tout s . De même, $\operatorname{Im} A(\mathcal{D}')$ est fermée dans $\mathcal{D}'$ d'après le théorème de Banach sur les homomorphismes de Fréchet, donc on a encore

$$i_a(A_{\mathcal{D}'}) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^* = i_a(A_s)$$

pour tout s .

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant chercher $\operatorname{Ker} D$ et $\operatorname{Ker} D^*$, dans H^s , donc dans $\mathcal{D}$, pour $D = D_1 \# D_2$, D_1 et D_2 C^∞-elliptiques, de même ordre $\geqslant 0$ ($= 0$ seulement si ce sont des (α)), "relèvements canoniques" de σ_1 et σ_2 (respectivement), ceci afin d'assurer que D est C^0-elliptique sur la variété produit.

Soient $(f , g) \in \operatorname{Ker} D$, $f \in \mathcal{D}(X ; E_1 \otimes E_2)$, $g \in \mathcal{D}(X ; F_1 \otimes F_2)$. On a

$$\begin{cases} (D_1 \hat{\otimes} I_{E_2})f - (I_{F_1} \hat{\otimes} D_2^*)g = 0 \\ \\ (I_{E_1} \hat{\otimes} D_2)f + (D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2})g = 0 \end{cases}$$

Or $(D_1 \hat{\otimes} I_{E_2}) \circ (I_{E_1} \hat{\otimes} D_2) = D_1 \hat{\otimes} D_2 = (I_{E_1} \hat{\otimes} D_2) \circ (D_1 \hat{\otimes} I_{E_2})$. Donc (on compose avec $I_{F_1} \hat{\otimes} D_2$ et $D_1 \hat{\otimes} I_{F_2}$, puis on retranche) :

$$(D_1 \, D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} + I_{F_1} \hat{\otimes} D_2 \, D_2^*)g = 0$$

et de même (on compose avec $D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2}$ et $I_{F_1} \hat{\otimes} D_2$, puis on ajoute) :

$$(D_1^* D_1 \hat{\otimes} I_{E_2} + I_{E_1} \hat{\otimes} D_2^* D_2)f = 0 .$$

Comme on sait a priori que f et g sont dans les $\mathcal{D}$ correspondants, on peut multiplier "scalairement" (avec la forme sesquilinéaire exprimant l'antidualité entre $\mathcal{D}(X ; E)$ et $\mathcal{D}'(X ; E)$, ou entre H^ρ et $H^{-\rho}$) par g et f (respectivement) les égalités obtenues, d'où

$$0 = (D_1 D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g , g) + (I_{F_1} \hat{\otimes} D_2 D_2^* g , g) ;$$

or on a

$$0 = \|D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g\|^2_{L^2(X,F_1 \otimes F_2)} = (D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g , D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g) = (D_1 D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g , g)$$

(la dernière égalité est vraie sur les éléments décomposables, donc sur tous par passage à la limite), et de même pour les autres termes.

La possibilité de prendre un produit scalaire pour $g \in \mathcal{D}$, nous assure donc que si la somme de deux opérateurs hermitiens $\geqslant 0$ est nulle sur g , chacun d'eux l'est :

$$(D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2})g = 0 , \qquad (I_{F_1} \hat{\otimes} D_2^*)g = 0 .$$

On en déduit

$$g \in \mathrm{Ker}(D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2}) \cap \mathrm{Ker}(I_{F_1} \hat{\otimes} D_2^*) \subset \mathcal{D}(X ; F_1 \otimes F_2) .$$

De même

$$f \in \mathrm{Ker}(D_1 \hat{\otimes} I_{E_2}) \cap \mathrm{Ker}(I_{E_1} \hat{\otimes} D_2) \subset \mathcal{D}(X ; E_1 \otimes E_2) .$$

Or :

LEMME 2. - <u>Soient</u> $\mathcal{E}_\nu$ $(\nu = 1 , 2)$ <u>deux espaces localement convexes séparés, et</u> $A_\nu \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\nu , \mathcal{E}_\nu)$. <u>On a alors</u> $A_1 \varepsilon I_2$ <u>et</u> $I_1 \varepsilon A_2$ <u>sur</u> $\mathcal{E}_1 \varepsilon \mathcal{E}_2$, (<u>prolongeant</u> $A_1 \otimes I_2$ <u>et</u> $I_1 \otimes A_2$ <u>définis sur</u> $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$) <u>où</u> I_ν <u>dénote l'identité sur</u> $\mathcal{E}_\nu$, <u>et on a</u> :

$$\mathrm{Ker}(A_1 \varepsilon I_2) \cap \mathrm{Ker}(I_1 \varepsilon A_2) = (\mathrm{Ker}\, A_1) \varepsilon (\mathrm{Ker}\, A_2)$$

(pour le produit ε , voir SCHWARTZ [3], chap. I).

En effet, tout $\eta \in \mathcal{E}_1 \varepsilon \mathcal{E}_2$ peut être considéré comme un élément de $\mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{E}_2')_c ; \mathcal{E}_1)$ par

$$\eta(e'_1 , e'_2) = \langle \eta(e'_2) , e'_1 \rangle , \qquad \forall \ e'_1 \in \mathcal{E}'_1 , \ e'_2 \in \mathcal{E}'_2 .$$

Donc

$$(A_1 \varepsilon I_2)g = 0 \iff \forall \ e'_2 , \ (A_1 \varepsilon I_2)g \ (e'_2) = 0 ,$$

i. e. $A_1(g(e'_2)) = 0$.

Donc

$$g \in \operatorname{Ker}(A_1 \varepsilon I_2) \implies g \in (\operatorname{Ker} A_1) \varepsilon \mathcal{E}_2 .$$

Si de plus $g \in \operatorname{Ker}(I_1 \varepsilon A_2)$, on a

$$(I_1 \varepsilon A_2)g = 0 .$$

D'où, de même,

$$g \in (\operatorname{Ker} A_1) \varepsilon (\operatorname{Ker} A_2) .$$

L'inclusion inverse est évidente. Pour $\mathcal{Q}(X_\nu ; E_\nu)$ et $\mathcal{Q}'(X_\nu ; E_\nu)$ (qui sont complets et ont la propriété d'approximation, de sorte que $\varepsilon = \hat{\otimes}_\varepsilon$), comme par hypoellipticité

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} D_\nu \subset \mathcal{Q}(X_\nu ; E_\nu) \\ \operatorname{Ker} D^*_\nu \subset \mathcal{Q}(X_\nu ; F_\nu) \end{cases}$$

on aura (que l'on calcule les noyaux dans $\mathcal{Q}'$ ou dans $\mathcal{Q}$, ce qui revient au même, et quel que soit le $\hat{\otimes}$, π ou ε , considéré) :

$$\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D_1 \hat{\otimes} \operatorname{Ker} D_2 \oplus \operatorname{Ker} D^*_1 \hat{\otimes} \operatorname{Ker} D^*_2 \subset \mathcal{Q}(X ; E)$$

et de même :

$$\operatorname{Ker} \overset{*}{D} = \operatorname{Ker} D^*_1 \hat{\otimes} \operatorname{Ker} D_2 \oplus \operatorname{Ker} D_1 \hat{\otimes} \operatorname{Ker} D^*_2 \subset \mathcal{Q}(X ; F) .$$

Notons $\mu = \dim \operatorname{Ker}$. On a

$$\dim(\operatorname{Ker} D_1 \hat{\otimes} \operatorname{Ker} D_2) = \mu(D_1) \ \mu(D_2) .$$

Alors

$$\begin{aligned} i_a(D) = \mu(D) - \mu(D^*) &= \mu(D_1) \ \mu(D_2) + \mu(D^*_1) \ \mu(D^*_2) - \mu(D^*_1) \ \mu(D_2) - \mu(D_1) \ \mu(D^*_2) \\ &= i_a(D_1) \ i_a(D_2) . \end{aligned}$$

Or $\sigma_\rho(D_\nu) = \sigma_\nu$, et $\sigma_{(\rho)}(D) = \sigma_1 \quad \sigma_2$. Donc :

$$i_a(d_1 \otimes d_2) = i_a(d_1) \ i_a(d_2) .$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] RICKART (Charles E.). - General theory of Banach algebras. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (The University Series in higher Mathematics).

[2] RIESZ (F.) et NAGY (B. Sz.). - Leçons d'analyse fonctionnelle. 3e éd. - Budapest, Académie de Hongrie, 1955.

[3] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141 et t. 8, 1958, p. 1-209.

[4] Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, I. A. S., 1963/64.