Henri Cartan

Introduction au cobordisme

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 20, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A5_0>

20 avril 1964

INTRODUCTION AU COBORDISME,

par Henri CARTAN

1. Les fonctions i_a et i_t.

Rappelons d'abord la formule d'Atiyah-Singer qui fait l'objet de ce Séminaire (cf. Exp. 7), en profitant de cette occasion pour préciser certains signes.

On a défini pour toute variété différentiable compacte et connexe X, sans bord (orientable ou non), deux "indices" i_a et i_t : ce sont des homomorphismes de groupes abéliens :

$$i_a = i_a(X) \ : \ K(B(X) , S(X)) \to \mathbb{Z} \quad \text{(indice analytique)}$$

$$i_t = i_t(X) \ : \ K(B(X) , S(X)) \to \mathbb{Q} \quad \text{(indice topologique)} ;$$

comme d'habitude, $B(X)$ désigne le fibré en boules du fibré cotangent $T^*(X)$, muni d'une métrique riemannienne, et $S(X)$ le fibré en sphères ; on sait que la métrique ne joue pas de rôle essentiel (cf. Exp. 19, § 1). Le théorème d'Atiyah-Singer s'énonce comme suit :

$$(1) \qquad i_a(X) = i_t(X) \quad \text{pour toute } X .$$

Rappel sur $i_a(X) = i_a$ (cf. Exp. 14). - Pour tout ρ réel, soit

$$A \in \Gamma(X , E , F ; \rho)$$

un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre $\leqslant \rho$, ρ-elliptique (E et F désignent deux fibrés vectoriels complexes de base X) ; soit

$$\sigma_\rho(A) \in \mathcal{E}(X , S(X) , \mathrm{Iso}(E_{S(X)} , F_{S(X)}))$$

son ρ-symbole ($E_{S(X)}$ et $F_{S(X)}$ désignent les fibrés induits sur $S(X)$). L'indice de l'opérateur A ne dépend que de $\sigma_\rho(A)$, et définit sur

$$\mathcal{E}(X , S(X) , \mathrm{Iso}(E_{S(X)} , F_{S(X)}))$$

une fonction qui, en fait, ne dépend pas de ρ. En outre, cette fonction passe au quotient sur $K(B(X) , S(X))$, d'où la fonction $i_a(X)$ (qui était notée χ dans l'exposé 14). Notons ici χ l'application canonique de $\mathcal{E}(X,S(X),\mathrm{Iso}(E_{S(X)},F_{S(X)}))$ sur son quotient $K(B(X) , S(X))$; on voit que l'indice de l'opérateur A est égal à

$$i_a \circ \chi \circ \sigma_\rho(A) .$$

Rappel sur $i_t(X) = i_t$. – On va donner ici une nouvelle définition de i_t , valable aussi pour une variété non orientable. Soit $\xi \in K(B(X) , S(X))$; alors

$$ch(\xi) \in H^{pair}(B(X) , S(X) ; \mathbb{Q}) ,$$

qui est un module sur $H^{pair}(B(X) ; \mathbb{Q}) \approx H^{pair}(X ; \mathbb{Q})$. Soit

$$\tau(X) = \tau(T(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \in H^{pair}(X ; \mathbb{Q})$$

la classe de Todd. Dans le produit

$$ch(\xi).\tau(X) \in H^{pair}(B(X) , S(X) ; \mathbb{Q}) ,$$

prenons la composante de degré maximum $2n$ (où $n = \dim X$) [observons que $T^*(X)$ est une variété différentiable de dimension $2n$]. Puisque

$$H^{2n}(B(X) , S(X) ; \mathbb{Q}) \approx \mathbb{Q}$$

(l'isomorphisme étant défini par le choix d'une orientation de la variété $T^*(X)$, cf. ci-dessous), la composante de degré $2n$ de $ch(\xi).\tau(X)$ définit un élément de $\mathbb{Q}$; c'est, par définition, la valeur de la fonction i_t pour l'élément

$$\xi \in K(B(X) , S(X)) .$$

Pour que i_t soit défini sans ambiguïté de signe, il reste à préciser l'orientation de la variété $T^*(X)$.

2. Digression sur l'orientation.

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension finie) et soit

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V , \mathbb{R})$$

son dual. A chaque orientation de V on associera une orientation de V^* comme suit : si l'orientation de V est définie par une base ordonnée $(e_1 , \dots , e_n)$, celle de V^* sera définie par la base ordonnée $(e'_n , \dots , e'_1)$, en notant $\{e'_i\}$ la base duale de la base $\{e_i\}$. Au sujet de cette convention, il est bon d'observer ce qui se passe lorsque V est le vectoriel réel sous-jacent à un espace vectoriel W sur $\mathbb{C}$; soit

$$W^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W , \mathbb{C})$$

le dual complexe de W ; on a un isomorphisme naturel θ du vectoriel réel sous-jacent à W^* sur l'espace vectoriel V^* ; θ est défini de la manière suivante :

à une forme $\underset{\sim}{C}$-linéaire f, θ associe la forme $\underset{\sim}{R}$-linéaire $x \to \mathrm{Re}(f(x))$; l'isomorphisme réciproque θ^{-1} associe à une forme $\underset{\sim}{R}$-linéaire g la forme $\underset{\sim}{C}$-linéaire $x \to g(x) - ig(ix)$. Sur le vectoriel réel sous-jacent à W^*, on a une orientation naturelle, déduite de la structure complexe de W^* ; sur V, on a aussi une orientation naturelle (déduite de la structure complexe de W) ; alors <u>l'isomorphisme</u> θ <u>transporte l'orientation naturelle de</u> W^* <u>sur l'orientation de</u> V^* <u>déduite de l'orientation naturelle de</u> V <u>par la convention qui oriente le dual réel de tout espace vectoriel réel orienté</u>.

La vérification est facile : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base complexe de W ; alors $(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$ est une $\underset{\sim}{R}$-base de V qui définit l'orientation naturelle de V. Soit $(e'_1, \dots, e'_n)$ la $\underset{\sim}{C}$-base duale de W^* ; à $e'_k \in W^*$ l'isomorphisme naturel θ associe la forme $\underset{\sim}{R}$-linéaire

$$x \to \mathrm{Re}\langle x, e'_k\rangle \quad \text{sur} \quad V,$$

forme linéaire qui est égale à 1 pour $x = e_k$, et à 0 pour tout autre élément de la $\underset{\sim}{R}$-base de V ; à $-ie'_k$ l'isomorphisme θ associe la forme $\underset{\sim}{R}$-linéaire

$$x \to -\mathrm{Re}\langle x, ie'_k\rangle = \mathrm{Im}\langle x, e'_k\rangle$$

qui est égale à 1 pour $x = ie_k$, et à 0 pour tout autre élément de la $\underset{\sim}{R}$-base de V. Ainsi la base réelle de V^* :

$$\{e'_1, -ie'_1, \dots, e'_n, -ie'_n\}$$

est duale de la base $\{e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n\}$ de V. Par définition, l'orientation de V^* est celle de la base ordonnée

$$\{-ie'_n, e'_n, \dots, -ie'_1, e'_1\} ;$$

or cette orientation est la même que celle déduite de la structure complexe : regarder la $\underset{\sim}{C}$-base

$$\{-ie'_n, \dots, -ie'_1\} \text{ de } W^*.$$

Revenons à l'orientation canonique du dual V^* d'un espace $\underset{\sim}{R}$-vectoriel V orienté (de dimension finie). Elle va nous permettre d'orienter la variété différentiable $T^*(X)$ lorsque X est une variété différentiable. Il suffit d'orienter le fibré tangent à $T^*(X)$, et pour cela il suffit d'orienter l'espace tangent à $T^*(X)$ en un point x de la section nulle de $T^*(X)$ (section nulle qu'on peut identifier à X). L'espace tangent s'identifie évidemment à $T^*_x(X) \oplus T_x(X)$, somme directe de l'espace cotangent et de l'espace tangent à X . A chaque orientation de $T_x(X)$ est associée une orientation de son dual $T^*_x(X)$, comme on vient de le voir, donc une orientation de la somme directe $T^*_x(X) \oplus T_x(X)$. Explicitons : si $(e_1 , \dots , e_n)$ est une base de $T_x(X)$, on considère l'orientation de

$$T^*_x(X) \oplus T_x(X)$$

définie par la base ordonnée

$$e'_n , \dots , e'_1 , e_1 , \dots , e_n ;$$

cette orientation ne dépend pas du choix de la base (e_i) .

Nous avons ainsi défini sans ambiguïté une orientation de la variété $T^*(X)$ de dimension $2n$, et par suite choisi un isomorphisme

$$H^{2n}(B(X) , S(X) ; \mathbb{Q}) \approx \mathbb{Q} ,$$

ce qui précise le signe choisi pour définir l'indice topologique i_t .

Remarque. - C'est avec cette convention de signe que la formule (1) d'Atiyah-Singer est valable. Du moins on l'espère ! Le seul doute qui subsiste est celui-ci : il se pourrait que la formule correcte fût $i_a(X) = (-1)^n i_t(X)$, avec $n = \dim X$. La question sera tranchée quand on aura étudié le cas $n = 1$ (cf. Exp. 24).

3. Propriétés des deux indices.

Il est évident que si $\xi , \xi' \in K(B(X) , S(X))$,

$$i_a(\xi + \xi') = i_a(\xi) + i_a(\xi') ,$$

$$i_t(\xi + \xi') = i_t(\xi) + i_t(\xi') ;$$

pour i_t , cette relation résulte de la propriété additive du caractère de Chern.

Soient maintenant deux variétés compactes connexes, sans bord, X et Y . Soient

$$\xi \in K(B(X) , S(X)) , \quad \eta \in K(B(Y) , S(Y)) ,$$

et soit $\xi \otimes \eta \in K(B(X \times Y) , S(X \times Y))$ leur produit (cf. Exp. 15).

PROPOSITION 1. - *On a*

$$i_t(X \times Y)(\xi \otimes \eta) = i_t(X)(\xi) . i_t(Y)(\eta) .$$

Cela résulte : 1° des propriétés multiplicatives du caractère de Chern et de la classe de Todd ; 2° du fait que la classe fondamentale de cohomologie de

$$H^*(B(X \times Y)\ ,\ S(X \times Y))$$

est égale au cup-produit des classes fondamentales de $H^*(B(X)\ ,\ S(X))$ et de $H^*(B(Y)\ ,\ S(Y))$; ceci est dû aux conventions d'orientation faites au § 2 : l'orientation de la variété $T^*(X \times Y)$ est bien le produit des orientations de $T^*(X)$ et de $T^*(Y)$. Vérification : soit $(e_1\ , \ldots\ , e_n)$ une base de $T_x(X)$, et soit $(f_1\ , \ldots\ , f_p)$ une base de $T_y(Y)$; soient $(e'_1\ , \ldots\ , e'_n)$ et $(f'_1\ , \ldots\ , f'_p)$ les bases duales de $T^*_x(X)$ et $T^*_y(Y)$ respectivement ; l'orientation de

$$T^*_{(x,y)}(X \times Y) \oplus T_{(x,y)}(X \times Y)$$

est définie par la base ordonnée

$$(f'_p\ , \ldots\ , f'_1\ , e'_n\ , \ldots\ , e'_1\ , e_1\ , \ldots\ , e_n\ , f_1\ , \ldots\ , f_p)\ ,$$

et cette orientation est bien le produit des orientations définies respectivement par les bases ordonnées

$$(e'_n\ , \ldots\ , e'_1\ , e_1\ , \ldots\ , e_n) \quad \text{et} \quad (f'_p\ , \ldots\ , f'_1\ , f_1\ , \ldots\ , f_p)\ .$$

PROPOSITION 2. - <u>L'indice analytique possède la propriété multiplicative</u>

$$i_a(X \times Y)(\xi \otimes \eta) = i_a(X)(\xi) \cdot i_a(Y)(\eta)\ .$$

La démonstration de la proposition 2 fera l'objet de l'exposé 22.

4. Plan de la démonstration de la formule (1).

On va d'abord ramener le cas où X compacte connexe n'est pas orientable au cas d'une variété orientée. En effet, soit $\tilde{X}$ le revêtement orienté de X à deux feuillets (un point de $\tilde{X}$ est défini par un point $x \in X$ et une orientation de l'espace tangent $T_x(X)$). Supposons qu'on ait démontré

$$i_a(\tilde{X}) = i_t(\tilde{X})\ ,$$

et montrons qu'on peut en déduire $i_a(X) = i_t(X)$. Il suffit évidemment de prouver la

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> $\lambda\ :\ K(B(X)\ ,\ S(X)) \to K(B(\tilde{X})\ ,\ S(\tilde{X}))$ <u>l'homomorphisme défini par l'application de revêtement</u> $\rho\ :\ \tilde{X} \to X$. <u>On a</u>

(2) $$i_a(\tilde{X}) \circ \lambda = 2\ i_a(X)\ , \qquad i_t(\tilde{X}) \circ \lambda = 2\ i_t(X)\ .$$

Démontrons la proposition 3. Commençons par la seconde relation (2). Soit

$$\xi \in K(B(X)\ ,\ S(X))\ ,$$

et soit $\tilde{\xi} = \lambda(\xi)$. Comme le morphisme de fibrés $T(\tilde{X}) \to T(X)$ est un morphisme strict, l'homomorphisme $H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Q}) \to H^*(\tilde{X}\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ défini par ρ transforme la classe de Todd $\tau(X)$ dans la classe de Todd $\tau(\tilde{X})$. De même, puisque $T^*(\tilde{X}) \to T^*(X)$ est un morphisme strict, l'homomorphisme

$$\mu\ :\ H^*(B(X)\ ,\ S(X)\ ;\ \underset{\sim}{Q}) \to H^*(B(\tilde{X})\ ,\ S(\tilde{X})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$$

induit par ρ transforme $ch(\xi)$ en $ch(\tilde{\xi})$. Donc μ envoie $ch(\xi).\tau(X)$ en $ch(\tilde{\xi}).\tau(\tilde{X})$, et la composante de degré $2n$ en la composante de degré $2n$. Or μ envoie la classe fondamentale de cohomologie de la variété $T^*(X)$ sur deux fois la classe fondamentale de cohomologie de $T^*(\tilde{X})$, puisque $\tilde{X}$ est un revêtement à deux feuillets de X. On en déduit

$$i_t(\tilde{X})(\tilde{\xi}) = 2\ i_t(X)(\xi)\ ,$$

c'est-à-dire la deuxième relation (2).

Passons à la première relation (2). Soit $\xi \in K(B(X)\ ,\ S(X))$, et soit

$$u \in \mathcal{E}(X\ ,\ S(X)\ ,\ \mathrm{Iso}(E_{S(X)}\ ,\ F_{S(X)}))\quad \text{tel que}\quad \chi(u) = \xi\ ;$$

u est le symbole d'un opérateur elliptique $A\ :\ \mathcal{D}(X\ ,\ E) \to \mathcal{D}(X\ ,\ F)$. Soient E' et F' les fibrés "tordus" de E et F, définis comme suit : soient d'abord $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ les images réciproques de E et F par $\rho\ :\ \tilde{X} \to X$, et soit

$$\tilde{u} \in \mathcal{E}(\tilde{X}\ ,\ S(\tilde{X})\ ,\ \mathrm{Iso}(E_{S(\tilde{X})}\ ,\ F_{S(\tilde{X})}))$$

l'image réciproque de u. Si $\tilde{\xi} = \chi(\tilde{u})$, on a évidemment $\tilde{\xi} = \lambda(\xi)$. Considérons les deux automorphismes involutifs α et β de $\tilde{E}$ (resp. de $\tilde{F}$) que voici : α transforme $(x\ ,\ t)$ (où $x \in \tilde{X}$, et t est un vecteur de la fibre $E_{\rho(x)}$) en $(x'\ ,\ t)$ (où $x' \in \tilde{X}$ est l'autre point de X ayant même image que x dans X) ; quant à β, il transforme $(x\ ,\ t)$ et $(x'\ ,\ -t)$. Le quotient de $\tilde{E}$ (resp. de $\tilde{F}$) par α s'identifie à E (resp. F) ; soit E' (resp. F') le quotient de $\tilde{E}$ (resp. de $\tilde{F}$) par β. Par passage au quotient, $\tilde{u}$ définit

$$u' \in \mathcal{E}(X\ ,\ S(X)\ ,\ \mathrm{Iso}(E'_{S(X)}\ ,\ F'_{S(X)}))\ .$$

On notera que $\tilde{E}$ est aussi image réciproque de E' par l'application $\rho\ :\ \tilde{X} \to X$; de même $\tilde{F}$ est image réciproque de F'.

Soit A' un opérateur elliptique qui relève le symbole u'. Considérons la somme directe

$$A \oplus A' : \mathcal{Q}(X , E \oplus E') \to \mathcal{Q}(X , F \oplus F') ;$$

son **indice** est $i(A) + i(A')$. Or les deux applications canoniques

$$\mathcal{Q}(X , E) \to \mathcal{Q}(\widetilde{X} , \widetilde{E}) \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(X , E') \to \mathcal{Q}(\widetilde{X} , \widetilde{E})$$

identifient $\mathcal{Q}(X , E) \oplus \mathcal{Q}(X , E')$ à $\mathcal{Q}(\widetilde{X} , \widetilde{E})$, et de même pour F . En effet, l'automorphisme involutif de $\widetilde{X}$ induit un automorphisme σ de $\widetilde{E}$; $\mathcal{Q}(X , E)$ s'identifie au sous-espace des éléments de $\mathcal{Q}(\widetilde{X} , \widetilde{E})$ invariants par σ , et $\mathcal{Q}(X , E')$ au sous-espace des éléments que σ transforme en leur opposé. Moyennant ces identifications, le symbole de $A \oplus A'$ n'est autre que $\widetilde{u}$, d'où

$$i(A) + i(A') = i_a(\widetilde{X})(\widetilde{\xi}) .$$

Pour prouver la première relation (2), il suffit donc de montrer que l'on a

$$i(A) = i(A') . \tag{3}$$

On a déjà noté ξ l'image de A dans $K(B(X)X , S(X))$; soit ξ' l'image de A' dans $K(B(X) , S(X))$. On sait que $\lambda(\xi) = \widetilde{\xi} = \lambda(\xi')$. Il suffira donc de démontrer la

PROPOSITION 4. - Si ξ et ξ' sont deux éléments de $K(B(X) , S(X))$ ayant même image dans $K(B(\widetilde{X}) , S(\widetilde{X}))$, ils sont égaux modulo la torsion de $K(B(X) , S(X))$ (ce qui entraîne bien que l'homomorphisme $i_a(X)$ prend la même valeur sur ξ et sur ξ').

Démonstration de la proposition 4 : notons encore

$$\lambda : K(B(X) , S(X)) \otimes \mathbb{Q} \to K(B(\widetilde{X}) , S(\widetilde{X})) \otimes \mathbb{Q}$$

l'homomorphisme canonique. Il suffit de montrer que λ est une **injection**. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(B(X) , S(X)) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\lambda} & K(B(\widetilde{X}) , S(\widetilde{X})) \otimes \mathbb{Q} \\ \approx\downarrow ch & & \approx\downarrow ch \\ H^{pair}(B(X) , S(X) ; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\mu} & H^{pair}(B(\widetilde{X}) , S(\widetilde{X}) ; \mathbb{Q}) \end{array}$$

où μ est induit par l'application de revêtement $\rho : \widetilde{X} \to X$. Tout revient maintenant à montrer que μ est une injection. Or ρ fait de $B(\widetilde{X})$ un revêtement à deux feuillets de $B(X)$, et l'image réciproque de $S(X)$ par ρ est $S(\widetilde{X})$, revêtement à deux feuillets de $S(X)$. Si on calcule la cohomologie avec des cochaînes (nulles sur $S(\widetilde{X})$, resp. sur $S(X)$), le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des cochaînes de

$(B(X)\ ,\ S(X))$ s'identifie au sous-espace des cochaînes de $(B(\tilde{X})\ ,\ S(\tilde{X}))$ invariantes par l'automorphisme involutif, et une opération de moyenne montre alors que μ identifie $H^*(B(X)\ ,\ S(X)\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ au sous-espace des éléments de $H^*(B(\tilde{X}),S(\tilde{X});\underset{\sim}{Q})$ invariants par cet automorphisme. Ainsi μ est bien une injection, et λ aussi.

Ainsi la proposition 4, et en même temps la proposition 3, est démontrée.

5. Plan de la démonstration de la formule (1) lorsque X est connexe et orientée.

D'après le § 4, il suffit de faire la démonstration de (1) dans le cas où X est orientée. Dans ce cas, on a une variante pour définir l'indice topologique i_t (c'est cette variante qu'on avait utilisée dans l'exposé 7, mais sans préciser suffisamment les questions de signes). En effet, le fibré tangent $T(X)$ est alors orienté ; on en déduit une orientation du fibré cotangent $T^*(X)$, conformément à la convention du § 2 ci-dessus. Soit u la classe fondamentale du fibré vectoriel $T^*(X)$ ainsi orienté. L'isomorphisme de Thom-Gysin φ est défini par le cup-produit par u ; d'une façon précise, il associe à tout $x \in H^*(X)$ le produit $u.(\pi^* x)$, où $\pi : T^*(X) \to X$ désigne la projection du fibré $T^*(X)$ (cf. Exp. 4). Considérons le produit

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(\xi)).\tau(X) \in H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Q})\ ;$$

dans ce produit, la composante de degré maximum n ($n = \dim X$) est un multiple rationnel de la classe fondamentale de la variété orientée (et connexe) X ; ce nombre rationnel est précisément égal à l'indice topologique $i_t(\xi)$ défini ci-dessus (§ 1, compte tenu des conventions d'orientation du § 2). Cela résulte évidemment du lemme suivant, dont la vérification est laissée au lecteur :

LEMME. - L'isomorphisme de Thom-Gysin φ transforme la classe fondamentale de cohomologie de la variété orientée X dans la classe fondamentale de la variété orientée $T^*(X)$.

Cette remarque préliminaire étant faite au sujet de i_t , revenons au plan de la démonstration de la relation (1) dans le cas où X est connexe et orientée. Les exposés qui vont suivre seront d'abord consacrés au cas où la dimension de X est paire ; puis, dans le dernier exposé, on montrera que, dans le cas où X est la sphère S^1 , il existe un $\eta \in K(B(S^1)\ ,\ S(S^1))$ tel que

$$i_a(S^1)(\eta) = i_t(S^1)(\eta) \neq 0$$

(à moins que ce ne soit $i_a(S^1)(\eta) = -\, i_t(S^1)(\eta) \neq 0$). Alors, si X est une variété de dimension impaire (connexe et orientée), on pourra appliquer la formule (1) à la variété-produit $X \times S^1$, qui est de dimension paire ; compte tenu des propositions 1 et 2, on obtiendra

$$i_a(X)(\xi) = i_t(X)(\xi) \quad \text{pour tout} \quad \xi \in K(B(X), S(X))$$

(à moins que ce ne soit $i_a(X)(\xi) = - i_t(X)(\xi)$) ; ainsi la formule (1) sera démontrée pour toute variété connexe orientée X, quelle que soit la parité de sa dimension n (à moins que ce ne soit la formule $i_a(X) = (-1)^n i_t(X)$).

Indiquons maintenant le principe de la démonstration lorsque X est <u>orientée de dimension paire</u>. Dans ce cas, on va remplacer la considération des homomorphismes i_a et i_t par d'autres homomorphismes

$$j_a(X) : K(X) \to \underset{\sim}{Z} , \qquad j_t(X) : K(X) \to \underset{\sim}{Q} ,$$

comme suit. On utilise le fait que $K(B(X), S(X))$ est un module sur $K(X)$, et que, après tensorisation par $\underset{\sim}{Q}$, $K(B(X), S(X)) \otimes \underset{\sim}{Q}$ est un module <u>libre</u> sur $K(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ ayant pour base l'élément

$$\chi_o = \chi(\sigma_1(D_o)) ,$$

en notant D_o l'opérateur elliptique d'ordre un qui fait l'objet de l'exposé 17. L'élément de $K(B(X), S(X)) \otimes \underset{\sim}{Q}$ défini par χ_o est indépendant du choix de la structure riemannienne qui a servi à définir D_o, comme le montre le calcul explicite du caractère de Chern (cf. la fin de l'exposé 19).

Ainsi l'application $W \rightsquigarrow W.\chi_o$ de $K(X)$ dans $K(B(X), S(X))$ induit un <u>isomorphisme</u> $K(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \approx K(B(X), S(X)) \otimes \underset{\sim}{Q}$ (cf. Exp. 16 ; on utilise essentiellement le fait que la dimension de X est paire). Posons, pour $W \in K(X)$,

$$j_a(W) = i_a(W.\chi_o) , \qquad j_t(W) = i_t(W.\chi_o) ;$$

ceci définit deux fonctions j_a et j_t sur $K(X)$, qu'on notera aussi $j_a(X)$ et $j_t(X)$ si on veut préciser qu'il s'agit de la variété X ; ce sont des homomorphismes dans $\underset{\sim}{Z}$, resp. dans $\underset{\sim}{Q}$. Il est clair que la formule (1) d'Atiyah-Singer équivaut, lorsque X est orientée et de dimension paire, à

$$j_a(X) = j_t(X) . \tag{1'}$$

Pour prouver l'égalité (1'), on fait d'abord une liste des propriétés des deux membres de cette égalité, comme fonctions de la variété différentiable compacte X, connexe, sans bord, orientée, de dimension paire :

(i) <u>pour une</u> X <u>donnée</u>, $j_a(X)$ <u>et</u> $j_t(X)$ <u>sont des applications additives</u> $K(X) \to \underset{\sim}{Q}$;

(ii) $j_a(X)$ <u>et</u> $j_t(X)$ <u>sont multiplicatives dans le sens suivant : si</u> $W \in K(X)$ <u>et</u> $W' \in K(Y)$, <u>on a</u>

(4) $$j_a(X \times Y)(W \otimes W') = j_a(X)(W) . j_a(Y)(W') ,$$

(5) $$j_t(X \times Y)(W \otimes W') = j_t(X)(W) . j_t(Y)(W') .$$

En fait, les relations (4) et (5) résultent aussitôt des propositions 1 et 2, compte tenu du fait que

$$\chi_o(X \times Y) \in K(B(X \times Y) , S(X \times Y))$$

est le produit (externe) de

$$\chi_o(X) \in K(B(X) , S(X)) \quad \text{et} \quad \chi_o(Y) \in K(B(Y) , S(Y))$$

(cf. Exp. 19, proposition 4).

Avant d'énoncer la propriété (iii), observons que $j_a(X)$ et $j_t(X)$ (comme du reste $i_a(X)$ et $i_t(X)$) peuvent être définis pour une variété non connexe X : on prend la somme des $j_a(X_i)$ (resp. des $j_t(X_i)$, des $i_a(X_i)$, des $i_t(X_i)$) relatifs aux composantes connexes X_i de X .

(iii) <u>soit</u> Y <u>une variété différentiable compacte, connexe, orientée, de dimension impaire, ayant un bord</u> $\partial Y = X$. <u>Soit</u> $W \in K(X)$ <u>un élément induit par un</u> $V \in K(Y)$. <u>Alors</u>

(6) $$j_a(X)(W) = 0 , \qquad j_t(X)(W) = 0 .$$

La première de ces relations sera démontrée plus tard (Exp. 23). Prouvons ici la seconde. On veut démontrer

$$i_t(W.\chi_o) = 0 ,$$

ce qui exprime que la composante de degré n (rappelons que $n = \dim X$ est pair) de

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(W.\chi_o)).\tau(X)$$

est nulle ; notons pour un instant u cette composante de degré n . Si

$$u = \sum_i q_i \, u_i$$

(où $q_i \in \underset{\sim}{Q}$, u_i désignant la classe fondamentale de cohomologie de la i-ième composante X_i de X), on sait que

$$\delta u \in H^{n+1}(Y , X) ,$$

image de u par l'homomorphisme δ de la suite exacte de cohomologie relative de (Y , X) , est égal à $(\sum_i q_i)$ fois la classe fondamentale de cohomologie relative de Y modulo X . Tout revient donc à démontrer que $\delta u = 0$, ou encore que $u \in H^n(X ; \underset{\sim}{Q})$ est dans l'image de l'homomorphisme naturel $H^n(Y ; \underset{\sim}{Q}) \to H^n(X ; \underset{\sim}{Q})$. Il suffit de montrer que

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(W.\chi_o)).\tau(X)$$

est dans l'image de $H^*(Y ; \underset{\sim}{Q}) \to H^*(X ; \underset{\sim}{Q})$.

Or, $\mathrm{ch}(W.\chi_o) = \mathrm{ch}(W).\mathrm{ch}(\chi_o)$, d'où

$$\varphi^{-1}\,\mathrm{ch}(W.\chi_o) = \mathrm{ch}(W).\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(\chi_o)) \;;$$

puisque $\mathrm{ch}(W)$ est l'image de $\mathrm{ch}(V) \in H^*(Y ; \underset{\sim}{Q})$, il reste à montrer que

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(\chi_o)).\tau(X)$$

est dans l'image de $H^*(Y ; \underset{\sim}{Q}) \to H^*(X ; \underset{\sim}{Q})$. Or c'est un polynôme par rapport aux classes de Pontrjagin tangentes de la variété X (cf. Exp. 19), et ces classes sont les restrictions à X des classes de Pontrjagin tangentes à la variété Y , puisque la restriction à X du fibré $T(Y)$ est somme directe de $T(X)$ et d'un fibré trivial (à fibres de dimension 1). Ceci achève la démonstration.

6. L'algèbre de cobordisme.

Les propriétés (i) , (ii) et (iii) des fonctions j_a et j_t peuvent s'exprimer de la manière suivante. Considérons l'algèbre graduée $\mathcal{B}$ définie comme suit : la somme directe $\bigoplus_X K(X)$ étendue aux classes de variétés différentiables X compactes, connexes, orientées, sans bord, est graduée par $\dim X$. C'est une <u>algèbre</u> pour la multiplication définie par le produit externe $K(X) \otimes K(X') \to K(X \times X')$. Procédons de même avec les variétés différentiables Y compactes, connexes, orientées, ayant éventuellement un bord. On définit une opération de "bord" :

$$\partial : \bigoplus_Y K(Y) \to \bigoplus_X K(X)$$

qui diminue le degré de 1 , en envoyant chaque $K(Y)$ dans $\bigoplus_X K(X)$ par la somme des applications $K(Y) \to K(X)$ relatives aux composantes connexes X du bord ∂Y . Le conoyau de ∂ est une <u>algèbre graduée</u> $\mathcal{B}$, comme on le vérifie facilement.

Les propriétés (i) , (ii) et (iii) expriment alors que j_a et j_t définissent des <u>homomorphismes d'algèbres</u>

$$j_a : \mathbb{B} \otimes \underset{\sim}{Q} \to \underset{\sim}{Q} , \qquad j_t : \mathbb{B} \otimes \underset{\sim}{Q} \to \underset{\sim}{Q} ,$$

nuls sur les éléments de degré impair. Dans les exposés suivants, on déterminera la structure de l'algèbre $\mathbb{B} \otimes \underset{\sim}{Q}$: c'est une algèbre de polynômes (à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}$) dont on explicitera les générateurs, qui sont d'ailleurs de degré pair. Alors, pour démontrer que $j_a = j_t$, il suffira de vérifier que j_a et j_t prennent les mêmes valeurs sur les générateurs de cette algèbre de polynômes, ce qui sera immédiat.