Luc Illusie

Symboles elliptiques

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 19, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A4_0>

23 mars et 20 avril 1964

SYMBOLES ELLIPTIQUES

par Luc ILLUSIE

L'objet de cet exposé est de montrer comment le calcul des caractères de Chern de certains opérateurs elliptiques ou complexes elliptiques d'opérateurs sur des variétés différentiables compactes orientées se ramène à un calcul de classes caractéristiques de fibrés vectoriels.

1. Définitions et méthode de calcul.

Notations. - Nous désignerons par $\mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$) la catégorie des fibrés vectoriels réels orientés (resp. réels orientés de dimension paire, complexes) de base paracompacte, les morphismes étant stricts.

Si $V \in \mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$), nous noterons V^o le complémentaire de la section nulle de V .

DÉFINITION 1. - Soit F un foncteur covariant de $\mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$) dans la catégorie des complexes finis de $\mathcal{E}_C$, tel que, pour tout $V \in \mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$),

$$F(V) = (0 \to F_o(V) \to F_1(V) \to \dots \to 0)$$

ait pour base V , et que, pour tout morphisme $V \xrightarrow{f} V'$ de $\mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$,$\mathcal{E}_C$), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{F(f)} & F(V') \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

soit commutatif.

On dit que F est un symbole elliptique sur $\mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$) si, pour tout $V \in \mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$) , $F(V)$ est acyclique au-dessus de V^o .

Soit F un symbole elliptique, que nous supposerons défini sur $\mathcal{E}_R$ pour fixer les idées. Si $V \in \mathcal{E}_R$ a une base compacte, $F(V)$ définit, d'après l'exposé 15, un élément de $K(B(V) , S(V))$, où $B(V)$ et $S(V)$ sont les fibrés en boules et en sphères associés à une métrique riemannienne sur V . Introduisons, pour plus de commodité, la limite inductive $K(V , V^o)$ des groupes $K(B , C)$ suivant le système $\mathcal{S}$ des couples $(B\ ,\ C)$ formés d'un fibré en boules B $(\ \|v\| \leqslant r\ )$ et d'un fibré en couronnes C $(\ 0 < \varepsilon \leqslant \|v\| \leqslant r\ )$ associés à une métrique $\|\ \|$ (non fixée) sur V. (Une métrique sur V détermine un isomorphisme du groupe $K(B(V)\ ,\ S(V))$ correspondant sur $K(V\ ,\ V^o)$; mais $K(V\ ,\ V^o)$ a l'avantage de ne pas dépendre du choix d'une métrique.) Notons $[F(V)]$ l'élément de $K(V\ ,\ V^o)$ défini par $F(V)$. Par passage à la limite inductive suivant $\mathcal{S}$, et compte tenu du fait que $\lim H^*(B\ ,\ C)$ s'identifie canoniquement à $H^*(V\ ,\ V^o)$, le caractère de Chern définit un homomorphisme, noté encore $ch : K(V\ ,\ V^o) \to H^*(V\ ,\ V^o)$. (Il s'agira toujours de cohomologie à coefficients rationnels.) Soit X_V la base de V. Posons

$$f(V) = \varphi^{-1}\ ch[F(V)] \in H^*(X_V)\ ,$$

φ étant l'isomorphisme de Thom-Gysin. On obtient ainsi, pour chaque fibré $V \in \mathcal{E}_R$, de <u>base compacte</u>, une classe $f(V) \in H^*(X_V)$ dépendant fonctoriellement de V. Afin de calculer plus aisément f, il convient de généraliser la définition de $f(V)$ au cas où la base de V n'est plus nécessairement compacte. Soit V un fibré universel $\in \mathcal{E}_R$, de base X. Pour chaque compact $A \subset X$, on a un élément $f(V|_A) \in H^*(A)$, et il résulte aussitôt de la fonctorialité de f que les $f(V_A)$ définissent un élément $f(V) \in \varprojlim_A H^*(A)$; mais

$$\varprojlim_A H^*(A) = \varprojlim_{X_n} H^*(X_n)\ ,$$

où les X_n sont les grassmanniennes finies de X, et

$$\varprojlim_{X_n} H^*(X_n) = H^{**}(X) \qquad \text{(cf. exposés 5 et 18);}$$

on a donc $f(V) \in H^{**}(X)$. Si maintenant V' est un fibré quelconque $\in \mathcal{E}_R$, image réciproque d'un fibré universel V pour une application classifiante α, nous poserons

$$f(V') = \alpha^*\ f(V) \in H^{**}(X')\ ,$$

X' étant la base de V' (la notation est justifiée par le fait que, si X' est compact, alors $f(V')$ coïncide avec l'élément défini plus haut). Il est clair que $f(V')$ ainsi défini dépend fonctoriellement de V'. En résumé, on a montré :

PROPOSITION 1. - A chaque symbole elliptique F sur $\mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$) correspond une <u>classe caractéristique</u> f sur $\mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$). Pour tout $V \in \mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$) de base compacte, on a :

$$f(V) = \varphi^{-1}\ ch[F(V)] \in H^*(X_V)\ ,$$

où $[F(V)]$ est l'élément de $K(V, V^{o})$ défini par $F(V)$, et $\varphi : H^{*}(X_V) \to H^{*}(V, V^{o})$ l'isomorphisme de Thom-Gysin.

DÉFINITION 2. - La classe caractéristique f associée à un symbole elliptique F s'appelle caractère de Chern de F et se note $\operatorname{ch} F$.

DÉFINITION 3. - Soit F un symbole elliptique sur $\mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$, $\mathcal{E}_C$). On dit que F est multiplicatif si, quels que soient V et $V' \in \mathcal{E}_R$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}, \mathcal{E}_C$) de base compacte, on a :

$$[F(V \oplus V')] = [F(V) \otimes F(V')] \in K(V \oplus V', (V \oplus V')^{o}) .$$

PROPOSITION 2.

a. Si F est un symbole elliptique multiplicatif sur $\mathcal{E}_C$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$), alors $\operatorname{ch} F$ est une classe multiplicative (i. e. transformant la somme directe dans le cup-produit) sur $\mathcal{E}_C$ (resp. $\mathcal{E}_R^{pair}$).

b. Si F est un symbole elliptique multiplicatif sur $\mathcal{E}_R$, alors $(\operatorname{ch} F)(V) = 0$ pour tout $V \in \mathcal{E}_R$ de dimension impaire, et $\operatorname{ch} F$ est une classe multiplicative sur $\mathcal{E}_R^{pair}$.

Pour la démonstration, nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 1. - Soit V (resp. V') un fibré vectoriel réel orienté, de base compacte, à fibres de dimension n (resp. n'). Soit E (resp. E') un complexe de fibrés vectoriels complexes sur V (resp. V') acyclique sur V^{o} (resp. V'^{o}). On a alors

$$\varphi^{-1} \operatorname{ch}[E \otimes E'] = (-1)^{nn'} (\varphi^{-1} \operatorname{ch}[E])(\varphi^{-1} \operatorname{ch}[E']) ,$$

φ désignant comme toujours l'isomorphisme de Thom-Gysin.

Démonstration. - Pour chaque paire (B, C) (resp. (B', C')) formée d'un fibré en boules et d'un fibré en couronnes compactes associés à V (resp. V'), on a (cf. exposé 15) un produit

$$p : K(B, C) \otimes K(B', C') \to K(B \times B', (C \times B') \cup (B \times C')) .$$

On en déduit, par passage à la limite inductive, un produit

$$p : K(V, V^{o}) \otimes K(V', V'^{o}) \to K(V \oplus V', (V \oplus V')^{o}) .$$

Il résulte de la définition de p et de la commutativité des foncteurs $\otimes$ et $\varinjlim$ que $p([E] \otimes [E']) = [E \otimes E']$. D'autre part, la propriété multiplicative du caractère de Chern (cf. exposé 15, § 6) donne, par passage à la limite inductive, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K(V\ ,\ V^{o}) \otimes K(V'\ ,\ V'^{o}) & \xrightarrow{p} & K(V \oplus V'\ ,\ (V \oplus V')^{o}) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle ch\otimes ch} & & {\scriptstyle ch}\Big\downarrow \\ H(V\ ,\ V^{o}) \otimes H(V'\ ,\ V'^{o}) & \xrightarrow{\cup} & H(V \oplus V'\ ,\ (V \oplus V')^{o})\ . \end{array}$$

On a donc :

$$ch([E \otimes E']) = ch[E]\ ch[E']\ .$$

Soit u (resp. u') la classe fondamentale de V (resp. V') (la classe fondamentale de $V \oplus V'$ est donc $u \cup u'$). On a :

$$\begin{aligned} uu'(\varphi^{-1}\ ch[E \otimes E']) = ch[E]\ ch[E'] &= (u\varphi^{-1}\ ch[E])(u'\varphi^{-1}\ ch[E']) \\ &= (-1)^{nn'}\ uu'(\varphi^{-1}\ ch[E])(\varphi^{-1}\ ch[E'])\ , \end{aligned}$$

soit finalement

$$\varphi^{-1}\ ch[E \otimes E'] = (-1)^{nn'}(\varphi^{-1}\ ch[E])(\varphi^{-1}\ ch[E'])\ .$$

LEMME 2. - Soit F un symbole elliptique sur $\mathcal{E}_R$. Alors $(ch\ F)(V) = 0$ si $V \in \mathcal{E}_R$ est de base compacte et de dimension 1 (donc trivial).

En effet, il suffit de le vérifier lorsque V a pour base un point, auquel cas c'est évident car

$$K(V\ ,\ V^{o}) = \widetilde{K}(S^{1}) = 0\ .$$

Donnons maintenant la démonstration de la proposition 2. Il suffit de se placer dans le cas universel.

a. Soit V (resp. V') $\in \mathcal{E}_C$ ou $\mathcal{E}_R^{pair}$ un fibré universel de base X (resp. X'). Pour tout compact $A \subset X$ (resp. $A' \subset X'$), on a, d'après le lemme 1,

$$(ch\ F)(V|_A \oplus V|_{A'}) = (ch\ F)(V|_A)\ \ (ch\ F)(V|_{A'})\ ,$$

d'où, par passage à la limite projective,

$$(ch\ F)(V \oplus V') = (ch\ F)(V)\ \ (ch\ F)(V')\ .$$

(Il faut vérifier que

$$\varprojlim_{(A,A')}\ (ch\ F)(V|_A \oplus V|_{A'}) = (ch\ F)(V \oplus V')$$

et que le cup-produit commute à la limite projective, ce qui est facile, V et V' étant des fibrés universels.)

b. Si V et $V' \in \mathcal{E}_R$ sont deux fibrés universels dont l'un est de dimension paire, on montre, comme dans (a), que $(\mathrm{ch}\ F)(V \oplus V') = (\mathrm{ch}\ F)(V)\ (\mathrm{ch}\ F)(V')$, ce qui, en vertu du lemme 2 et du théorème 2 de l'exposé 18, démontre (b). Ceci achève la démonstration de la proposition 2.

Si F est un symbole elliptique multiplicatif, le calcul de $\mathrm{ch}\ F$ se ramène donc, dans tous les cas, d'après les résultats de l'exposé 18, au calcul de la "série génératrice" $(\mathrm{ch}\ F)(x) = (\mathrm{ch}\ F)(E_1(\underset{\sim}{C}))$, où $E_1(\underset{\sim}{C})$ est le fibré universel complexe de dimension 1, et $x = c_1(E_1(\underset{\sim}{C}))$.

PROPOSITION 3. - La série <u>génératrice</u> d'un symbole elliptique multiplicatif F est donnée par la formule :

(1) $$(\mathrm{ch}\ F)(x) = \Big(\sum_i (-1)^i\ \mathrm{ch}\ F_i(E_1(\underset{\sim}{C}))\Big)/x \ .$$

(On a identifié, dans cette formule, $H^{**}(E_1(\underset{\sim}{C}))$ à $H^{**}(BU(1))$ au moyen de la projection $\pi : E_1(\underset{\sim}{C}) \to BU(1)$.)

<u>Démonstration</u>. - Posons, pour simplifier l'écriture, $E_1(\underset{\sim}{C}) = V$, $BU(1) = X$. Il suffit de démontrer que, pour tout compact $A \subset X$, on a :

$$\chi(V|_A)\ (\mathrm{ch}\ F)(V|_A) = \pi^{*-1}\Big(\sum_i (-1)^i\ \mathrm{ch}\ F_i(V|_A)\Big) ,$$

$\chi(V|_A)$ désignant la classe d'Euler de $V|_A$, ou encore la restriction de x à A . Posons $V|_A = W$. L'homomorphisme canonique

$$K(B(W)\ ,\ C(W)) \to K(B(W))$$

(où $B(W)$ et $C(W)$ sont des fibrés en boules et en couronnes associés à W) donne, par passage à la limite inductive, un homomorphisme $K(W\ ,\ W^o) \to K(W)$, et l'image de $[F(W)]$ par cet homomorphisme est égale (exposé 15, § 1, proposition 1) à $\sum_i (-1)^i [F_i(W)]$. D'autre part, la fonctorialité du caractère de Chern et la définition de la classe d'Euler (exposé 4) impliquent que le diagramme suivant (où φ est l'isomorphisme de Thom-Gysin et $\chi(W)$ désigne la multiplication à gauche par $\chi(W)$) est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K(W\ ,\ W^o) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] & K(W) \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] \\
H^*(W\ ,\ W^o) \arrow[r] & H^*(W) \\
H^*(A) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\chi(W)"] & H^*(A) \arrow[u, "\pi^*"']
\end{tikzcd} .$$

Comme, d'après la proposition 1, $(\mathrm{ch}\ F)(W) = \varphi^{-1}\ \mathrm{ch}\ F(W)$, on a donc :

$$\chi(W)\ (\mathrm{ch}\ F)(W) = \pi^{*-1}(\sum_i (-1)^i\ \mathrm{ch}\ F_i(W)) ,$$

ce qui achève la démonstration.

(N. B. - La formule (1) est encore valable si F n'est pas supposé multiplicatif, la démonstration n'ayant pas fait intervenir cette hypothèse ; mais le calcul de $(\mathrm{ch}\ F)(x)$ n'a vraiment d'intérêt que lorsque F est multiplicatif, puisque dans ce cas $(\mathrm{ch}\ F)(x)$ détermine $\mathrm{ch}\ F$.)

2. Exemples.

Nous allons maintenant calculer les caractères de Chern de quelques symboles elliptiques classiques. Nous appliquerons chaque fois les résultats obtenus au cas du fibré cotangent $T^*(X)$ à une variété différentiable compacte orientée X . Si, lorsque X est orientée, $T(X)$ est orienté sans ambiguïté, il y a au contraire plusieurs manières canoniques d'orienter $T^*(X)$. Nous ferons ici la convention suivante (on reviendra sur cette question dans un exposé ultérieur). Si V est un fibré vectoriel réel orienté de dimension n , nous orienterons son dual V^* de manière que, dans chaque fibre V_x^* , l'orientation soit donnée par $e'_n \wedge \dots \wedge e'_1$ lorsque V_x est orienté par $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ ($(e_1 , \dots , e_n)$ est une base de V_x et $(e'_1 , \dots , e'_n)$ est la base duale). Quand V est le fibré réel sous-jacent à un fibré complexe W , l'orientation qu'on vient de définir sur V^* coïncide avec celle induite par la structure complexe de W^* , lorsque l'on identifie canoniquement V^* au fibré réel sous-jacent à W^* .

Exemple 1 : d . - A chaque fibré réel orienté $V \xrightarrow{\pi} X$ associons le complexe de fibrés vectoriels complexes sur V

$$d(V) = (0 \to \pi^*(\Lambda^0 V \otimes \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \pi^*(\Lambda^1 V \otimes \mathbb{C}) \to \dots \to 0) ,$$

d étant défini, au-dessus de chaque $v \in V$, par la multiplication extérieure (à gauche) par v . On voit aussitôt qu'on obtient ainsi un symbole elliptique multiplicatif d sur $\mathcal{E}_R$. Calculons son caractère de Chern. On sait déjà (proposition 2) que $(\mathrm{ch}\ d)(V) = 0$ si $V \in \mathcal{E}_R$ est de dimension impaire. On a d'autre part ($\Lambda^1_R\ E_1(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$ s'identifiant canoniquement à $E_1(\mathbb{C}) \oplus \overline{E_1(\mathbb{C})}$) :

$$d(E_1(\mathbb{C})) = (0 \to 1_{\mathbb{C}} \to \pi^*(E_1(\mathbb{C}) \oplus \overline{E_1(\mathbb{C})}) \to 1_{\mathbb{C}} \to 0) ,$$

1_C désignant le fibré trivial de dimension 1. D'après la formule (1) du § 1, la série génératrice de d est donc donnée par

$$(\mathrm{ch}\ d)(x) = (2 - e^x - e^{-x})/x = - 2\ \mathrm{sh}^2(x/2)/(x/2) .$$

On en déduit (exposé 18) que, pour tout $V \in \mathcal{E}_R$ de dimension paire $2n$,

$$(\mathrm{ch}\ d)(V) = \prod_{i=1}^{n} - 2\ \mathrm{sh}^2(x_i/2)/(x_i/2) ,$$

les classes de Pontrjagin de V étant les fonctions symétriques élémentaires des x_i^2 , et la classe d'Euler de V étant égale à $\prod_{i=1}^{n} x_i$. Si $V = T^*(X)$ est le fibré cotangent à une variété différentiable compacte orientée X , de dimension $2n$, $d(V)$ n'est autre que le symbole du complexe elliptique d défini par l'opérateur de différentiation extérieure sur les formes différentielles complexes. Utilisant la formule (démontrée dans l'exposé 18)

$$\tau(V \otimes \underset{\sim}{C}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i/2)^2/\ \mathrm{sh}^2(x_i/2)$$

pour V de dimension $2n$, on voit que l'indice topologique $i_t(d)$ est égal à la valeur de $(-1)^n\ \chi(T^*(X))$ sur la classe fondamentale de X . Compte tenu de la convention d'orientation indiquée plus haut, on a entre les classes d'Euler des fibrés $T(X)$ et $T^*(X)$ la relation

$$(-1)^n\ \chi(T^*(X)) = \chi(T(X)) .$$

En résumé :

$i_t(d) = 0$ pour une variété X de dimension impaire,

$i_t(d) =$ caractéristique d'Euler-Poincaré de X , si X est de dimension paire.

Comme l'indice analytique de d est, d'après le théorème de de Rham,

$$i_a(d) = \sum_p (-1)^p \dim_{\underset{\sim}{C}} H^p(X , \underset{\sim}{C}) ,$$

la formule d'Atiyah-Singer $i_t(d) = i_a(d)$ se trouve bien vérifiée dans le cas de l'opérateur d .

<u>Exemple 2</u> : d'' . - A tout fibré vectoriel complexe $V \xrightarrow{\pi} X$ associons le complexe de fibrés vectoriels complexes sur V

$$d''(V) = (0 \to \pi^*(\Lambda^0\overline{V}) \xrightarrow{d''} \pi^*(\Lambda^1\overline{V}) \xrightarrow{d''} \to 0) ,$$

où $\overline{V}$ désigne le fibré "conjugué" de V , et d'' la multiplication extérieure (à gauche) par $\overline{v}$ au-dessus de chaque $v \in V$ ($\overline{v}$ étant l'image de v par la bijection canonique $V \to \overline{V}$ définie par l'identification des fibrés réels sous-jacents). On vérifie immédiatement que $V \rightsquigarrow d''(V)$ est un symbole elliptique multiplicatif sur $\mathcal{E}_C$. Calculons son caractère de Chern. On a :

$$d''(E_1(\underset{\sim}{C})) = (0 \to 1_C \to \pi^*\ \overline{E_1(C)} \to 0) ,$$

d'où, en vertu de la formule (1) du § 1,

$$(\mathrm{ch}\ d'')(x) = (1 - e^{-x})/x .$$

Il en résulte que, pour tout $V \in \mathcal{E}_C$,

$$(\mathrm{ch}\, d'')(V) = \prod (1 - e^{-x_i})/x_i \ ,$$

les classes de Chern de V étant les fonctions symétriques élémentaires des x_i ; autrement dit

$$(\mathrm{ch}\, d'')(V) = (\tau(V))^{-1} \ ,$$

$\tau(V)$ désignant la classe de Todd du fibré complexe V (exposé 6).

Si maintenant $V = T^*(X)$ est le fibré cotangent à une variété analytique complexe X , $d''(V)$ n'est autre que le symbole du complexe elliptique d'opérateurs défini par l'opérateur usuel d'' sur X :

$$0 \to \Omega^{o,o} \xrightarrow{d''} \Omega^{o,1} \xrightarrow{d''} \dots \to \Omega^{o,q} \xrightarrow{d''} \dots \to 0$$

(où $\Omega^{p,q}$ est l'espace des formes de type $(p \ , \ q)$.

Plus généralement, soit W un fibré holomorphe sur X , et considérons le complexe elliptique d''_W obtenu en faisant opérer d'' sur les formes différentielles de type $(o \ , \ q)$ à coefficients dans W :

$$0 \to \Omega^{o,o}(W) \xrightarrow{d''} \Omega^{o,1}(W) \xrightarrow{d''} \dots \to \Omega^{o,q}(W) \xrightarrow{d''} \dots \to 0 \ .$$

Il est clair que son symbole $d''_W(V)$ vérifie la relation

$$d''_W(V) = W \otimes d''(V) \ ,$$

et que par suite,

$$(\mathrm{ch}\, d''_W)(V) = (\mathrm{ch}\, W)\ (\mathrm{ch}\, d'')(V) \ .$$

Comme d'autre part $V \otimes \underset{\sim}{C}$ est canoniquement isomorphe à $V \oplus \overline{V}$, on a

$$\tau(V \otimes \underset{\sim}{C}) = \tau(V \oplus \overline{V}) = \tau(V)\ \tau(\overline{V}) \qquad \text{(exposé 6, § 4).}$$

On trouve finalement pour l'indice topologique de d''_W :

$$i_t(d''_W) = \langle (\mathrm{ch}\, W)\ \tau(T(X)) \ , \ [X] \rangle \ .$$

Mais l'indice analytique de d''_W est donné, d'après le théorème de Dolbeault, par

$$i_a(d''_W) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(X \ , \ W) \ ,$$

où les $H^p(X \ , \ W)$ sont les espaces de cohomologie de X à valeurs dans le faisceau des germes de sections holomorphes de W . La formule d'Atiyah- Singer aura donc pour conséquence la

<u>Formule de Riemann-Roch-Hirzebruch</u> :

$$\sum_p (-1)^p \dim H^p(X \ , \ W) = \langle (\mathrm{ch}\, W)\ \tau(T(X)) \ , \ [X] \rangle \ .$$

Il est à noter que X est ici une variété analytique complexe compacte quelconque, tandis que la formule démontrée dans ([1] , § 21) s'appliquait seulement aux variétés algébriques projectives.

Exemple 3 : D_0. - Soit $V \xrightarrow{\pi} X$ un fibré réel orient de dimension paire. Au moyen d'une métrique riemannienne sur V, on construit, comme dans l'exposé 17, un opérateur $\alpha : \Lambda V \otimes \underset{\sim}{C} \to \Lambda V \otimes \underset{\sim}{C}$ vérifiant $\alpha^2 = I$; si $\Lambda^+ V$ et $\Lambda^- V$ sont les sous- fibrés propres correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1 de α, on a :

$$\Lambda V \otimes \underset{\sim}{C} = \Lambda^+ V \oplus \Lambda^- V .$$

Considérons alors le complexe de fibrés vectoriels complexes sur V :

$$D_0(V) = (0 \to \pi^* \Lambda^+ V \xrightarrow{D_0} \pi^* \Lambda^- V \to 0) ,$$

où D_0 est défini par

$$D_0(v)x = v \wedge x + x \llcorner v = v \wedge x - \star(v \wedge (\star x)) ,$$

pour $v \in V$ et $x \in \pi^* \Lambda^+ V$. $D_0(V)$ est acyclique au-dessus de V^0, car $D_0(v)$ est, pour tout $v \in V$, une similitude de rapport $\|v\|$. D'autre part, la classe d'isomorphie de $D_0(V)$ (dans la catégorie des complexes de $\mathcal{E}_C$ de base V) est un foncteur covariant de V pour $V \in \mathcal{E}_R^{pair}$. Nous considérerons D_0, par abus de langage, comme un symbole elliptique sur $\mathcal{E}_R^{pair}$ (ceci ne présente aucun inconvénient, vu que les résultats du § 1 restent valables si l'on suppose seulement que c'est la classe d'isomorphie de $F(V)$ qui dépend fonctoriellement de V). Il est encore vrai, mais non évident, que D_0 est multiplicatif. De manière précise, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - Si V et $V' \in \mathcal{E}_R^{pair}$ sont deux fibrés de base compacte, munis chacun d'une métrique, et si $V \oplus V' = W$ est muni de la métrique et de l'orientation produit, alors

(a) $$\begin{cases} \Lambda^+ W = (\Lambda^+ V \otimes \Lambda^+ V') \oplus (\Lambda^- V \otimes \Lambda^- V') \\ \Lambda^- W = (\Lambda^- V \otimes \Lambda^+ V') \oplus (\Lambda^+ V \otimes \Lambda^- V') \end{cases}$$

(b) $$[D_0(W)] = [D_0(V) \otimes D_0(V')] \in K(W , W^0) .$$

(On identifie, dans cette proposition, ΛW au produit tensoriel gradué $\Lambda V \hat{\otimes} \Lambda V'$).

Démonstration. -

(a) Soient $2m$ et $2n$ les dimensions respectives des fibrés V et V'. Montrons d'abord que, si $a \in \Lambda V$ et $b \in \Lambda V'$ sont des éléments homogènes de degrés p et q respectivement, on a :

(2) $$\star(a \otimes b) = (-1)^{pq} (\star a) \otimes (\star b) .$$

En effet, plaçons-nous dans une fibre $W_{(x,y)} = V_x \oplus V'_y$, et choisissons une base orthonormale $(e_1 , \dots , e_{2m})$ de V_x (resp. $(f_1 , \dots , f_{2n})$ de V'_y), telle que $e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m}$ (resp. $f_1 \wedge \dots \wedge f_{2n}$) définisse l'orientation de V_x (resp. V'_y) ; l'orientation de $W_{(x,y)}$ est donc définie par

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m} \wedge f_1 \wedge \dots \wedge f_{2n} .$$

Soit $(i_1 , \dots , i_p , i_{p+1} , \dots , i_{2m})$ (resp. $(j_1 , \dots, j_q , j_{q+1} , \dots , j_{2n})$) une permutation paire de $(1 , \dots , 2m)$ (resp. $(1 , \dots , 2n)$). On a alors, par définition :

$$\star(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = e_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_{2m}}$$

$$\star(f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_q}) = f_{j_{q+1}} \wedge \dots \wedge f_{j_{2n}} .$$

La signature de la permutation $(i_1 , \dots , i_p , j_1 , \dots , j_q , i_{p+1} , \dots , i_{2m} , j_{q+1} , \dots , j_{2n})$ de $(1 , \dots , 2m , 1 , \dots , 2n)$ étant égale à $(-1)^{pq}$, on a donc :

$$\star(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \otimes f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_1}) = (-1)^{pq}(\star e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) \otimes (\star f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_q})$$

d'où la formule (2) (puisqu'il suffit de la vérifier dans chaque fibre sur des éléments de base). On en déduit que, quels que soient $a \in \Lambda V \otimes \underset{\sim}{C}$ et $v \in \Lambda V' \otimes \underset{\sim}{C}$, on a :

$$\alpha(a \otimes b) = \alpha a \otimes \alpha b .$$

En effet, supposons que a et b soient homogènes de degrés p et q respectivement ; alors

$$\alpha a \otimes \alpha b = i^{p(p+1)-m} \star a \otimes i^{q(q+1)-n} \star b = \varepsilon \star (a \otimes b) ,$$

avec

$$\varepsilon = (-1)^{pq} i^{p(p+1)-m+q(q+1)-n} = i^{(p+q)(p+q+1)-(m+n)} ,$$

soit $\alpha(a \otimes b) = \alpha a \otimes \alpha b$. Ceci achève évidemment la démonstration de (a) .

(b) Au-dessus du point $v \oplus v' \in W$, D_o est défini par

$$D_o(v \oplus v') \times (a \otimes a') = (v \oplus v') \wedge (a \otimes a') + (a \otimes a') \llcorner (v \oplus v') ,$$

pour $a \otimes a' \in \Lambda W \otimes \underset{\sim}{C}$.

Mais

$$(v \oplus v') \wedge (a \otimes a') = (v \wedge a) \otimes a' + (-1)^p a \otimes (v' \wedge a')$$

si a est homogène de degré p . D'autre part,

$$\begin{aligned}(a \otimes a') \llcorner (v \oplus v') &= \star((v \oplus v') \wedge (\star(a \otimes a')))\\ &= (-1)^{pp'} \star((v \oplus v') \wedge (\star a \times \star a')) \qquad (\ a' \text{ homogène de degré } p')\\ &= (-1)^{pp'} \star((v \wedge \star a) \otimes \star a') + (-1)^{pp'+p} \star(\star a \otimes (v' \wedge \star a'))\\ &= (a \llcorner v) \otimes a' + (-1)^p\, a \otimes (a' \llcorner v') \ .\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$D_o(v \oplus v') \times (a \otimes a') = D_o(v).a \otimes a' + (-1)^p\, a \otimes D_o(v').a' \ .$$

Notons ω l'automorphisme de $\Lambda V \otimes C$ défini dans chaque fibre par la multiplication par $(-1)^p$ sur les éléments de degré p . Ce qui précède montre que $D_o(W)$ s'exprime, relativement à la décomposition (a), par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} D_o(V) \otimes I & \omega \otimes D_o(V') \\ \omega \otimes D_o(V') & D_o(V) \otimes I \end{pmatrix}$$

Mais, comme ω anticommute avec D_o et que $\omega^2 = I$, on a l'identité

$$\begin{pmatrix} I \otimes I & 0 \\ 0 & \omega \otimes I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I \otimes I & 0 \\ 0 & -\omega \otimes I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_o(V) \otimes I & -I \otimes D_o(V') \\ I \otimes D_o(V') & D_o(V) \otimes I \end{pmatrix}$$

qui, en vertu de l'exposé 15, § 3, et grâce au fait que D_o est hermitien, entraîne

$$[D_o(W)] = [D_o(V) \otimes D_o(V')] \ . \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Calculons maintenant le caractère de Chern de D_o . Etablissons d'abord un lemme.

LEMME 3. - Soit V un fibré vectoriel complexe de dimension 1. Soit J l'opérateur de carré -1 défini sur le fibré réel sous-jacent $V_{\underset{\sim}{R}}$ par la multiplication par i dans V . Si $V_{\underset{\sim}{R}}$ est muni d'une métrique invariante par J , alors les applications :

$$1 + \alpha \ : \ \Lambda\overline{V} \to \Lambda^+ V_{\underset{\sim}{R}}$$

et

$$1 - \alpha \ : \ \Lambda V \to \Lambda^- V_{\underset{\sim}{R}}$$

sont des $\underset{\sim}{C}$-isomorphismes.

En effet, $1 + \alpha$ est un $\underset{\sim}{C}$-isomorphisme de $\Lambda^o \overline{V} = 1_{\underset{\sim}{C}}$ sur $(\Lambda^o + \Lambda^2)^+ V_{\underset{\sim}{R}}$. D'autre part, $\Lambda^1 \overline{V} = \overline{V}$ et $\star$ coïncide avec J sur V ; on a donc

$$1 + \alpha = 1 + iJ \ ,$$

d'où

$$(1 + \alpha)J = - i(1 + \alpha) ,$$

ce qui prouve que $1 + \alpha$ est un $\underset{\sim}{C}$-antiisomorphisme de V sur $\Lambda^{1+} V_R$, donc un $\underset{\sim}{C}$-isomorphisme de $\overline{V}$ sur $\Lambda^{1+} V_R$. On montre de même l'assertion relative à $1 - \alpha$.

Appliquons le lemme à $V = E_1(\underset{\sim}{C})$. La formule (1) du § 1 donne alors :

$$(\mathrm{ch}\ D_o)(x) = (e^{-x} - e^{x})/x .$$

On a donc, pour tout $V \in \mathcal{E}_R^{\mathrm{pair}}$ de dimension $2n$:

$$(\mathrm{ch}\ D_o)(V) = \prod_{i=1}^{n} (e^{-x_i} - e^{x_i})/x_i ,$$

les classes de Pontrjagin de V étant les fonctions symétriques élémentaires des x_i^2. La composante de degré zéro de $(\mathrm{ch}\ D_o)(V)$ n'est pas nulle : elle est égale à $(- 2)^n$. Ceci montre (exposé 16) que, si $V \in \mathcal{E}_R^{\mathrm{pair}}$ a une base compacte X, l'application $K(X) \otimes Q \to K(V , V^o) \times Q$ définie par $x \rightsquigarrow x.[D_o(V)]$ est un isomorphisme. Le lecteur vérifiera, à titre d'exercice, que, si V_a est une fibre quelconque de V, l'image de $[D_o(V)]$ dans $K(V_a , V_a^o)$ par l'application canonique : $K(V , V^o) \to K(V_a , V_a^o)$ est égale à $(- 2\eta)^n$, où $\eta = [h] - 1$ (h = fibré de Hopf sur S^2) est le générateur de $\widetilde{K}(S^2)$ que le caractère de Chern envoie sur le générateur de $H^2(S^2 , \underset{\sim}{Z})$ défini par l'orientation de $S^2 = P_1(\underset{\sim}{C})$.

Si maintenant $V = T^*(X)$ est le fibré cotangent à une variété différentiable compacte orientée X de dimension $2n$, $D_o(V)$ n'est autre que le symbole de l'opérateur D_o sur X défini dans l'exposé 17. Compte tenu de la formule (Exposé 18, § 5)

$$\tau(V \otimes \underset{\sim}{C}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i/2)^2/\mathrm{sh}^2(x_i/2)$$

on obtient :

$$(\mathrm{ch}\ D_o)(V)\ \tau(V \otimes \underset{\sim}{C}) = (- 1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i/\mathrm{th}(x_i/2) .$$

L'expression précédente a même composante de degré $2n$ dans $H^*(X , \underset{\sim}{Q})$ que $(- 1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i/\mathrm{th}\ x_i$. Mais les x_i sont de degré 2 et la fonction $x/\mathrm{th}\ x$ est paire : cette composante est donc nulle pour n impair, d'où finalement :

$$i_t(D_o) = \langle(\mathrm{ch}\ D_o)\ \tau(T(X) \otimes \underset{\sim}{C}) , [X]\rangle = L(X)$$

où $L(X)$ est la formule universelle de [1] donnant l'index de X en fonction des nombres de Pontrjagin de X. Comme l'index de X est égal à l'indice analytique de l'opérateur D_o (exposé 17), la formule d'Atiyah-Singer impliquera donc la formule de Hirzebruch ([1], 8.2.2.).

(Remarque : on n'a pas eu à utiliser dans ce dernier calcul la convention d'orientation du début du § 2, car $(\mathrm{ch}\ D_o)(V)$ ne dépend que des classes de Pontrjagin de V.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. 2te Auflage. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 9).