Henri Cartan

# Calcul du second membre de la formule d'Atiyah-Singer dans quelques cas importants : exposé introductif

*Séminaire Henri Cartan*, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 18, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A3_0>

# CALCUL DU SECOND MEMBRE DE LA FORMULE D'ATIYAH-SINGER DANS QUELQUES CAS IMPORTANTS : EXPOSÉ INTRODUCTIF

par Henri CARTAN

Tous les fibrés vectoriels considérés sont localement triviaux, à base paracompacte.

## 1. Classes de Chern et classes de Pontrjagin.

Envisageons les trois situations que voici :

Cas (a). - On suppose qu'à chaque fibré vectoriel complexe $V$ on a associé un élément $\alpha(V) \in H^{**}(X_V ; \mathbb{Q})$ (on note $H^{**}$ le produit des $H^n$, c'est-à-dire le complété de la somme directe $H^*$ ; et $X_V$ désignera toujours l'espace de base du fibré $V$ ), et cela de façon fonctorielle : pour tout morphisme strict $V \to V'$, l'homomorphisme $H^{**}(X_{V'} ; \mathbb{Q}) \to H^{**}(X_V ; \mathbb{Q})$ qu'il définit envoie $\alpha(V')$ en $\alpha(V)$.

Cas (b). - On suppose qu'à chaque fibré vectoriel réel orienté $V$ on a associé un élément $\beta(V) \in H^{**}(X_V ; \mathbb{Q})$, de façon fonctorielle.

Cas (c). - On suppose qu'à chaque fibré réel $V$ (orientable ou non) on a associé un élément $\gamma(V) \in H^{**}(X_V ; \mathbb{Q})$, de façon fonctorielle.

Dans le cas (a), on peut conclure que $\alpha(V)$ s'exprime par une série formelle par rapport aux classes de Chern $c_1, \ldots, c_n$ du fibré $V$ ( $n$ désignant la dimension complexe de $V$ ) ; cette série formelle est, bien entendu, à coefficients rationnels, et il s'agit des classes de Chern rationnelles, c'est-à-dire des images des $c_i \in H^{2i}(X_V ; \mathbb{Z})$ dans $H^{2i}(X_V ; \mathbb{Q})$, images qu'on notera encore $c_i$ par abus de langage. Les coefficients de la série en question sont indépendants de $V$, pour une dimension $n$ donnée ; mais, a priori, il n'y a pas de relation entre les séries relatives à des dimensions $n$ différentes.

Toutes ces assertions résultent aussitôt du fait que les classes de fibrés vectoriels complexes de dimension $n$ et de base $X$ donnée (paracompacte) correspondent bijectivement aux classes d'homotopie d'applications continues de $X$ dans l'espace classifiant $BU(n)$, noté aussi $G_n(\mathbb{C})$ (grassmannienne des sous-espaces vectoriels complexes de dimension $n$ de $\mathbb{C}^\infty$ ). Il suffit alors de savoir que l'algèbre de cohomologie $H^*(G_n(\mathbb{C}) ; \mathbb{Z})$ est l'algèbre des polynômes (à coefficients entiers) en les classes de Chern $c_1$ , ... , $c_n$ du fibré universel noté $\chi(n)$ dans l'exposé 5 ; nous le noterons ici $E_n(\underset{\sim}{C})$ . De là résulte que $H^*(G_n(\underset{\sim}{C})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ est l'algèbre des polynômes à coefficients rationnels en $c_1$ , ... , $c_n$ .

Le cas (c), resp. (b), est de même justiciable du calcul de l'algèbre de cohomologie $H^*(G_n(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ , resp. $H^*(\tilde{G}_n(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ , en notant $G_n(\underset{\sim}{R})$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels (réels) de dimension $n$ de $\underset{\sim}{R}^\infty$ , et $\tilde{G}_n(\underset{\sim}{R})$ son revêtement d'ordre 2 (grassmannienne des $n$-sous-espaces vectoriels <u>orientés</u> de $\underset{\sim}{R}^\infty$ ). Avant de rappeler la structure de ces deux algèbres, donnons la définition des <u>classes de Pontrjagin</u> $p_i(V) \in H^{4i}(X_V\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ d'un fibré vectoriel réel $V$ (non supposé orienté, ni même orientable). Soit $V \otimes \underset{\sim}{C}$ le complexifié de $V$ ; on pose

$$p_i(V) = (-1)^i\, c_{2i}(V \otimes \underset{\sim}{C}) \ .$$

On notera aussi $p_i$ l'image de $p_i$ dans la cohomologie à coefficients rationnels $H^{4i}(X_V\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ . Les $p_i(V)$ sont fonctorielles en $V$ . On démontre (cf. Appendice, § 7) que les algèbres $H^*(G_{2n}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ et $H^*(G_{2n+1}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ sont des algèbres de polynômes engendrées par les classes de Pontrjagin $p_1$ , ... , $p_n$ du fibré universel $E_{2n}(\underset{\sim}{R})$ de base $G_{2n}(\underset{\sim}{R})$ , resp. du fibré universel $E_{2n+1}(\underset{\sim}{R})$ de base $G_{2n+1}(\underset{\sim}{R})$ . De plus, l'application de revêtement $\tilde{G}_{2n+1}(\underset{\sim}{R}) \to G_{2n+1}(R)$ induit un <u>isomorphisme</u> d'algèbres :

$$H^*(G_{2n+1}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q}) \xrightarrow{\approx} H^*(\tilde{G}_{2n+1}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q}) \ .$$

La situation est un peu moins simple dans le cas de la grassmannienne $\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ ; le fibré universel $\tilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ de base $\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ a une classe d'Euler $\chi_n \in H^{2n}(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ , dont le carré n'est autre que la classe de Pontrjagin $p_n$ de ce fibré, (cf. Appendice, prop. 1), et on montre que $H^*(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ est l'algèbre des polynômes en $\chi_n$ et les classes de Pontrjagin $p_1$ , ... , $p_{n-1}$ de ce fibré universel. Autrement dit, l'homomorphisme d'algèbres

$$H^*(G_{2n}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q}) \to H^*(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$$

est une injection qui identifie la première algèbre à la sous-algèbre de la seconde engendrée par les générateurs $p_1$ , ... , $p_{n-1}$ et le carré $p_n$ du générateur $\chi_n$ .

Ceci étant rappelé, il est clair que, dans le cas (b), $\beta(V)$ , pour un fibré orienté $V$ à fibres de dimension $2n+1$ , s'exprime par une série formelle en les classes de Pontrjagin $p_1$ , ... , $p_n$ de $V$ , à coefficients rationnels indépendants de $V$ . Et pour un fibré orienté $V$ à fibres de dimension $2n$ , $\beta(V)$ s'exprime par une série formelle en les classes de Pontrjagin $p_1, \dots, p_{n-1}$ de $V$ et en la classe d'Euler $\chi_n(V)$, dont le carré est $p_n(V)$.

Dans le cas (c), $\gamma(V)$, pour un fibré $V$ à fibres de dimension $2n+1$, s'exprime par une série formelle en les classes de Pontrjagin $p_1, \dots, p_n$ de $V$, à coefficients rationnels indépendants de $V$ ; et il en est encore ainsi pour un fibré $V$ à fibres de dimension $2n$.

## 2. Fonctions multiplicatives.

On va maintenant imposer une condition multiplicative dans chacun des trois cas (a), (b), (c) ci-dessus. Dans le cas (a), on pose la condition

$$\text{(M)} \qquad \alpha(V \oplus V') = \alpha(V) \cup \alpha(V') \;;$$

ici, $V \oplus V'$ désigne, conformément à nos conventions générales, la somme directe externe, qui a pour base le produit $X_V \times X_{V'}$ ; et au second membre il s'agit du cup-produit externe, élément de $H^{**}(X_V \times X_{V'} ; \mathbb{Q})$. On formule de manière analogue la condition multiplicative (M) dans chacun des cas (b) et (c).

Donnons tout de suite des exemples.

Exemple 1 (cas (a)). - On prend pour $\alpha(V)$ la classe totale de Chern

$$c(V) = 1 + c_1(V) + \dots + c_n(V) + \dots$$

(rappelons que $c_i(V) = 0$ si $i > n$, $n$ = dimension des fibres de $V$). La propriété (M) est la propriété multiplicative de $c(V)$ (Exposé 4, théorème 4.2, page 4-09).

Exemple 2 (cas (a)). - On prend pour $\alpha(V)$ la classe de Todd $\tau(V)$ du fibré complexe $V$ (cf. Exposé 6, page 6-07) ; sa "série génératrice" est $x(1-e^{-x})^{-1}$. Rappelons (cf. Exposé 6, Appendice) que la classe de Todd $\tau(V)$ est l'unique fonction multiplicative $\alpha(V)$ qui, lorsque $V$ est le fibré tangent à l'espace projectif $P_{2n}(\mathbb{C})$, prend la valeur 1 sur la classe fondamentale d'homologie de $P_{2n}(\mathbb{C})$ (orienté par la structure complexe), et ceci pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exemple 3 (cas (b)). - On prend pour $\beta(V)$ la classe d'Euler $\chi(V)$ (à coefficients rationnels) du fibré réel orienté $V$ ; elle est nulle si les fibres de $V$ sont de dimension impaire (car alors la classe d'Euler à coefficients entiers est nulle ou d'ordre 2). La propriété $\chi(V \oplus V') = \chi(V) \cup \chi(V')$ est bien vraie (cf. Exposé 4, 2.3, (b)).

Exemple 4 (cas (c)). - On prend pour $\gamma(V)$ la classe de Todd $\tau(V \otimes \mathbb{C})$ du complexifié de V (voir § 5 ci-dessous).

## 3. Calcul des fonctions multiplicatives dans le cas (a).

Définition. - Soit donné, dans le cas (a), un $\alpha(V)$ fonctoriel et multiplicatif. On appelle série génératrice de $\alpha$ la série formelle

$$A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \quad \text{(à coefficients } a_n \text{ rationnels)},$$

qu'on obtient en calculant $\alpha(V)$ pour le fibré universel $V = E_1(\mathbb{C})$, noté aussi $\chi(1)$ (de base $G_1(\mathbb{C})$, à fibres de dimension complexe 1 ), à l'aide de sa classe de Chern $x$, laquelle est un générateur de l'algèbre de polynômes

$$H^*(G_1(\mathbb{C})\ ;\ \mathbb{Q})\ ;$$

$x$ est de degré 2 (cf. Exposé 5, proposition 2.2.2).

THÉORÈME 1. - Dans le cas (a), la connaissance de la série génératrice $A(x)$ détermine $\alpha(V)$ pour tout fibré vectoriel complexe $V$, de dimension $n$, par le procédé suivant : on exprime le produit

$$A(x_1)\ A(x_2)\ \dots\ A(x_n)$$

comme série formelle par rapport aux fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \dots, x_n$ :

$$c_1 = x_1 + \dots + x_n\ ,\ c_2 = \sum_{i<j} x_i x_j\ ,\ \dots\ ,\ c_n = x_1 x_2 \dots x_n\ ,$$

ce qui donne une série $\alpha(c_1, \dots, c_n)$ : c'est l'élément cherché de $\alpha(V)$, $c_1, \dots, c_n$ désignant alors les classes de Chern du fibré $V$.

Démonstration. - Il suffit de prouver la formule lorsque $V$ est le fibré universel $E_n(\mathbb{C})$ de base $G_n(\mathbb{C})$. Considérons la somme directe externe de $n$ exemplaires du fibré $E_1(\mathbb{C})$ de base $G_1(\mathbb{C})$ ; il définit une application

$$(1) \qquad \overbrace{G_1(\mathbb{C}) \times \dots \times G_1(\mathbb{C})}^{n \text{ fois}} \to G_n(\mathbb{C})$$

qui, en cohomologie, envoie les classes de Chern de $G_n(\mathbb{C})$ dans celles du produit des $n$ exemplaires de $G_1(\mathbb{C})$. On a déjà vu (Exposé 4) que ceci identifie l'algèbre $H^*(G_n(\mathbb{C})\ ;\ \mathbb{Z})$ à la sous-algèbre des polynômes symétriques en $x_1, \dots, x_n$, en désignant par $x_i$ le générateur de la cohomologie du i-ième espace facteur $G_1(\mathbb{C})$. Dans l'homomorphisme des algèbres de cohomologie (à coefficients rationnels, cette fois), $\alpha(E_n(\underset{\sim}{C}))$ va dans le produit des $\alpha(E_1(\underset{\sim}{C}))$ relatifs aux n espaces facteurs, puisque par hypothèse $\alpha$ possède la propriété multiplicative (M). Autrement dit, $\alpha(E_n(\underset{\sim}{C}))$ va dans le produit $A(x_1)\,A(x_2)\,\ldots\,A(x_n)$, et ceci prouve le théorème.

Remarque. - Inversement, étant donnée une série arbitraire $A(x)$, à coefficients rationnels, elle définit un $\alpha(V)$ multiplicatif.

4. Calcul des fonctions multiplicatives dans les cas (b) et (c).

Il convient d'abord de comparer les grassmanniennes réelles et les grassmanniennes complexes. Si dans le fibré complexe $E_n(\underset{\sim}{C})$ on oublie la structure complexe, on obtient un fibré réel à fibres orientées de dimension $2n$ ; d'où une application

(2) $$G_n(\underset{\sim}{C}) \to \tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) ,$$

d'ailleurs facile à expliciter géométriquement. Par composition avec l'application (1), on obtient

(3) $$\overbrace{G_1(\underset{\sim}{C}) \times \cdots \times G_1(\underset{\sim}{C})}^{n \text{ fois}} \to \tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) .$$

Si on passe à la cohomologie, (3) définit un homomorphisme de $H^*(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ dans l'algèbre des polynômes $\underset{\sim}{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ; cet homomorphisme envoie la classe de Pontrjagin $p_i$ dans la i-ième fonction symétrique élémentaire de $(x_1)^2, \ldots, (x_n)^2$ et envoie la classe d'Euler dans le produit $x_1 \ldots x_n$ (cf. Appendice, § 6 ci-dessous). Si on passe à la cohomologie rationnelle, on voit que (3) identifie $H^*(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ à la sous-algèbre formée des polynômes symétriques de $x_1, \ldots, x_n$ qui s'expriment comme polynômes en les $(x_i)^2$ et en $x_1 \ldots x_n$. En particulier, la classe de Pontrjagin $p_1$ du fibré réel sous-jacent à $E_1(\underset{\sim}{C})$ (de base $G_1(\underset{\sim}{C})$) est le carré $x^2$ de la classe de Chern $x$ de $E_1(\underset{\sim}{C})$.

Définition. - Soit donné, dans le cas (b), un $\beta(V)$ fonctoriel ; et supposons que la condition multiplicative

(M) $$\beta(V \oplus V') = \beta(V) \cup \beta(V')$$

soit vérifiée lorsque $V$ et $V'$ sont des fibrés vectoriels orientés à fibres de dimension paire. On appelle alors série génératrice de $\beta$ la série formelle

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n\, x^n$$

à coefficients rationnels $b_n$, obtenue en calculant $\beta(V)$ pour le fibré réel orienté sous-jacent à $E_1(\underset{\sim}{C})$ , à l'aide de la classe de Chern $x$ de $E_1(\underset{\sim}{C})$ .

THÉORÈME 2.

(i) On suppose que la condition (M) est vérifiée chaque fois que $V$ et $V'$ sont des fibrés ~~réels~~ ~~orientés~~ à fibres de dimension paire. Alors la série génératrice $B(x)$ est soit paire (i. e. $B(-x) = B(x)$ ), soit impaire (i. e. $B(-x) = -B(x)$ ).

Pour un fibré orienté $V$ à fibres de dimension $2n$ , $\beta(V)$ se calcule comme suit : si $B(x)$ est paire, $\beta(V)$ est une série formelle $\beta(p_1 , \dots , p_n)$ par rapport aux classes de Pontrjagin $p_i(V)$ , qu'on obtient en exprimant le produit $B(x_1) \dots B(x_n)$ comme série en les fonctions symétriques élémentaires $p_i$ des $(x_i)^2$ ; si $B(x)$ est impaire, $\beta(V)$ est une série formelle en la classe d'Euler $\chi_n(V)$ et les classes de Pontrjagin $p_1(V) , \dots , p_{n-1}(V)$ , qu'on obtient en exprimant le produit $B(x_1) \dots B(x_n)$ comme série formelle en le produit $x_1 \dots x_n = \chi$ et en les fonctions symétriques élémentaires $p_1 , \dots , p_{n-1}$ des $(x_i)^2$ .

(ii) Si en outre la relation multiplicative (M) est vraie lorsque $V$ est un fibré orienté à fibres de dimension paire, et $V'$ un fibré trivial à fibres de dimension $1$ , alors, si $B(x)$ est impaire, $\beta(V) = 0$ pour tout fibré orienté $V$ à fibres de dimension impaire ; si $B(x)$ est paire, on a, pour un fibré orienté $V$ à fibres de dimension $2n + 1$ ,

$$\beta(V) = b.\beta(p_1 , \dots , p_n) ,$$

où $\beta(p_1 , \dots , p_n)$ désigne la série définie en (i), et $b$ la constante rationnelle, valeur de $\beta(V')$ pour $V'$ trivial à fibres de dimension $1$ .

Démonstration.

(i) Il suffit de prouver les formules lorsque $V$ est le fibré universel $\tilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ , de base $\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ . L'application (3) montre que, si on identifie $H^{**}(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Q})$ à l'algèbre des séries formelles symétriques en $x_1 , \dots , x_n$ qui s'expriment à l'aide du produit $x_1 \dots x_n$ et des fonctions symétriques élémentaires $p_i$ des $(x_i)^2$ , $\beta(\tilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R}))$ est égal au produit $B(x_1) \dots B(x_n)$ , où $B$ désigne la série génératrice. On va voir que ceci impose des conditions à la série $B(x)$ . Laissons de côté le cas trivial où $B(x)$ est identiquement nulle ; on peut alors multiplier $B$ par une constante rationnelle $\neq 0$ , de façon que $B$ prenne la forme

$$B(x) = x^k B'(x) , \quad k \text{ entier} \geqslant 0 , \quad B'(0) = 1 .$$

Alors $B'(x)$ s'obtient en remplaçant, dans le produit $B'(x_1) \dots B'(x_n)$ , $x_1$ par $x$ , et $x_2 , \dots , x_n$ par $0$ . Pour $n \geqslant 2$ , cela revient à remplacer dans

$\beta(\chi_n , p_1 , \dots , p_{n-1})$ , $\chi_n$ par $0$ , $p_1$ par $x^2$ , et $p_2 , \dots , p_{n-1}$ par $0$ . Il s'ensuit que $B'(x)$ est une série en $x^2$ . Donc $B(x)$ est paire si l'entier $k$ est pair, impaire si $k$ est impair. Réciproquement, si $B(x)$ est une série paire, le produit $B(x_1) \dots B(x_n)$ s'exprime d'une seule manière comme série en les fonctions symétriques élémentaires $p_1 , \dots , p_n$ des $(x_i)^2$ ; et si $B(x)$ est impaire, le même produit s'exprime d'une seule manière comme produit d'une série en $p_1 , \dots , p_n$ par $\chi_n = x_1 \dots x_n$ (observons à nouveau que $p_n = (\chi_n)^2$ ).

(ii) Pour calculer $\beta(V)$ pour un fibré orienté $V$ à fibres de dimension $2n + 1$ , il suffit de faire le calcul lorsque $V$ est le fibré universel $\tilde{E}_{2n+1}(\underset{\sim}{R})$ , de base $\tilde{G}_{2n+1}(\underset{\sim}{R})$ . Considérons la somme directe externe du fibré $\tilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ et du fibré trivial de dimension $1$ , à base ponctuelle ; ce fibré est image réciproque du fibré $\tilde{E}_{2n+1}(\underset{\sim}{R})$ par l'injection canonique

$$i : \tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) \to \tilde{G}_{2n+1}(\underset{\sim}{R}) ,$$

et la propriété multiplicative (M) montre que

$$i^*(\beta(\tilde{E}_{2n+1}(\underset{\sim}{R}))) = b.\beta(\tilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R})) ,$$

où $b$ désigne la constante rationnelle, valeur de $\beta(V')$ pour le fibré trivial $V'$ de dimension $1$ , à base ponctuelle. Or $i^*$ est une injection qui permet d'identifier $H^{**}(\tilde{G}_{2n+1}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Q})$ à une sous-algèbre de $H^{**}(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Q})$ (cf. § 1, et ci-dessous § 7). Ceci prouve que si $b = 0$ , $\beta(V)$ est nul pour tout fibré orienté $V$ de dimension impaire. Si $b \neq 0$ , la relation précédente montre que $\beta(\tilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R}))$ ne dépend pas de la classe d'Euler $\chi_n$ (mais seulement des classes de Pontrjagin $p_1 , \dots , p_n$ ) ; donc la série génératrice $B(x)$ est <u>paire</u>. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Il reste à faire l'étude du cas (c) des fibrés réels (non orientés). Lorsque $\gamma(V)$ possède la propriété (M) pour les fibrés à fibres de dimension paire, on définit encore la série génératrice $C(x)$ , qu'on obtient en calculant $\gamma(V)$ pour le fibré réel sous-jacent à $E_1(\underset{\sim}{C})$ . On obtient le théorème suivant (dont la démonstration est laissée au lecteur) :

THÉORÈME 3.

(i) On suppose que la condition (M) $[\gamma(V \oplus V') = \gamma(V) \cup \gamma(V')]$ est vérifiée lorsque $V$ et $V'$ ont leurs fibres de dimension paire ; alors la série génératrice $C(x)$ est <u>paire</u>, et si $V$ est à fibres de dimension $2n$ , $\gamma(V)$ se calcule en exprimant le produit $C(x_1) \ldots C(x_n)$ comme série formelle $\gamma(p_1, \ldots, p_n)$ en les fonctions symétriques élémentaires des $(x_i)^2$.

(ii) Si en outre la relation multiplicative (M) est vraie lorsque $V$ est un fibré à fibres de dimension paire, et $V'$ un fibré trivial à fibres de dimension $1$, alors, pour un fibré $V$ à fibres de dimension $2n+1$, on a

$$\gamma(V) = c.\gamma(p_1, \ldots, p_n),$$

où $\gamma(p_1, \ldots, p_n)$ désigne la série définie en (i), et $c$ la constante rationnelle, valeur de $\gamma(V')$ pour $V'$ trivial de dimension $1$.

5. Exemple : Calcul de la classe de Todd $\tau(V \otimes \underset{\sim}{C})$, pour tout fibré vectoriel réel $V$.

Ce cas est justiciable du théorème 3. Avec les notations de ce théorème, on a $c = 1$ (classe de Todd d'un fibré complexe trivial de dimension complexe $1$). La série génératrice $C(x)$ est paire ; on l'obtient en calculant la classe de Todd $\tau(V \otimes \underset{\sim}{C})$ lorsque $V$ est le fibré réel sous-jacent à $E_1(\underset{\sim}{C})$, de base $G_1(\underset{\sim}{C})$. Alors $V \otimes \underset{\sim}{C}$ est un isomorphe, comme fibré complexe, à la somme directe (interne) de $E_1(\underset{\sim}{C})$ et de son conjugué $\overline{E}_1(\underset{\sim}{C})$ (cf. Appendice, prop. 2). On a donc

$$\tau(V \otimes \underset{\sim}{C}) = \tau(E_1(\underset{\sim}{C})).\tau(\overline{E}_1(\underset{\sim}{C})) \qquad \text{(cup-produit interne).}$$

Par définition, $\tau(E_1(\underset{\sim}{C})) = x(1 - e^{-x})^{-1}$, $x$ désignant la classe de Chern de $E_1(\underset{\sim}{C})$. On a donc $\tau(\overline{E}_1(\underset{\sim}{C})) = -x(1 - e^{x})^{-1}$ (la classe de Chern de $\overline{E}_1(\underset{\sim}{C})$ est opposée à celle de $E_1(\underset{\sim}{C})$). D'où

$$C(x) = x^2(e^{x/2} - e^{-x/2})^{-2} = \left(\frac{x}{2 \operatorname{Sh} \frac{x}{2}}\right)^2 .$$

Telle est la série génératrice de $\tau(V \otimes \underset{\sim}{C})$ ; elle permet de calculer la classe de Todd $\tau(V \otimes \underset{\sim}{C})$ à l'aide des classes de Pontrjagin $p_i$ du fibré réel $V$ ; on trouve

$$1 - \frac{1}{12} p_1 - \frac{1}{720}(p_2 - 3 p_1^2) - \frac{1}{60480}(2 p_3 - 9 p_1 p_2 + 10 p_1^3) + \ldots$$

## Appendice

### 6. Classes de Pontrjagin et fonctions symétriques.

Nous rappelons la définition des classes de Pontrjagin $p_i(V)$ d'un fibré vectoriel réel $V$, donnée dans le texte :

$$p_i(V) = (-1)^i \, c_{2i}(V \otimes \underset{\sim}{C}) \in H^{4i}(X_V ; \underset{\sim}{Z}) .$$

(Dans ce paragraphe, on considère les classes de Pontrjagin dans la cohomologie à coefficients entiers.) La classe totale de Pontrjagin est

$$p(V) = \sum_{i \geq 0} p_i(V) \; ; \qquad p_o(V) = 1 \; , \quad p_i(V) = 0$$

si les fibres de $V$ sont de dimension $< 2i$.

On pose aussi

$$\check{p}(V) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \, p_i(V) = \sum_{i \geq 0} c_{2i}(V \otimes \underset{\sim}{C}) .$$

PROPOSITION 1. - Soit $V$ un fibré réel orienté à fibres de dimension $2n$ ; on a

$$p_n(V) = (\chi(V))^2 ,$$

$\chi(V)$ désignant la classe d'Euler.

En effet,

$$p_n(V) = (-1)^n \, c_{2n}(V \otimes \underset{\sim}{C}) = (-1)^n \, \chi(V \otimes \underset{\sim}{C}) \; ;$$

or, le complexifié $V \otimes \underset{\sim}{C}$, muni de son orientation naturelle, est isomorphe à $V \oplus V$ (somme directe interne) ; les orientations de ces deux fibrés sont les mêmes si $n$ est pair, opposées si $n$ est impair. D'où

$$p_n(V) = \chi(V \oplus V) = (\chi(V))^2 .$$

PROPOSITION 2. - Soit $V$ un fibré vectoriel complexe ; notons $V_{\underset{\sim}{R}}$ le fibré réel sous-jacent, et soit $V_{\underset{\sim}{R}} \otimes \underset{\sim}{C}$ son complexifié. Alors $V_{\underset{\sim}{R}} \otimes \underset{\sim}{C}$ est isomorphe à $V \oplus \overline{V}$, somme directe (interne) de $V$ et de son conjugué.

En effet, $V_{\underset{\sim}{R}} \otimes \underset{\sim}{C}$ est isomorphe à $V_{\underset{\sim}{R}} \oplus V_{\underset{\sim}{R}}$, où la structure complexe est définie par

$$i.(x , y) = (-y , x) .$$

L'application $x \to (x\,,\,-ix)$ de $V$ dans $V_{\underset{\sim}{R}} \oplus V_{\underset{\sim}{R}}$ est un isomorphisme du fibré (complexe) $V$ sur un sous-fibré (complexe) de $V_{\underset{\sim}{R}} \oplus V_{\underset{\sim}{R}}$ ; de même, l'application $x \to (x\,,\,ix)$ est un isomorphisme du fibré (complexe) $\overline{V}$ sur un sous-fibré (complexe) de $V_{\underset{\sim}{R}} \oplus V_{\underset{\sim}{R}}$. Et on vérifie aussitôt que $V_{\underset{\sim}{R}} \oplus V_{\underset{\sim}{R}}$ est somme directe des images de $V$ et $\overline{V}$.

COROLLAIRE 1. - $\check{p}(V_{\underset{\sim}{R}}) = c(V).c(\overline{V})$ (cup-produit interne), <u>en notant</u> $c(V)$ <u>la classe totale de Chern de</u> $V$.

En effet, on sait que

$$c(\overline{V}) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i\, c_i(V) \;;$$

d'où

$$c_n(V_R \otimes \underset{\sim}{C}) = \sum_{i+j=n} (-1)^j\, c_i(V)\; c_j(V) \;,$$

ce qui montre que $c_n(V_{\underset{\sim}{R}} \otimes \underset{\sim}{C}) = 0$ pour $n$ impair, d'où

$$\check{p}(V_{\underset{\sim}{R}}) = \sum_{n \geqslant 0} c_{2n}(V_{\underset{\sim}{R}} \otimes C) = c(V).c(\overline{V}) \;.$$

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> $V$ <u>et</u> $W$ <u>sont deux fibrés complexes, on a</u>

$$\check{p}(V_{\underset{\sim}{R}} \oplus W_{\underset{\sim}{R}}) = \check{p}(V_{\underset{\sim}{R}}) \cup \check{p}(W_{\underset{\sim}{R}}) \;,$$

d'où

$$p(V_{\underset{\sim}{R}} \oplus W_{\underset{\sim}{R}}) = p(V_{\underset{\sim}{R}}) \cup p(W_{\underset{\sim}{R}}) \;.$$

(il s'agit ici de somme directe <u>externe</u>, et de cup-produit <u>externe</u>).

On va appliquer le corollaire 2 à la somme directe (externe) de $n$ exemplaires du fibré réel sous-jacent à $E_1(\underset{\sim}{C})$ (fibré universel de base $G_1(\underset{\sim}{C})$) : si on note $x_i$ la classe de Chern (de degré 2) du i-ième facteur $E_1(\underset{\sim}{C})$, on sait que la cohomologie de

$$G_1(\underset{\sim}{C}) \times \cdots \times G_1(\underset{\sim}{C})$$

s'identifie à l'algèbre des polynômes (à coefficients entiers) en $x_1, \cdots, x_n$. Or la classe $\check{p}$ du i-ième fibré est, d'après le corollaire 1, égale à

$$(1 + x_i)(1 - x_i) = 1 - (x_i)^2 \;;$$

Donc la classe $p$ du i-ième fibré est $1 + (x_i)^2$ ; d'après le corollaire 2, la classe totale de Pontrjagin de la somme directe est

$$p = \prod_{i=1}^{n} (1 + (x_i)^2) .$$

D'où la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - <u>La i-ième classe de Pontrjagin</u> $p_i$ <u>de la somme directe (externe) de</u> $n$ <u>exemplaires du fibré réel sous-jacent à</u> $E_1(\underset{\sim}{C})$ <u>est égale à la i-ième fonction symétrique élémentaire de</u> $(x_1)^2 , \ldots , (x_n)^2$ (éléments de la cohomologie de $G_1(\underset{\sim}{C}) \times \ldots \times G_1(\underset{\sim}{C})$ ).

Reprenons alors l'application (1) du § 3 :

$$\overbrace{G_1(\underset{\sim}{C}) \times \ldots \times G_1(\underset{\sim}{C})}^{n \text{ fois}} \to G_n(\underset{\sim}{C}) \ ;$$

on voit que le fibré réel sous-jacent à $E_n(\underset{\sim}{C})$ a pour classe de Pontrjagin $p_i$ la i-ième fonction symétrique élémentaire des carrés $(x_1)^2 , \ldots , (x_n)^2$ , lorsqu'on identifie $H^*(G_n(\underset{\sim}{C}) \ ; \underset{\sim}{Z})$ à l'algèbre des polynômes symétriques en $x_1 , \ldots , x_n$ .

Considérons maintenant les applications canoniques

$$\overbrace{G_1(\underset{\sim}{C}) \times \ldots \times G_1(\underset{\sim}{C})}^{n \text{ fois}} \to G_n(\underset{\sim}{C}) \to \tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) \to G_{2n}(\underset{\sim}{R}) \ ;$$

les homomorphismes qu'elles induisent sur les algèbres d'homologie (à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ ), et le fait que les classes de Pontrjagin sont fonctorielles, montrent que :

PROPOSITION 4. - <u>Par les homomorphismes naturels</u>

$$H^*(G_{2n}(\underset{\sim}{R}) \ ; \underset{\sim}{Z}) \to H^*(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) \ ; \underset{\sim}{Z}) \to \underset{\sim}{Z}[x_1 , \ldots , x_n]$$

<u>la classe de Pontrjagin</u> $p_i \in H^{4i}(G_{2n}(\underset{\sim}{R}) \ ; \underset{\sim}{Z})$ , <u>resp.</u> $p_i \in H^{4i}(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) \ ; \underset{\sim}{Z})$ <u>va dans la i-ième fonction symétrique élémentaire de</u> $(x_1)^2 , \ldots , (x_n)^2$ . <u>La classe d'Euler</u> $\chi_n \in H^{2n}(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) \ ; \underset{\sim}{Z})$ <u>va dans le produit</u> $x_1 x_2 \ldots x_n$ .

(Dans cet énoncé, les classes de Pontrjagin s'entendent comme les classes de Pontrjagin du fibré universel $E_{2n}(\underset{\sim}{R})$ , resp. $\tilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ ; de même pour la classe d'Euler de $\tilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ .)

L'assertion relative à la classe d'Euler se prouve en observant que la classe d'Euler de $\widetilde{E}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ va dans le produit des classes d'Euler des $n$ fibrés composants isomorphes à $E_1(\underset{\sim}{C})$.

7. Structure des algèbres de cohomologie à coefficients rationnels des grassmanniennes $G_{2n}(\underset{\sim}{R})$, $G_{2n+1}(\underset{\sim}{R})$, $\widetilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R})$ et $\widetilde{G}_{2n+1}(\underset{\sim}{R})$.

PROPOSITION 5.

(a) L'homomorphisme $H^*(G_{2n+1}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Q}) \to H^*(\widetilde{G}_{2n+1}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Q})$ est un isomorphisme ; chacune de ces deux algèbres est l'algèbre des polynômes en les classes de Pontrjagin $p_1, \dots, p_n$ ;

(b) L'homomorphisme $H^*(G_{2n}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Q}) \to H^*(\widetilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Q})$ est une injection ; la première algèbre est l'algèbre des polynômes en $p_1, \dots, p_n$, tandis que la seconde est l'algèbre des polynômes en $p_1, \dots, p_{n-1}$ et la classe d'Euler $\chi_n$ (dont le carré est $p_n$).

Tout d'abord, la proposition 4 montre que $p_1, \dots, p_n$ sont des éléments algébriquement indépendants des quatre algèbres en question, et que $p_1, \dots, p_{n-1}$ et $\chi_n$ sont algébriquement indépendants dans $H^*(\widetilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Q})$. Il reste donc seulement à prouver que ces éléments engendrent les algèbres.

On va procéder par récurrence sur $n$, en montrant successivement : 1° si l'assertion (a) est vraie pour $n - 1$, l'assertion (b) est vraie pour $n$ ; 2° si l'assertion (b) est vraie pour $n$, l'assertion (a) est vraie pour $n$. Au départ, le théorème est trivial pour $G_0(\underset{\sim}{R})$ et $\widetilde{G}_0(\underset{\sim}{R})$, tous deux réduits à un point.

1° On suppose que l'assertion (a) est vraie pour $n - 1$. On va écrire, pour $\widetilde{G}_{2n}$ et $\widetilde{G}_{2n-1}$, une "suite exacte de Gysin" analogue à celle utilisée pour les grassmanniennes complexes (cf. Exposé 5, Appendice 2) : on raisonne d'abord sur la grassmannienne réelle finie $\widetilde{G}_{2n,k}$ et son fibré $\widetilde{E}_{2n,k}$ ; on note $\widetilde{E}^*_{2n,k}$ l'ensemble des vecteurs non nuls de ce fibré. Soit

$$\rho : \widetilde{E}^*_{2n,k} \to \widetilde{G}_{2n-1,k+1}$$

l'application qui, à chaque vecteur $\neq 0$ contenu dans $V \in \widetilde{G}_{2n,k}$, associe le $(2n - 1)$-sous-espace vectoriel orthogonal dans $V$, avec une convention fixe d'orientation. L'application $\rho$ est fibrée, sa fibre est un espace vectoriel de dimension $k + 1$ privé de $0$ ; par suite, $\rho$ induit des isomorphismes

$$H^q(\widetilde{G}_{2n-1,k+1} ; \underset{\sim}{Q}) \approx H^q(\widetilde{E}^*_{2n,k} ; \underset{\sim}{Q})$$

pour $q < k$. Par ces isomorphismes, la suite exacte de Gysin du fibré vectoriel

$\widetilde{E}_{2n,k}$ se transforme en la suite exacte

$$\cdots \to H^{q-2n}(\widetilde{G}_{2n,k}) \xrightarrow{\chi_n} H^q(\widetilde{G}_{2n,k}) \to H^q(\widetilde{G}_{2n-1,k+1}) \to H^{q-2n+1}(\widetilde{G}_{2n,k}) \to \cdots$$

(valable pour $q \leqslant k$ ), où l'homomorphisme $\chi_n$ est la multiplication par la classe d'Euler $\chi_n$ (de degré $2n$ ) du fibré $\widetilde{E}_{2n,k}$. (Toutes les cohomologies sont à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}$ ). En passant à la limite lorsque $k \to \infty$ (ce qui est licite car, pour un degré $q$ donné, la suite est indépendante de $k$ pour $k$ assez grand), on obtient la suite exacte (pour toute valeur de $q$ )

$$(S) \qquad \cdots \to H^{q-2n}(\widetilde{G}_{2n}) \xrightarrow{\chi_n} H^q(\widetilde{G}_{2n}) \xrightarrow{\alpha} H^q(\widetilde{G}_{2n-1}) \xrightarrow{\beta} H^{q-2n+1}(\widetilde{G}_{2n}) \to \cdots$$

On prouve aisément que $\alpha$ est l'application naturelle qui envoie les classes de Pontrjagin $p_i$ de $\widetilde{G}_{2n}$ dans les classes de Pontrjagin $p_i$ de $\widetilde{G}_{2n-1}$, pour $i \leqslant n-1$. L'exactitude de la suite (S) montre alors, par récurrence sur $q$, que chaque élément de $H^q(\widetilde{G}_{2n})$ s'écrit d'une seule manière comme polynôme en $p_1,\dots,p_{n-1}$ et $\chi_n$. Il s'ensuit que $H^*(\widetilde{G}_{2n}\ ;\ \underset{\sim}{Q})$ est bien l'algèbre des polynômes en $p_1, \dots, p_{n-1}$ et $\chi_n$.

Pour $H^*(G_{2n}\ ;\ \underset{\sim}{Q})$, on utilise le <u>lemme</u> (facile) : l'homomorphisme

$$H^*(G_p\ ;\ \underset{\sim}{Q}) \to H^*(\widetilde{G}_p\ ;\ \underset{\sim}{Q})$$

est une injection dont l'image se compose des éléments invariants par l'automorphisme involutif $\sigma$ de $\widetilde{G}_p$ (celui qui change l'orientation de chaque fibre de $\widetilde{E}_p$ ).

Ce lemme étant admis, il est clair que, pour $\widetilde{G}_{2n}$, l'automorphisme $\sigma$ change $\chi_n$ et $-\chi_n$ ; donc $H^*(G_{2n})$ est l'algèbre des polynômes en $p_1, \dots, p_{n-1}$ et $(\chi_n)^2 = p_n$. On a ainsi achevé de prouver l'assertion (b) pour $n$.

2° On suppose que l'assertion (b) est vraie pour $n$, et on va prouver que l'assertion (a) est vraie pour $n$. Reprenons la suite exacte (S) ci-dessus, mais en y remplaçant $2n$ par $2n+1$ :

$$\cdots \to H^{q-2n-1}(\widetilde{G}_{2n+1}) \xrightarrow{\chi} H^q(\widetilde{G}_{2n+1}) \xrightarrow{\alpha} H^q(\widetilde{G}_{2n}) \xrightarrow{\beta} H^{q-2n}(\widetilde{G}_{2n+1}) \to \cdots$$

L'automorphisme $\sigma$ opère dans cette suite ; d'une façon précise, on a

$$\alpha\sigma = \sigma\alpha\ , \qquad \beta\sigma = -\sigma\beta\ , \qquad \chi\sigma = -\sigma\chi\ .$$

Mais ici l'homomorphisme $\chi$ est nul, car la classe d'Euler de $H^{2n+1}(\tilde{G}_{2n+1} ; \underset{\sim}{Z})$ est un élément d'ordre 2, donc son image dans $H^{2n+1}(\tilde{G}_{2n+1} ; \underset{\sim}{Q})$ est nulle. Il s'ensuit que $\alpha$ est une injection ; compte tenu des opérations de $\sigma$, on obtient une suite exacte

$$0 \to H^q(G_{2n+1}) \xrightarrow{\alpha'} H^q(G_{2n}) \xrightarrow{\beta'} H^{q-2n}(\tilde{G}_{2n+1})/H^{q-2n}(G_{2n+1}) \to 0 .$$

Comme les classes $p_1 , \ldots , p_n \in H^*(G_{2n} ; \underset{\sim}{Q})$ engendrent cette algèbre (par l'hypothèse de récurrence), il s'ensuit que $\alpha'$ est surjectif, donc bijectif, et que $H^*(\tilde{G}_{2n+1} ; \underset{\sim}{Q})/H^*(G_{2n+1} ; \underset{\sim}{Q}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarque finale. - On a, en fait, un résultat plus précis que la proposition 5 : en cohomologie à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, $H^*(G_{2n+1}(\underset{\sim}{R}))$ et $H^*(\tilde{G}_{2n+1}(\underset{\sim}{R}))$ admettent une sous-algèbre de polynômes (à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$) engendrée par $p_1, \ldots, p_n$, et cette sous-algèbre a pour supplémentaire le sous-groupe de torsion de $H^*$, sous-groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2 (ils font intervenir les "classes de Stiefel-Whitney"). De même, $H^*(G_{2n}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Z})$ admet la sous-algèbre de polynômes $\underset{\sim}{Z}[p_1 , \ldots , p_n]$, qui a pour supplémentaire le sous-groupe de torsion ; tous ses éléments sont d'ordre 2. Enfin, $H^*(\tilde{G}_{2n}(\underset{\sim}{R}) ; \underset{\sim}{Z})$ admet la sous-algèbre $\underset{\sim}{Z}[p_1 , \ldots , p_{n-1} , \chi_n]$, qui a pour supplémentaire le sous-groupe de torsion ; tous ses éléments sont d'ordre 2.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. 2te Auflage. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 9).

[2] MILNOR (J.). - Lectures on characteristic classes. - Princeton, Princeton University Press (multigraphié).