Max Karoubi

Les isomorphismes de Chern et de Thom-Gysin en K-théorie

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 16, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A1_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 16

2 mars 1964

LES ISOMORPHISMES DE CHERN ET DE THOM-GYSIN EN K-THÉORIE

par Max KAROUBI

1. Généralités sur les foncteurs semi-exacts.

On se place dans la catégorie des espaces compacts, les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications continues. Un foncteur contravariant t de cette catégorie dans la catégorie des groupes abéliens est semi-exact si, pour toute suite d'espaces

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/A$$

(où A est un sous-espace fermé d'un espace compact X, i désigne l'inclusion, et p désigne l'application canonique de X sur son quotient obtenu en identifiant en un point a tous les points de A), la suite correspondante

$$t(X/A) \xrightarrow{t(p)} t(X) \xrightarrow{t(i)} t(A)$$

est une suite exacte de groupes abéliens. On convient que, dans le cas où le sous-espace A est vide, X/A est la somme topologique de X et d'un point.

On définirait de même un foncteur covariant semi-exact.

Exemples.

1° Le foncteur $\tilde{K}(X)$, conoyau de l'application canonique $\underset{\sim}{Z} \to K(X)$ (cf. [2], § 2) est semi-exact ; en effet, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
K(X, A) & \longrightarrow & K(X) & \xrightarrow{K(i)} & K(A) \\
\downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma \\
\tilde{K}(X/A) & \xrightarrow{\tilde{K}(p)} & \tilde{K}(X) & \xrightarrow{\tilde{K}(i)} & \tilde{K}(A) .
\end{array}$$

où la première suite horizontale est exacte ([2], théorème 2), et où β et γ sont les applications canoniques, de noyau $\underset{\sim}{Z}$, α étant le composé des isomorphismes

$$K(X, A) \xrightarrow{\approx} K(X/A, a) \approx \tilde{K}(X/A)$$

(cf. [2], théorème 3). Il en résulte bien que la deuxième suite horizontale est exacte.

Observons que $\tilde{K}(X)$ est bien un foncteur, puisque deux applications homotopes $X \to Y$ définissent le même homomorphisme $\tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X)$.

2° Le foncteur $\tilde{K}(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ est aussi un foncteur semi-exact, puisque la tensorisation par $\underset{\sim}{Q}$ est un foncteur exact dans la catégorie des groupes abéliens.

3° Le foncteur $\tilde{H}^*(X)$ (cohomologie de Čech à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, "réduite" en dimension 0 : $\tilde{H}^n(X) = H^n(X)$ pour $n > 0$, $\tilde{H}^0(X)$ est le conoyau de $\underset{\sim}{Z} \to H^0(X)$) est un foncteur semi-exact. Cela résulte aussitôt de la suite exacte de cohomologie, et du fait que $H^*(X , A) \to H^*(X/A , a)$ est un isomorphisme en cohomologie de Čech, lorsque X est un espace compact et A un sous-espace fermé.

4° Le foncteur $\tilde{H}^*(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ et le foncteur $\tilde{H}^*(X ; \underset{\sim}{Q})$ sont semi-exacts.

PROPOSITION 1.1. - <u>Soit</u> t <u>un foncteur semi-exact. Si</u> X <u>est un espace ponctuel,</u> $t(X) = 0$. <u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont deux espaces à point-base, l'homomorphisme naturel</u>

$$t(X \vee Y) \to t(X) \times t(Y)$$

<u>est un isomorphisme.</u>

<u>Démonstration.</u> - Si X est ponctuel, prenons $A = X$; alors X/A est ponctuel, et on a une suite exacte

$$t(\text{point}) \to t(\text{point}) \to t(\text{point})$$

où les deux applications sont l'application identique ; il en résulte bien que $t(\text{point}) = 0$. Soient maintenant X et Y deux espaces à point-base x_0 , resp. y_0 ; le "wedge" $X \vee Y$ est le quotient de la somme topologique de X et Y obtenu par identification des points x_0 et y_0 ; il s'identifie au sous-espace du produit $X \times Y$ formé des couples (x , y) tels que $x = x_0$ <u>ou</u> $y = y_0$. L'injection canonique

$$i : X \to X \vee Y \quad (\text{resp.} \quad j : Y \to X \vee Y)$$

définit

$$t(X \vee Y) \to t(X) \quad (\text{resp.} \quad t(X \vee Y) \to t(Y)),$$

d'où l'homomorphisme de l'énoncé. Soient p et q les projections canoniques de $X \vee Y$ sur X et Y respectivement ; puisque $p \circ i = id_X$ et $q \circ j = id_Y$, dans la suite exacte

$$t(Y) \xrightarrow{t(q)} t(X \vee Y) \xrightarrow{t(i)} t(X)$$

$t(q)$ est une injection, $t(i)$ une surjection, et la suite se scinde.

C. Q. F. D.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soient t et t' deux foncteurs contravariants, semi-exacts, sur la catégorie des espaces compacts et des classes d'applications continues. Soit $\varphi : t \to t'$ un morphisme de foncteurs. Si, pour toute sphère S^n (y compris la sphère vide S^{-1}),

$$\varphi(S^n) : t(S^n) \to t'(S^n)$$

est un isomorphisme, alors

$$\varphi(X) : t(X) \to t'(X)$$

est un isomorphisme chaque fois que X est un polyèdre fini.

Pour le prouver, on va utiliser la "suite de Puppe" : soient X et Y deux espaces topologiques (quelconques), et soit $f : X \to Y$ une application continue. La suite de Puppe attachée à f est la suite d'espaces et d'applications continues

$$P(f) \qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i(f)} C(f) \xrightarrow{j(f)} S(X) \xrightarrow{S(f)} S(Y)$$

définie comme suit. Soit $M(f)$ le "mapping cylinder" de f, quotient de la somme $(X \times I) \cup Y$ (où $I = [0, 1]$) par la relation d'équivalence qui identifie $(x, 0)$ à $f(X) \in Y$; on identifie X à un sous-espace de $M(f)$, par l'application $x \to (x, 1)$, et Y à un sous-espace de $M(f)$, en associant à chaque $y \in Y$ la classe de y dans $M(f)$. L'injection $Y \to M(f)$ est une équivalence d'homotopie, parce que $M(f)$ se rétracte par déformation sur son sous-espace Y. On a d'ailleurs une projection $p : M(f) \to Y$, déduite par passage au quotient de l'application $(X \times I) \cup Y \to Y$ qui est l'identité sur Y et envoie (x, t) en $f(x)$. La composée de l'injection $X \to M(f)$ et de $p : M(f) \to Y$ est précisément f. On pose :

$$C(f) = M(f)/X ,$$

l'application $i(f)$ de la suite $P(f)$ est composée de l'injection canonique $Y \to M(f)$ et de la projection $M(f) \to M(f)/X$; $i(f)$ permet d'identifier Y à un sous-espace de $C(f)$. Alors le quotient $C(f)/Y$ s'identifie au quotient de $X \times I$ par la relation d'équivalence qui identifie entre eux tous les points de $X \times \{0\}$ et identifie entre eux tous les points de $X \times \{1\}$; ce quotient est la suspension $S(X)$ [On notera que la suspension $S(\emptyset)$ de l'espace vide est la sphère S^0]. L'application $j(f)$ de la suite $P(f)$ est, par définition, l'application canonique de $C(f)$ sur son quotient $C(f)/Y$. Enfin, il est clair qu'une application continue $f : X \to Y$ induit une application continue $S(f) : S(X) \to S(Y)$ (la suspension est un foncteur covariant).

La suite de Puppe $P(f)$ est ainsi entièrement définie.

Lorsque $Y = X$, f étant l'identité, $C(f)$ est le *cône* $C(X)$ (quotient de $X \times I$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de $X \times \{1\}$), et $i(f)$ permet d'identifier X à un sous-espace de $C(X)$, en identifiant $x \in X$ à la classe de $(x, 0)$.

PROPOSITION 1.2. - *Lorsque* $f : X \to Y$ *est une application continue d'espaces compacts, et que* t *est un foncteur contravariant semi-exact, la suite associée à la suite de Puppe*

$$t(S(Y)) \to t(S(X)) \to t(C(f)) \to t(Y) \to t(X)$$

est une suite exacte (dans le cas d'un foncteur covariant, renverser le sens des flèches).

Démonstration. - On va raisonner par exemple dans le cas d'un foncteur contravariant.

(1) Exactitude pour $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i(f)} C(f)$. - On factorise cette suite :

$$X \longrightarrow M(f) \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{i(f)} C(f) ,$$

on observe que p est une équivalence d'homotopie, et que

$$t(C(f)) \to t(M(f)) \to t(X)$$

est une suite exacte, par définition d'un foncteur semi-exact.

(2) Exactitude pour $Y \xrightarrow{i(f)} C(f) \xrightarrow{j(f)} S(X)$. - Elle résulte de la définition d'un foncteur semi-exact, puisque $S(X)$ s'identifie au quotient $C(f)/Y$.

(3) Exactitude pour $C(f) \xrightarrow{j(f)} S(X) \xrightarrow{c(f)} S(Y)$. - Introduisons l'espace auxiliaire $(C(X) \cup C(Y))/T$, quotient de la somme topologique $C(X) \cup C(Y)$ des cônes de X et de Y, par la relation d'équivalence T qui identifie $(x, 0)$ et $(f(x), 0)$ pour chaque $x \in X$. Considérons les applications

$$C(f) \xrightarrow{u} (C(X) \cup C(Y))/T \xrightarrow{v} S(Y) ,$$

où u est le plongement induit par l'application d'inclusion

$$C(X) \cup Y \to C(X) \cup C(Y)$$

(qui envoie $y \in Y$ sur la classe de $(y\ ,\ 0)$) ; le quotient de $(C(X) \cup C(Y))/T$ par l'image de u s'identifie visiblement à $S(Y)$, et v est l'application de $(C(X) \cup C(Y))/T$ sur son quotient. Puisque le foncteur t est semi-exact, la suite

$$t(S(Y)) \xrightarrow{t(v)} t((C(X) \cup C(Y))/T) \xrightarrow{t(u)} t(C(f))$$

est exacte. De là on va déduire l'exactitude de la suite

$$t(S(Y)) \xrightarrow{t(s(f))} t(S(X)) \xrightarrow{t(j(f))} t(C(f)) \ .$$

Pour cela, considérons l'application $\lambda\ :\ (C(X) \cup C(Y))/T \to S(X)$ qui se réduit, sur $C(X)$, à l'application canonique $C(X) \to S(X)$, et envoie $C(Y)$ dans la classe de $X \times \{0\}$. Il est immédiat que l'application composée

$$C(f) \xrightarrow{u} (C(X) \cup C(Y))/T \xrightarrow{\lambda} S(X)$$

est l'application $j(f)$ de la suite $P(f)$. On va voir que λ est une équivalence d'homotopie, et que l'application composée

$$(C(X) \cup C(Y))/T \xrightarrow{\lambda} S(X) \xrightarrow{s(f)} S(Y)$$

est égale à la composée de v et de l'automorphisme involutif de $S(Y)$ (celui qui change la classe de $(y\ ,\ t)$ dans celle de $(y\ ,\ 1-t)$). Pour cela, introduisons l'application

$$\mu\ :\ S(X) \to (C(X) \cup C(Y))/T$$

qui envoie la classe de $(x\ ,\ t)$ dans celle de $(f(x)\ ,\ 1-2t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ et dans celle de $(x\ ,\ 2t-1)$ pour $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Le lecteur vérifiera sans peine que $\lambda \circ p$ et $\mu \circ \lambda$ sont homotopes à l'identité, et que l'application composée

$$S(X) \xrightarrow{\mu} (C(X) \cup C(Y))/T \xrightarrow{v} S(Y)$$

est égale à la composée de $S(f)$ et de l'involution de $S(Y)$. Ceci achève la démonstration de la proposition 1.2.

<u>Démonstration du théorème</u> 1. – On va, en fait, prouver un peu plus : on montrera que, sous les hypothèses du théorème 1, $\varphi(X)\ :\ t(X) \to t'(X)$ est un isomorphisme chaque fois que l'espace X appartient à une classe plus vaste que celle des polyèdres finis, à savoir celle des CW-<u>complexes finis</u>.

On appelle CW-complexe fini un espace topologique X tel qu'il existe une suite de sous-espaces fermés

$$X_o = \emptyset \subset X_1 \subset \ldots \subset X_q = X$$

et une suite d'applications continues $f_i : S^{n_i-1} \to X_i$ $(0 \leqslant i < q)$ (où les n_i sont des entiers $\geqslant 0$; et S^{n_i-1} désigne la sphère de dimension $n_i - 1$, bord de la boule fermée B_{n_i} de dimension n_i) jouissant des propriétés suivantes : pour chaque i tel que $0 \leqslant i < q$, l'espace X_{i+1} est quotient de la somme topologique $X_i \cup B_{n_i}$ par la relation d'équivalence qui identifie chaque point $y \in S^{n_i-1}$ à $f_i(y) \in X_i$ [on dit que X_{i+1} est obtenu par <u>attachement d'une cellule</u> de dimension n_i à X_i au moyen de l'application f_i].

On montre par récurrence sur i que chaque espace X_i est <u>compact</u> ; donc tout CW-complexe fini est compact. On notera qu'on a nécessairement $n_1 = 0$, car seule la sphère de dimension -1 est vide : autrement dit, on doit commencer par attacher un point à l'ensemble vide (au moyen de l'application vide). Il n'est pas supposé que la suite des entiers n_i soit croissante (même au sens large).

Plus précisément, on dira qu'un espace X est un CW-complexe de rang $\leqslant p$ s'il existe une suite $X_o \subset X_1 \subset \ldots \subset X_q = X$ comme ci-dessus, avec $q \leqslant p$. Le théorème 1 sera prouvé si on montre, par récurrence sur l'entier $p \geqslant 1$, l'assertion suivante :

(A_p) <u>Sous les hypothèses du théorème</u> 1, $\varphi(X) : t(X) \to t'(X)$ <u>est un isomorphisme chaque fois que</u> X <u>est un</u> CW-<u>complexe de rang</u> $\leqslant p$.

L'assertion (A_1) est triviale, puisque $t(X)$ et $t'(X)$ sont nuls quand X est un espace ponctuel. Pour la récurrence de (A_p) à (A_{p+1}) (avec $p \geqslant 1$), on aura besoin du

LEMME 1. - <u>Si</u> (A_p) <u>est vraie, et si</u> Y <u>est un</u> CW-<u>complexe de rang</u> $\leqslant p$, <u>alors</u> $\varphi(SY) : t(SY) \to t'(SY)$ <u>est un isomorphisme</u> (SY désigne la suspension de Y).

Admettons ce lemme (qui sera démontré en Appendice). Soit alors X un espace pouvant être construit au moyen d'une suite de $p + 1$ attachements, et soit

$$X_o = \emptyset \subset X_1 \subset \ldots \subset X_p \subset X_{p+1} = X$$

la décomposition correspondante. Posons $X_p = Y$; X s'obtient par attachement à

Y d'une cellule de dimension $n \geqslant 0$, au moyen d'une application continue

$$f : S^{n-1} \to Y .$$

Il est immédiat que X s'identifie à l'espace $C(f)$ de la suite de Puppe de l'application f . D'après la proposition 1.2, on a un diagramme commutatif dont les suites horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} t(SY) & \longrightarrow & t(S^n) & \longrightarrow & t(X) & \longrightarrow & t(Y) & \longrightarrow & t(S^{n-1}) \\ \downarrow \varphi(SY) & & \downarrow \varphi(S^n) & & \downarrow \varphi(X) & & \downarrow \varphi(Y) & & \downarrow \varphi(S^{n-1}) \\ t'(SY) & \longrightarrow & t'(S^n) & \longrightarrow & t'(X) & \longrightarrow & t'(Y) & \longrightarrow & t'(S^{n-1}) \end{array}$$

Par l'hypothèse de l'énoncé, $\varphi(S^{n-1})$ et $\varphi(S^n)$ sont des isomorphismes ; par l'hypothèse de récurrence (A_p) , $\varphi(Y)$ est un isomorphisme ; par le lemme, $\varphi(SY)$ est aussi un isomorphisme. Alors le "lemme des cinq" montre que $\varphi(X)$ est un isomorphisme, ce qui prouve l'assertion (A_{p+1}) , et achève la démonstration du thécrème 1.

Définition. - On dit qu'un foncteur contravariant t , défini sur la catégorie des espaces compacts et des classes d'homotopie d'applications continues, satisfait à la condition (L) si, pour tout espace compact X , $t(X)$ s'identifie à la limite inductive des $t(GN(\mathcal{U}))$ relatifs aux recouvrements ouverts finis $\mathcal{U}$ de X , en notant $GN(\mathcal{U})$ le polyèdre, réalisation géométrique du "nerf" du recouvrement $\mathcal{U}$.

Cette définition appelle quelques explications. Rappelons que toute partition de l'unité, sur X , subordonnée au recouvrement ouvert fini $\mathcal{U}$, définit une application continue $X \to GN(\mathcal{U})$, et que si on a deux partitions subordonnées au même recouvrement $\mathcal{U}$, les applications qu'elles définissent sont homotopes, d'où une application bien déterminée

$$g_{\mathcal{U}} : t(GN(\mathcal{U})) \to t(X) .$$

De plus, soit $\mathcal{V}$ un recouvrement (ouvert fini) plus fin que $\mathcal{U}$; posons :

$$\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J} , \qquad \mathcal{U} = (U_i)_{i\in I} ,$$

et soit $f : J \to I$ une application telle que $U_{f(j)} \supset V_j$ pour tout $j \in J$. La fonction f associe à tout "sommet" du nerf $N(\mathcal{V})$ un "sommet" du nerf $N(\mathcal{U})$ et par affinité f définit une application continue

$$GN(f) : GN(\mathcal{V}) \to GN(\mathcal{U}) .$$

Soit alors $(\varphi_j)_{j\in J}$ une partition de l'unité, sur X , subordonnée au recouvrement

$\mathcal{V}$, et posons

$$\psi_i = \sum_{j \in f^{-1}(i)} \varphi_j \ ;$$

(ψ_i) est une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$. Il s'ensuit que l'application $X \to GN(\mathcal{U})$ définie par la partition (ψ_i) est composée de l'application $X \to GN(\mathcal{V})$ définie par la partition (φ_j) et de l'application

$$GN(f) \ : \ GN(\mathcal{V}) \to GN(\mathcal{U}) \ .$$

De plus, la classe d'homotopie de l'application $GN(f)$ est indépendante du choix de f . Donc l'homomorphisme

$$g_{\mathcal{V},\mathcal{U}} \ : \ t(GN(\mathcal{U})) \to t(GN(\mathcal{V})) \ ,$$

égal à $t(GN(f))$, est bien déterminé ; avec ces homomorphismes $g_{\mathcal{V},\mathcal{U}}$, les $t(GN(\mathcal{U}))$ forment un <u>système inductif</u> de groupes abéliens ; et comme

$$g_{\mathcal{U}} = g_{\mathcal{V}} \circ g_{\mathcal{V},\mathcal{U}} \ ,$$

les homomorphismes $g_{\mathcal{U}}$ définissent un homomorphisme

$$g \ : \ \varinjlim_{\mathcal{U}} t(GN(\mathcal{U})) \to t(X) \ .$$

Dire que le foncteur t <u>satisfait à la condition</u> (L) , c'est, par définition, dire que l'homomorphisme g est un <u>isomorphisme</u>.

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> t <u>et</u> t' <u>deux foncteurs contravariants, semi-exacts, définis sur la catégorie des espaces compacts et des classes d'homotopie d'applications continues. Supposons que</u> t <u>et</u> t' <u>satisfassent à la condition</u> (L) , <u>et soit</u> $\varphi \ : \ t \to t'$ <u>un morphisme de foncteurs, tel que</u> $\varphi(X) \ : \ t(X) \to t'(X)$ <u>soit un isomorphisme chaque fois que</u> X <u>est une sphère. Alors</u> $\varphi(X)$ <u>est un isomorphisme quel que soit l'espace compact</u> X .

Ce théorème résulte immédiatement du théorème 1.

2. <u>Application aux foncteurs</u> $\tilde{K}$ <u>et</u> $\tilde{H}^*$.

LEMME 2. - <u>Tous les foncteurs semi-exacts donnés en exemple au début du</u> § 1 <u>satisfont à la condition</u> (L) .

La démonstration de ce lemme est donnée en Appendice.

On va alors appliquer le théorème 2 dans deux cas :

Premier cas. - On prend

$$t(X) = \widetilde{H}^*(X) \otimes \underset{\sim}{Q} , \qquad t'(X) = \widetilde{H}^*(X ; \underset{\sim}{Q}) ,$$

$\varphi : \widetilde{H}^*(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \to \widetilde{H}^*(X ; \underset{\sim}{Q})$ étant l'homomorphisme naturel. Il est immédiat que $\varphi(X)$ est un isomorphisme lorsque X est une sphère. D'après le théorème 2, on a donc

$$\widetilde{H}^*(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \approx \widetilde{H}^*(X ; \underset{\sim}{Q})$$

pour tout espace compact X.

Deuxième cas. - On prend

$$t(X) = \widetilde{K}(X) \otimes \underset{\sim}{Q} , \qquad t'(X) = \widetilde{H}^{pair}(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \quad (= \widetilde{H}^{pair}(X ; \underset{\sim}{Q})).$$

On prend pour φ le caractère de Chern :

$$ch(X) : \widetilde{K}(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \to \widetilde{H}^{pair}(X) \otimes \underset{\sim}{Q} .$$

On va démontrer ci-dessous, comme conséquence du théorème de Bott, que lorsque X est une sphère S^n, $ch(S^n)$ est un isomorphisme. Si on admet ce résultat, on obtient :

THÉORÈME 3. - *Pour tout espace compact X, le caractère de Chern est un isomorphisme de $\widetilde{K}(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ sur $\widetilde{H}^{pair}(X) \otimes \underset{\sim}{Q} = \widetilde{H}^{pair}(X ; \underset{\sim}{Q})$.*

Par voie de conséquence, si A est un sous-espace fermé de X compact, le caractère de Chern est un isomorphisme

$$K(X , A) \otimes \underset{\sim}{Q} \approx H^{pair}(X , A) \otimes \underset{\sim}{Q} ,$$

et en particulier (lorsque A est vide)

$$K(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \approx H^{pair}(X) \otimes \underset{\sim}{Q} .$$

Comme on l'a dit, il suffit de prouver le théorème 3 dans le cas où X est une sphère S^n. On doit d'abord déterminer le groupe $\widetilde{K}(S^n)$. Pour cela, on va utiliser le théorème de Bott, sous la forme que lui a donnée ATIYAH. Introduisons d'abord une notation : soient X et Y deux espaces compacts à point-base x_0, resp. y_0 ; dans un exposé précédent [7], on a défini (§ 3) une multiplication

$$K(X , x_0) \otimes K(Y , y_0) \to K(X \times Y , X \vee Y) ;$$

notons $X \# Y$ l'espace quotient $(X \times Y)/(X \vee Y)$; on obtient une multiplication

$$\eta_K : \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \# Y)$$

(dépendant du choix des points-base) ; et la propriété multiplicative du caractère de Chern se traduit par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) & \xrightarrow{\eta_K} & \tilde{K}(X \# Y) \\ \downarrow{\scriptstyle ch\otimes ch} & & \downarrow{\scriptstyle ch} \\ \tilde{H}^*(X ; Q) \otimes \tilde{H}^*(Y ; Q) & \xrightarrow{\eta_H} & H^*(X \# Y ; Q) \end{array}$$

où η_H se déduit du cup-produit en cohomologie de la même manière que η_K a été défini en K-théorie. Cela dit, le théorème de Bott peut s'énoncer comme suit :

Théorème de Bott. - $\tilde{K}(S^0) \approx \underset{\sim}{Z}$, $\tilde{K}(S^1) = 0$, $\tilde{K}(S^2) \approx \underset{\sim}{Z}$, et, pour tout espace compact X , l'homomorphisme

$$\eta_K : \tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(S^2 \# X)$$

est un isomorphisme.

Les premières assertions sont presque évidentes (cf. [10] , p. 99). Nous ne démontrerons pas ici l'assertion essentielle, pour laquelle nous renvoyons à une démonstration élémentaire due à ATIYAH et BOTT [4] . Notons d'ailleurs que, d'après le théorème 2, il suffit de prouver le théorème de Bott lorsque X est une sphère S^n ; c'est d'ailleurs ce cas qui nous intéresse plus spécialement : en effet, $S^2 \# S^n$ n'est autre que la sphère S^{n+2} , de sorte que η_K donne un isomorphisme

$$\tilde{K}(S^n) \approx \tilde{K}(S^{n+2}) ,$$

qui est essentiellement le "théorème de périodicité" de Bott. On voit que

$$\tilde{K}(S^n) = 0 \text{ si } n \text{ est impair,}$$

$$\tilde{K}(S^n) \approx \underset{\sim}{Z} \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Or $\tilde{K}(S^n)$ s'interprète comme le groupe des classes d'applications continues $S^n \to BU$; le théorème de Bott entraîne donc que les groupes d'homotopie

$$\begin{aligned} \pi_n(BU) & \text{ sont nuls pour } n \text{ impair,} \\ & \approx \underset{\sim}{Z} \text{ pour } n \text{ pair.} \end{aligned}$$

Le théorème de Bott étant admis, il reste à prouver le théorème 3 dans le cas où $X = S^n$. On a en fait le résultat plus précis :

PROPOSITION 2.1. - Le caractère de Chern

$$\mathrm{ch} : \tilde{K}(S^n) \to \tilde{H}^{pair}(S^n ; \underset{\sim}{Q})$$

prend ses valeurs dans le sous-groupe $\tilde{H}^{pair}(S^n ; \underset{\sim}{Z})$ de

$$H^{pair}(S^n ; \underset{\sim}{Q}) = H^{pair}(S^n ; \underset{\sim}{Z}) \otimes \underset{\sim}{Q} ,$$

et est en fait un isomorphisme

$$\tilde{K}(S^n) \approx \tilde{H}^{pair}(S^n ; \underset{\sim}{Z}) .$$

Observons que $\tilde{H}^{pair}(S^n)$ se réduit à 0 si n est impair, et à $\tilde{H}^n(S^n) \approx \underset{\sim}{Z}$ si n est pair. Pour n impair, la proposition résulte du fait que $\tilde{K}(S^n) = 0$. Pour n pair, on va la prouver par récurrence sur $n/2$; pour $n = 2$, le groupe $\tilde{K}(S^2)$ est engendré par la classe du fibré universel $\chi(1 , 1)$ ayant pour base l'espace projectif $P_1(\underset{\sim}{C}) \approx S^2$, dont la classe de Chern c_1 est, au signe près, le générateur x de $H^2(S^2) \approx \underset{\sim}{Z}$; et comme $\mathrm{ch}(\chi(1 , 1)) = c_1(\chi(1 , 1))$, la proposition à démontrer est bien vraie pour $n = 2$. Enfin, si elle est vraie pour n pair, elle est vraie pour $n + 2$, en vertu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}(S^n) \otimes \tilde{K}(S^2) \arrow[r, "\eta_K"] \arrow[d, "\mathrm{ch}\otimes\mathrm{ch}"] & \tilde{K}(S^{n+2}) \arrow[dr, "\mathrm{ch}"] & \\
\tilde{H}(S^n) \otimes \tilde{H}(S^2) \arrow[r, "\eta_H"] & \tilde{H}(S^{n+2}) \subset & \tilde{H}(S^{n+2}) \otimes \underset{\sim}{Q}
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les deux flèches horizontales sont des isomorphismes (la première à cause du théorème de Bott, la seconde à cause du calcul de la classe fondamentale de cohomologie de la sphère), et la flèche verticale de gauche est un isomorphisme (par l'hypothèse de récurrence). Il s'ensuit que la flèche verticale de droite est un isomorphisme de $\tilde{K}(S^{n+2})$ sur $\tilde{H}(S^{n+2})$.

Remarque. - Si ξ est un fibré vectoriel complexe de base S^{2p}, les classes de Chern $c_i(\xi)$ sont évidemment nulles pour $i < p$, et on a donc

$$\mathrm{ch}(\xi) = (-1)^p \frac{c_p(\xi)}{(p-1)!} .$$

La proposition 2.1 entraîne donc que $c_p(\xi) \in H^{2p}(S^{2p}) \approx \underset{\sim}{Z}$ est divisible par $(p - 1)!$

3. L'isomorphisme de Thom-Gysin en K-théorie.

Soit $\{E , X , \pi\}$ un fibré vectoriel réel orienté, à fibres de dimension paire $2n$, à base compacte X. Une métrique riemannienne ayant été choisie sur le fibré E, soient B et S les fibrés associés, respectivement en boules et en sphères. L'espace B se rétracte par déformation sur la section nulle du fibré, identifiée à la base X ; d'où $K(X) \approx K(B)$. Il s'ensuit que $K(B , S) \approx \tilde{K}(B/S)$ est un module sur $K(X)$. De plus, pour chaque $x \in X$, soient S_x et B_x les fibres de S et de B ; on a

$$K(B_x , S_x) \approx \tilde{K}(B_x/S_x) \approx \tilde{K}(S^{2n}) \approx \mathbb{Z} .$$

THÉORÈME 4. - Pour un élément $v \in K(B , S) \otimes \mathbb{Q}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(v)) \in H^{\mathrm{pair}}(X ; \mathbb{Q})$ (où φ désigne l'isomorphisme de Thom-Gysin $H^q(X ; Q) \to H^{q+2n}(B , S ; \mathbb{Q})$) a pour composante de degré 0 une fonction $X \to \mathbb{Q}$ qui est $\neq 0$ en chaque point $x \in X$;

(b) Pour tout $x \in X$, l'image de v dans $K(B_x , S_x) \otimes \mathbb{Q} \approx \tilde{K}(S^{2n}) \otimes \mathbb{Q}$ est $\neq 0$;

(c) L'application $\alpha \to v.\alpha$ de $K(X) \otimes \mathbb{Q}$ dans $K(B , S) \otimes \mathbb{Q}$ est bijective (donc $K(B , S) \otimes \mathbb{Q}$ est un module libre sur $K(X) \otimes \mathbb{Q}$, ayant v comme générateur).

De plus, il existe des éléments $v \in K(B , S) \otimes \mathbb{Q}$ possédant les propriétés précédentes.

Démonstration. - L'équivalence de (a) et (b) suit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
K(B , S) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & K(B_x , S_x) \otimes \mathbb{Q} \\
\approx\downarrow \mathrm{ch} & & \approx\downarrow \mathrm{ch} \\
H^{\mathrm{pair}}(B , S) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & H^{\mathrm{pair}}(B_x , S_x) \otimes \mathbb{Q} = H^{2n}(B_x , S_x) \otimes \mathbb{Q} \\
\approx\downarrow \varphi^{-1} & & \approx\downarrow \varphi^{-1} \\
H^{\mathrm{pair}}(X) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & H^0(\{x\}) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}
\end{array}$$

D'autre part, (c) équivaut à dire que l'application

$$\beta \to \mathrm{ch}(v).\beta \quad \text{de} \quad H^{\mathrm{pair}}(X) \otimes \mathbb{Q} \quad \text{dans} \quad H^{\mathrm{pair}}(B , S) \otimes \mathbb{Q}$$

est bijective, ou encore, en la faisant suivre de φ^{-1}, que $\varphi^{-1}(\mathrm{ch}(v))$ est un élément inversible de l'algèbre $H^{\mathrm{pair}}(X) \otimes \mathbb{Q}$. Tout revient donc à prouver que les éléments inversibles de $H^{pair}(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ sont exactement ceux qui, pour tout $x \in X$, induisent un élément $\neq 0$ dans $H^0(\{x\}) \otimes \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}$.

Or soit $w \in H^{pair}(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$, et soit, pour tout x, q_x le nombre rationnel qui correspond à w dans l'application

$$H^{pair}(X) \otimes \underset{\sim}{Q} \to H^0(\{x\}) \otimes \underset{\sim}{Q} .$$

Le nombre q_x est localement constant, donc X admet une partition en un nombre fini d'ouverts dans chacun desquels q_x est indépendant de x. On est ainsi ramené à démontrer que, si on a un espace compact X et un élément $w \in H^*(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ dont la composante de degré 0 est une constante non nulle, w est inversible dans l'algèbre $H^*(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$; or cela résulte du fait que les éléments de degré > 0 de $H^*(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ sont <u>nilpotents</u>.

Pour achever de prouver le théorème 4, il reste à montrer qu'il existe un $v \in K(B, S) \otimes \underset{\sim}{Q}$ ayant les propriétés (a), (b), (c). Il suffit de prendre l'élément que l'isomorphisme

$$ch : K(B, S) \otimes \underset{\sim}{Q} \to H^{pair}(B, S) \otimes \underset{\sim}{Q}$$

envoie dans la classe fondamentale $u_E \in H^{2n}(B, S)$.

<u>Remarque</u>. - Ce serait une erreur de croire que si deux éléments de $K(B, S) \otimes \underset{\sim}{Q}$ induisent le même élément de $K(B_x, S_x) \otimes \underset{\sim}{Q}$ pour tout $x \in X$, ils sont égaux.

<u>Appendice</u>

4. <u>Démonstration du lemme</u> 1 (§ 2).

L'assertion du lemme est triviale si Y est vide, puisqu'alors SY est une sphère S^0, et que $t(S^0) \to t'(S^0)$ est un isomorphisme sous les hypothèses du théorème 1. Supposons donc Y non vide. Choisissant un "point-base" $y_0 \in Y$, on va définir la "suspension réduite" $S(Y, y_0)$, comme suit : $S(y_0)$, qui est homéomorphe au segment $I = [0, 1]$, s'identifie à un sous-espace de $S(Y)$; par définition, $S(Y, y_0)$ est le quotient $S(Y)/S(y_0)$, et l'image de $S(y_0)$ dans ce quotient est le point-base de $S(Y, y_0)$. Compte tenu du fait que Y est compact, on va montrer que <u>l'application canonique</u>

$$p : S(Y) \to S(Y, y_0)$$

<u>est une homotopie-équivalence.</u>

Cela résulte du lemme suivant.

LEMME 3. - Si X est un espace compact, et A un sous-espace fermé et contractile, l'application canonique $X \to X/A$ est une homotopie-équivalence.

<u>Démonstration du lemme</u> 3. - L'application identique de A est homotope à une application constante $\gamma : A \to A$; il s'ensuit que l'application identique de X est homotope à une application $g : X \to X$ qui prolonge γ, et dans l'homotopie A est envoyé à chaque instant dans A. Par passage au quotient, on trouve une homotopie entre l'application identique de X/A et l'application $h : X/A \to X/A$ déduite de g par passage aux quotients. Soit $p : X \to X/A$ l'application canonique ; g se factorise en $f \circ p$, où $f : X/A \to X$. On a alors $h \circ p = p \circ f \circ p$, d'où, puisque p est surjectif, $h = p \circ f$. Ainsi $f \circ p$ et $p \circ f$ sont homotopes à l'identité, et par suite p est une homotopie-équivalence.

Venons alors à la démonstration du lemme 1. Par hypothèse, Y est un CW-complexe non vide, de rang $\leqslant p$; soit

$$Y_0 = \emptyset \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_q = Y$$

la décomposition de Y correspondant à une suite de q attachements $(1 \leqslant q \leqslant p)$; observons que Y_1 est réduit à un point, que nous prendrons comme point-base y_0 pour la suspension réduite $S(Y , y_0)$.

Le lemme 3 montre que, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
t(S(Y , y_0)) & \xrightarrow{\varphi(S(Y,y_0))} & t'(S(Y , y_0)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
t(SY) & \xrightarrow{\varphi(SY)} & t'(SY)
\end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes. Pour prouver que $\varphi(SY)$ est un isomorphisme, il suffit donc de prouver que $\varphi(S(Y , y_0))$ est un isomorphisme. Pour cela, on va faire voir que la suspension réduite $S(Y , y_0)$ est un CW-complexe de rang $\leqslant p$, ce qui permettra de lui appliquer l'assertion (A_p) et prouvera ainsi le lemme 1.

La suspension réduite $S(Y , y_0)$ s'identifie au quotient de $Y \times I$ par la relation d'équivalence qui contracte en un point le sous-espace

$$Z = (Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) \cup (\{y_0\} \times I) .$$

La construction de Y par q attachements ($q \leqslant p$), et celle de I par 3 attachements, donnent, par "produit", une construction de $Y \times I$ par $3q$ attachements successifs, de façon que les $2q + 1$ premiers attachements donnent le sous-espace Z. Ainsi $Y \times I$ s'obtient par attachements successifs de $q - 1$ cellules à Z. Si on concentre Z en un point, l'espace quotient $S(Y , y_0)$ s'obtient donc par attachements successifs de $q - 1$ cellules à un point, c'est-à-dire par attachements successifs de q cellules à l'ensemble vide.

C. Q. F. D.

5. Démonstration du lemme 2.

Le foncteur $H^*(X)$ (resp. $\widetilde{H}^*(X)$), cohomologie de Čech (resp. cohomologie de Čech réduite) satisfait à la condition (L) du § 2 : cela résulte de la définition de la cohomologie de Čech, comme limite inductive des cohomologies des nerfs des recouvrements ouverts finis de l'espace compact X. Ce résultat vaut pour tout groupe de coefficients, et en particulier pour les coefficients $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. Comme le produit tensoriel commute avec les limites inductives, le foncteur $H^*(X ; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ satisfait aussi à la condition (L).

Il nous reste à montrer que le foncteur $\widetilde{K}(X)$ satisfait à la condition (L), d'où il résultera aussitôt que $\widetilde{K}(X) \otimes \mathbb{Q}$ y satisfait aussi.

D'après le théorème de classification (cf. [8]), $\widetilde{K}(X)$ s'identifie à l'ensemble $[X , BU]$ formé des classes d'applications continues de X dans le classifiant BU (limite inductive des $BU(n)$ lorsque n augmente indéfiniment). Tout revient donc à montrer que $[X , BU]$ s'identifie à la limite inductive des $[GN(\mathcal{U}) , BU]$ relatifs aux recouvrements ouverts finis $\mathcal{U}$ de X.

Soit $BU(n , n)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\mathbb{C}^{2n}$; BU s'identifie à la limite inductive des $BU(n , n)$, et, puisque X est compact, on a :

$$[X , BU] = \lim_{\vec{n}} [X , BU(n , n)] .$$

On a de même

$$[GN(\mathcal{U}) , BU] = \lim_{\vec{n}} [GN(\mathcal{U}) , BU(n , n)] .$$

Alors, la relation à démontrer

$$[X , BU] = \lim_{\vec{\mathcal{U}}} [GN(\mathcal{U}) , BU]$$

résultera de la relation (valable pour chaque entier n) :

$$(*) \qquad [X , BU(n , n)] = \varinjlim_{\mathfrak{U}} [G^N(\mathfrak{U}) , BU(n , n)] .$$

Cette dernière relation est une conséquence du fait que l'espace $BU(n , n)$ est une variété triangulable : une application continue $X \to BU(n , n)$ est alors définie par une partition de l'unité sur X , d'où facilement la relation (*).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). - Vector bundles and homogeneous spaces, Differential geometry, p. 7-38. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Proc. Symp. pure Math., 3).

[2] CARTAN (Henri). - Définition et propriétés élémentaires des groupes K(X) et K(X , A) [rédigé par L. Illusie], Séminaire Cartan-Schwartz, t. 16, 1963/64, n° 3, 12 p.

[3] DOLD (Albrecht). - Half exact functors [Texte multigraphié d'une conférence faite à Seattle, en 1963].

[4] DOUADY (Adrien). - Démonstration élémentaire d'un théorème de périodicité de Bott, Séminaire Bourbaki, t. 16, 1963/64, n° 259, 9 p.

[5] EILENBERG (S.) and STEENROD (N.). - Foundations of algebraic topology. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Princeton mathematical Series, 15).

[6] ILLUSIE (Luc). - Compléments de K-théorie, Séminaire Cartan-Schwartz, t. 16, 1963/64, n° 15, 10 p.

[7] MORLET (Claude). - Classes fondamentales, Classes de Chern [rédigé par M. Karoubi], Séminaire Cartan-Schwartz, t. 16, 1963/64, n° 4, 10 p.

[8] MORLET (Claude). - Fibré universel et espace classifiant des fibrés vectoriels complexes [rédigé par M. Karoubi], Séminaire Cartan-Schwartz, t. 16, 1963/64, n° 5, 14 p.

[9] PUPPE (Dieter). - Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen, I., Math. Z., t. 69, 1958, p. 299-344.

[10] STEENROD (Norman). - The topology of fibre bundles. - Princeton, Princeton University Press, 1951 (Princeton mathematical Series, 14).

[11] WHITEHEAD (J. H. C.). - Combinatorial homotopy, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 213-245.