Paul Krée

Espaces Hs. Lemme de commutation

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 8, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A8_0>

ESPACES H^s. LEMME DE COMMUTATION

par Paul KRÉE

Les espaces H^s que nous considérons ci-après sont d'un emploi courant dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Le lemme de commutation sert pour le calcul symbolique approximatif de Celderon-Zygmund dans $\underset{\sim}{R}^n$ (exposé suivant). Et ce n'est qu'ensuite que ce calcul sera étendu à une variété réelle de classe C^∞.

1. Notations.

(On pourra se reporter pour des renseignements complémentaire à l'exposé 1 ou à [5].)

s est un nombre réel quelconque.

n = entier $\geqslant 1$ = dimension d'un $\underset{\sim}{R}$-espace vectoriel X (les éléments génériques sont notés x , y , ...).

Ξ = l'espace vectoriel dual. (les éléments génériques sont notés ξ , η , ...).

$\langle \xi , x\rangle$ = la forme bilinéaire reliant X et Ξ. Ξ est identifié au groupe topologique dual du groupe additif X : la dualité est donnée par

$$(\xi , x) \to \exp(2\pi i\langle \xi , x\rangle) \quad .$$

N. B. - La lettre C est réservée pour désigner dans les calculs une constante que l'on n'a pas jugé utile d'expliciter, et qui peut varier d'une formule à la suivante.

Eléments non canoniques.

- une forme quadratique Q définie sur X, définie positive ;
- une base de X formée de vecteurs orthonormés par rapport à Q

$$x = (x_1 , \ldots , x_n)$$

$$Q(x) = |x|^2 = \sum_i x_i^2 \quad ;$$

- la base duale de Ξ :

$$\xi = (\xi_1 , \ldots , \xi_n) \quad ;$$

- la forme quadratique "duale" de Q :

$$|\xi|^2 = \sum_i \xi_i^2$$

- les mesures de Haar

$$dx = dx_1 \dots dx_n$$

$$d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n \quad .$$

Pour voir que la théorie ci-après ne dépend pas du choix de ces éléments, on utilisera les remarques suivantes :

- sur un groupe abélien localement compact, toutes les mesures de Haar sont proportionnelles ;

- deux formes quadratiques $|\cdot|_1^2$ et $|\cdot|_2^2$ sur X définissent deux normes équivalentes : il existe C et C' tels que

$$C|\cdot|_2 \leqslant |\cdot|_1 \leqslant C'|\cdot|_2 \quad .$$

<u>Fonctions et distributions.</u>

Toutes les fonctions ou distributions sont à valeurs complexes. Comme elles sont définies sur X ou Ξ , on utilisera la notation suivante :

$\mathcal{D}(X)$ = l'e. v. t. des fonctions C^∞ à support compact, définies sur X avec la topologie habituelle (définition analogue de $\mathcal{D}(\Xi)$) ;

$\mathcal{S}(X)$ = le Fréchet des fonctions C^∞ sur X , qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées ;

$\mathcal{D}'(X)$ = l'espace des distributions ;

$\mathcal{D}'$ est en dualité avec $\mathcal{D}$ par la forme bilinéaire

$$\langle T , \varphi\rangle = \int T(x)\ \varphi(x)\ dx$$

$\mathcal{D}'$ est en antidualité avec $\mathcal{D}$ par la forme antilinéaire

$$(T \mid \varphi) = \langle T , \overline{\varphi}\rangle = \int T(x)\ \overline{\varphi}(x)\ dx$$

si k est un multi-indice,

$$k = k_1 \dots k_n$$

et

$$D^k = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

on rappelle que

$$\langle D^k T , \varphi\rangle = (-1)^{|k|} \langle T , D^k \varphi\rangle$$

$$(D^k T \mid \varphi) = (T \mid D^k \varphi) \quad .$$

Transformation de Fourier.

Pour toute φ de $\mathcal{S}(X)$ on pose

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int \exp(-2\pi i\langle x , \xi\rangle)\ \varphi(x)\ dx \quad .$$

On rappelle que l'on a des isomorphismes réciproques

$$\mathcal{S}(X) \underset{\overline{\mathcal{F}}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}(\Xi)$$

et l'on définit la transformation de Fourier des distributions tempérées par transposition des isomorphismes ci-dessus.

2. Espaces H^s (s réel quelconque).

(On devrait écrire $H^s(X)$ car les éléments de H^s sont des distributions sur X .)

2.1. Définition si s est un entier positif.

(On suppose donnée une mesure de Haar sur X , mais la forme quadratique est ici inutile.)

- pour $s = 0$

$$H^0 = L^2(X)$$

avec la norme

$$\|f\| = (\int |f(x)|^2\ dx)^{1/2}$$

et le produit scalaire

$$(f \mid g) = \int f(x)\ \overline{g}(x)\ dx$$

- pour s dans $\mathbb{N}$, H^s est l'espace vectoriel des distributions T qui sont ainsi que toutes leurs dérivées distributions $D^\ell T$ d'ordre $|\ell| \leqslant s$, dans L^2 ; H^s est muni de la norme

$$\|T\|_s = (\sum_{|\ell| \leqslant s} \|D^\ell T\|^2)^{1/2} \quad .$$

Comme T est tempérée, on peut chercher une autre expression de cette norme en considérant $\mathcal{F}T$ et en appliquant le théorème de Plancherel

$$\|T\|'_s = \Big(\sum_{|\ell|\leqslant s} \|\xi^\ell\ \hat{T}\|^2\Big)^{1/2}$$

$$= \Big(\int (\hat{T}(\xi))^2 \Big(\sum_{|\ell|\leqslant s} \xi^{2\ell}\Big)\ d\xi\Big)^{1/2}$$

les transformées de Fourier $\hat{T}$ des éléments de H^s sont donc de carré sommable par rapport à la mesure

$$\mu' = \sum_{|\ell|\leqslant s} \xi^{2\ell}\ d\xi$$

et la norme de T dans H^s, c'est la norme de $\hat{T}$ dans $L^2_{\mu'}(\Xi)$. On obtiendra donc le même espace vectoriel, muni d'une norme équivalente, si l'on remplace μ' par une mesure μ équivalante (c'est-à-dire : $\exists$ C et C' tels que $C\mu \leqslant \mu' \leqslant C'\mu$).

D'où l'idée de prendre $\mu = (1 + |\xi|^2)^s\ d\xi$ une forme quadratique $\xi \to |\xi|^2$ étant choisie sur Ξ. Si l'on considère deux formes quadratiques $|\cdot|_1^2$ et $|:|_2^2$ sur Ξ, les mesures μ associées sont équivalentes. D'où :

2.2. Définition si s est réel quelconque.

H^s est l'espace vectoriel des distributions tempérées f définies sur X dont la transformée de Fourier $\hat{f}$ est une fonction de carré sommable par rapport à la mesure $(1 + |\xi|^2)^s\ d\xi$, $|\xi|^2$ étant une forme quadratique définie positive quelconque sur Ξ ; pour tout choix d'une telle forme, il est muni de la norme suivante qui en fait un espace de Hilbert :

$$\|f\|_s = \Big(\int |\hat{f}(\xi))^2\ (1 + |\xi|^2)^s\ d\xi\Big)^{1/2} \quad .$$

On peut encore dire : $f \in \mathcal{S}'(X)$ est dans H^s si et seulement si $(1 + |\xi|^2)^{1/2}\ \hat{f}(\xi)$ est dans $L^2(\Xi)$ (L^2 par rapport à la mesure de Haar $d\xi$), et

$$\|f\|_s = \|(1 + |\xi|^2)^{1/2}\ \hat{f}(\xi)\|_{L^2(\Xi)} \quad .$$

Si (en conservant toujours, pour l'instant, les mesures de Haar duales dx et $d\xi$ sur X et Ξ pour ne pas avoir d'ennuis dans la définition des distributions) on change la forme quadratique $|\xi|^2$ sur Ξ, les H^s ne changent pas, mais leur norme change. Ce sont donc des espaces hilbertisables plutôt qu'hilbertiens.

2.3. Densité de $\mathcal{S}(X)$ et de $\mathcal{D}(X)$ dans H^s.

$\mathcal{S}(\Xi)$ étant dense dans $\mathcal{F}H^s = L^2_\mu(\Xi)$ (l'injection étant continue) il en résulte que $\mathcal{S}(X)$ est dense dans H^s. Comme $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$, il en résulte que $\mathcal{D}(X)$ est aussi dense dans H^s.

2.4. Emboitement des H^s.

Pour tout t et tout s réels tels que $t \leq s$, on a une injection continue canonique

$$0 \to H^s \to H^t$$

(car μ est une fonction croissante de s).

2.5. Les isomorphismes $G_\rho = ((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})$.

Pour tout ρ réel et pour toute forme quadratique $|\xi|^2$ définie positive sur Ξ, on note par G_ρ l'application

$$\mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$$

$$\varphi \rightsquigarrow G_\rho\, \varphi = \psi$$

$$\text{telle que } \hat{\psi} = (1 + |\xi|^2)^{\rho/2}\, \hat{\varphi} .$$

1° Les G_ρ sont des isomorphismes.

2° Par transposition, ces isomorphismes se prolongent à $\mathcal{S}'(X)$ (définis de la même manière).

3° Ces isomorphismes forment un groupe commutatif

$$G_\rho \circ G_{\rho'} = G_{\rho'} \circ G_\rho = G_{\rho+\rho'} .$$

4° Pour tout s, G_ρ induit une isométrie

$$H^s \to H^{s-\rho}$$

(ces espaces étant munis de la norme correspondant à $|\xi|^2$). Le cas particulier important c'est

$$L^2(X) = H^0 \to H^{-\rho} .$$

2.6. Dual ou antidual de H^s : H^{-s}.

En effet comme on a

$$\mathcal{S}(X) \to H^s \to \mathcal{S}'(X)$$

les flèches étant des applications linéaires continues, injectives et d'images denses, on en déduit par anti-transposition

$$\mathcal{S}'(X) \leftarrow (H^s)^{\text{antidual}} \leftarrow \mathcal{S}(X)$$

les flèches étant toujours injectives et d'images denses. Cherchons alors quel est ce sous-espace $(H^s)^{\text{antidual}}$ de $\mathcal{S}'(X)$. Choisissons une forme quadratique sur X, $\hat{g} \in \mathcal{S}(\Xi)$ appartient à l'antidual de $\mathcal{F}(H^s(X))$ si et seulement si

$$\hat{f} \rightsquigarrow \int \hat{g}\overline{\hat{f}}\, d\xi \quad ,$$

définie sur $\mathcal{S}(\Xi)$, se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{F}(H^s(X))$. Mais cela s'écrit aussi

$$\int \left(\frac{\hat{g}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}\right) \overline{(\hat{f}(\xi)}\,(1+|\xi|^2)^{1/2})\, d\xi \quad ;$$

donc $\hat{g}$ appartient à l'antidual de $\mathcal{F}(H^s)$ si et seulement si

$$\hat{g}(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-1/2} \text{ est dans } L^2 \quad ,$$

ou si

$$g \in H^{-s}(X) \quad .$$

En outre, la norme canonique de l'antidual de $H^s(X)$ est celle de $H^{-s}(X)$.

2.7. Etude du cas où s est entier positif.

Tout élément h de H^{-s} peut être représenté par une somme finie de dérivées de fonctions de L^2.

Preuve. - M étant le nombre de multi-indices ℓ d'ordre $\leq s$, on considère l'application

$$\begin{aligned} H^s &\longrightarrow (H^0)^M \\ f &\rightsquigarrow (D^\ell f)_{|\ell|} \quad . \end{aligned}$$

Elle est continue injective, et, par cette application H^s s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $(H^0)^M$; h étant une forme antilinéaire continue sur H^s, elle peut se prolonger à tout l'espace $(H^0)^M$ en une forme représentée par M fonctions h_ℓ de H^0 :

$$(f \mid h) = \sum (D^\ell f \mid h_\ell) = \sum (f \mid D^\ell h_\ell) \quad .$$

Cette représentation s'applique en particulier a δ (dans H^s si $s < -\frac{n}{2}$).

2.8. <u>Régularité</u> : k <u>étant un entier positif</u>.

$s > \frac{n}{2} + k \Longrightarrow$ <u>les éléments de</u> H^s <u>sont de classe</u> C^k.

<u>Preuve</u>. – ℓ étant un multi-indice d'ordre $\leq k$ pour prouver que $D^\ell f$ est continue (f dans H^s) il suffit de prouver que

$$\widehat{D^\ell f} = \xi^\ell \hat{f}(\xi)$$

est sommable. Or

$$\int |\xi^\ell||\hat{f}(\xi)| \, d\xi = \int \underbrace{|\hat{f}(\xi)|(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \underbrace{\frac{|\xi^\ell|}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}} d\xi \qquad .$$

Il suffit d'utiliser l'inégalité de Schwarz.

On définit alors

$$H^\infty = \mathcal{D}_{L^2} = \varprojlim H^s = \cap H^s$$

ses éléments sont C^∞.

2.9. <u>Opérations</u> (α) .

<u>Pour toute</u> α <u>de</u> $\mathcal{S}(X)$, (α) <u>désigne l'application</u>

$$\mathcal{S}'(X) \to \mathcal{S}'(X)$$
$$T \leadsto \alpha T$$

(α) <u>applique continûment</u> H^s <u>dans</u> H^s.

<u>Preuve</u>. – utilisant les isomorphismes G_ρ , il suffit de voir que

$$\begin{array}{ccc} H^o & \xrightarrow{G_\rho} & H^s \\ & & \uparrow (\alpha) \\ H^o & \xrightarrow{G_\rho} & H^s \end{array}$$

$G_{-\rho}(\alpha) G_\rho$ opère de H^o dans H^o , ou même, par Plancherel, et vu la densité de $\mathcal{S}$ dans H^o :

$$\exists \; C \; , \; \forall \; \varphi \; \text{ dans } \; \mathcal{S} \; , \; \|T\varphi\| \leq C\|\varphi\| \quad (\text{normes dans } L^2)$$

avec

$$(T\varphi)(\xi) = \int_{\eta \in \Xi} \hat{\alpha}(\xi - \eta) \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2}\right)^{s/2} \varphi(\eta) \, d\eta \qquad .$$

Ceci résulte des quatres remarques suivantes.

(a) $\forall\ s$: $(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 2^{|s|/2}(1+|\eta|^2)^{s/2}\ (1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}$ (l'inégalité pour s négatif, se déduit trivialement de l'inégalité pour $s > 0$; pour $s > 0$, il suffit de remarquer que

$$1+(a+b)^2 \leq 2(1+a^2)(1+b^2) \qquad a \text{ et } b \text{ réels } \geq 0$$

(b) on a $|(T\varphi)(\xi)| \leq (\gamma \star |\varphi|)(\xi)$ avec $\gamma(\xi) = C\,|\hat{\alpha}(\xi)|\,(1+|\xi|^2)^{|s|/2}$

(c) $\hat{\alpha}$ est à décroissance rapide, donc quel que soit s ,

$$|\hat{\alpha}(\xi)|\,(1+|\xi|^2)^{|s|/2}$$

est dans $L^1(\Xi)$.

(d) La convolution par une fonction de L^1 envoie L^2 dans L^2 .

2.10. Opérations (ρ_o) .

β étant une fonction localement sommable tempérée sur Ξ on désigne par (β) la transformation de $\mathcal{S}(X)$ dans $\mathcal{S}'(X)$: $f \to g$ avec $\hat{g} = \beta\hat{f}$ ou $g = (\bar{\mathcal{F}}\beta) \star f$.

3. Lemme de commutation.

Soit α dans $\mathcal{S}(X)$, soit $\beta = \beta_o(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{\rho/2}$ avec

$$\begin{cases} \rho \text{ réel quelconque,} \\ \beta_o \text{ dans } L^\infty(\Xi)\,, \\ \beta_o \text{ continûment dérivable dans le complémentaire d'un compact, avec} \end{cases}$$

$$\forall\ i\ ,\quad \left|\left(\frac{\partial\beta_o}{\partial\xi_i}\right)(\xi)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \text{ à l'infini} .$$

Alors, pour tout s

$$[(\alpha)\ ,\ (\beta)] = (\alpha)(\beta) - (\beta)(\alpha)$$

opère continûment de H^s dans $H^{s-\rho+1}$.

En décomposant ce crochet, on voit qu'il est clair qu'il opère de H^s dans $H^{s-\rho}$

$$\begin{array}{ccc} H_o & \xrightarrow{G_{s-\rho+1}} & H^{s-\rho+1} \\ & & \uparrow \\ H^o & \xrightarrow{G_{-s}} & H^s \end{array} \quad [(\alpha)\ ,\ (\beta)] \quad .$$

Utilisant les G_ρ il suffit de vérifier que

$$G_{s-\rho+1}[(\alpha) - (\beta)(\alpha)]\ G_{-s}$$

opère dans H^o, ou même avec Plancherel et la densité de $\mathcal{S}$ dans H^o :

$$\exists\ C\ ,\ \forall\ \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\Xi)\ ,\ \|T\hat{\varphi}\| \leq C\|\hat{\varphi}\| \quad (\text{normes dans } L^2)$$

avec

$$(T\hat{\varphi})(\xi)$$
$$= (1 + |\xi|^2)^{1/2} \int_\eta \hat{\alpha}(\xi - \eta)\{(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2})^{(s-\rho)/2} \beta_o(\eta) - (\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2})^{s/2} \beta_o(\xi)\}\varphi(\eta)\, d\eta \ .$$

Vu les résultats du § 2, s'il n'y avait pas le facteur $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$ devant l'intégrale, le résultat serait évident. D'autre part l'accolade est nulle pour $\eta = \xi$. D'où l'idée de se ramener à démontrer que

$$\exists\ C\ ,\ \forall\ \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\Xi)\ ,\ \forall\ i = 1 \text{ ou } 2\ ,\ \int_{|\xi|\geq R} |(T_i\, \hat{\varphi})(\xi)|^2\, d\xi \leq C\|\hat{\varphi}\|^2$$

avec

$$(T_1\, \hat{\varphi})(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2} \int_{|\eta-\xi|\leq(|\xi|)/2} \cdots$$

$$(T_2\, \hat{\varphi})(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2} \int_{|\eta-\xi|\geq(|\xi|)/2} \cdots$$

Pour $i = 1$, on pose

$$\zeta = \eta - \xi$$

et

$$\text{accolade} = \{\ \} = \Phi(\zeta) = \Phi(\zeta) - \Phi(0) \quad .$$

La formule des accroissements finis donne alors

$$|\{\ \}| \leq \frac{C|\xi - \eta|}{(1 + |\xi|^2)^{1/2}}$$

et alors $(T_1\, \hat{\varphi})$ est majoré par la convolution de $|\hat{\varphi}|$ par une fonction sommable.

Pour $i = 2$, on obtiendra la majoration souhaitée comme suit. Puisque $\hat{\alpha}$ est à décroissance rapide, on a avec k arbitrairement grand et C dépendant de k :

$$|(T_2 \varphi)(\xi)| \leqslant (1 + |\xi|^2)^{1/2} \int_{|\eta-\xi| \geqslant (|\xi|)/2} C \frac{(1 + |\xi - \eta|^2)^{\ell}}{(1 + |\xi - \eta|^2)^{k}} |\varphi(\eta)| \, d\eta$$

SCHWARZ donne :

$$|(T_2 \varphi)(\xi)|^2 \leqslant (1 + |\xi|^2) \|\varphi\|^2 \, C \int_{|\eta| \geqslant (|\xi|)/2} \frac{d\eta}{(1 + |\eta|^2)^{2k-2\ell}} .$$

On termine alors, par exemple en écrivant $2k - 2\ell = k' + n$ (k' arbitrairement grand puisque k l'est) d'où

$$|(T_2 \varphi)(\xi)|^2 \leqslant C(1 + |\xi|^2) \|\varphi\|^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{|\xi|^2}{4}\right)^{k'}}$$

et il suffit d'intégrer, pour trouver $\|T_2 \varphi\|^2 \leqslant C^2 \|\varphi\|^2$.

4. Opérateurs très réguliers.

PROPOSITION. - Soit α dans $\mathcal{S}(X)$. Soit $\beta \in \mathcal{S}'(\Xi)$, C^∞ est homogène de degré quelconque dans le complémentaire d'un compact. Alors les opérateurs (α) et (β) de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ sont très réguliers.

Preuve. - Cela signifie que ce sont en fait des applications linéaires continues.

(i) $\Phi : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{E}(X)$

(ii) qui se prolongent continûment en

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{E}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$$

(iii) de façon que le support singulier n'augmente pas : pour toute T de $\mathcal{E}'(X)$

$$\text{Supp sing } \tilde{\Phi}(T) \subseteq \text{Supp sing } T$$

(le support singulier d'une distribution est le complémentaire du plus grand ouvert où elle est une fonction C^∞).

Pour (α) ceci est clair.

Pour (β) l'opérateur est une convolution avec $\gamma = \bar{\mathcal{F}}\beta$, donc seule la condition (iii) n'est pas évidente.

Montrons que γ est C^∞ en dehors de l'origine de X. On prend une fonction ζ sur Ξ, à support compact et valant 1 sur un voisinage du compact en dehors duquel β est homogène

$$\beta = \beta\zeta + \beta(1 - \zeta) \qquad ;$$

$\beta(1 - \zeta)$ est C^∞ d'où

$$\gamma = \overline{\mathfrak{F}}(\beta\zeta) + \overline{\mathfrak{F}}(\beta(1 - \zeta)) \quad .$$

Le premier terme du deuxième membre est différentiable (et même analytique) d'après PALEY WIENER. Pour prouver que pour tout multi-indice k, $D^k(\overline{\mathfrak{F}}\beta(1 - \zeta))$ est continue en dehors de l'origine, il suffit de prouver que pour un certain $\ell \in \underset{\sim}{N}$

$$|x|^{2k} D^k \overline{\mathfrak{F}}\beta(1 - \zeta)$$

est continue ; ou bien que le transformé de Fourier de cette dernière expression, donc $\Delta^k[\xi^k \beta(1 - \zeta)]$, est sommable : il en bien ainsi car à chaque dérivation, le degré d'homogénéité est diminué d'une unité.

Reste à voir que la convolution avec γ, distribution de support singulier vide ou réduit à l'origine, a la propriété (iii). Or, si T est une distribution de support singulier A, on a $T = T_1 + T_2$, où T_1 est à support dans un petit voisinage de A, et T_2 est C^∞. Ensuite $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, où γ_1 est à support dans un petit voisinage de l'origine, et γ_2 est C^∞. Alors

$$T \star \gamma = T_1 \star \gamma_1 + \text{fonction } C^\infty \qquad ,$$

et le support de $T_1 \star \gamma_1$ est dans un petit voisinage de A ; le support singulier de $T \star \gamma$, contenu dans un voisinage arbitraire de A, est donc dans A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). – Linear partial differential operators. – Berlin, Springer, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ..., 116).

[2] LIONS (Jacques L.). – Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1962. – Montréal, Université de Montréal, Département de Mathématiques, 1962 (multigr.).

[3] MALGRANGE (Bernard). – Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 283-306.

[4] MALGRANGE (Bernard). – Noyaux valeurs principales, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60 : Unicité du problème de Cauchy, division des distributions, n° 5-6, 7 et 4 pages.

[5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tomes 1 (2e éd.) et 2. - Paris, Hermann, 1951-1957 (Act. scient. et ind., 1091 = 1245 et 1122 ; Eléments de Mathématique, 9 et 10).

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Ecuaciones diferenciales parciales elipticas. - Bogota; Universidad nacional de Columbia, 1956 (multigr.).