CLAUDE MORLET

Fibré universel et espace classifiant des fibrés vectoriels complexes

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 5, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A5_0>

18 novembre 1963

[révisé en Juillet 1964]

FIBRÉ UNIVERSEL ET ESPACE CLASSIFIANT DES FIBRÉS VECTORIELS COMPLEXES

par Claude MORLET

(Rédigé par Max KAROUBI)

Dans tout cet exposé on appellera "fibré" tout espace fibré vectoriel complexe sur une base paracompacte. Si (X , A) est une paire d'espaces topologiques, $H^*(X , A)$ désigne l'anneau de cohomologie (singulière ou de Čech) de la paire (X , A) à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$.

1. Construction d'un fibré universel et d'un espace classifiant.

1.1. Définition.

Soit $\{E_n , X_n , \pi_n\}$ un fibré de dimension (fibrée) n ; on dira que c'est un fibré universel pour les fibrés de dimension n s'il jouit des deux propriétés suivantes :

a. quel que soit le fibré $\{E , X , \pi\}$ de dimension n , il existe un morphisme strict

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_n \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_n} \\ X & \xrightarrow{f} & X_n \end{array}$$

f est appelée application classifiante du fibré E ; $\{E , X , \pi\}$ est alors isomorphe à l'image réciproque de $\{E_n , X_n , \pi_n\}$ par l'application f .

b. si f et g sont deux applications classifiantes de E , elles sont homotopes.

On peut dire cela autrement :

Soit $[X , X_n]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans X_n , et $T : [X , X_n] \to \Phi_n(X)$ définie à partir de $f \rightsquigarrow f^*(E_n)$; pour que $\{E_n , X_n , \pi_n\}$ soit universel, il faut et il suffit que T soit bijective, pour cette raison X_n prend le nom d'espace classifiant pour les fibrés de dimension n .

Si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de la catégorie des espaces paracompacts, on définirait de la même manière un fibré universel et un espace classifiant pour les fibrés dont la base appartient à $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 1.1. - Quel que soit n , il existe un fibré universel et un espace classifiant pour les fibrés de dimension n .

La démonstration de ce théorème nous occupera tout le reste du paragraphe ; nous allons avoir besoin de notions préliminaires.

1.2. Les grassmanniennes $BU(n\ ,\ p)$ et $BU(n)$.

Soit $BU(n\ ,\ p)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels (ou plans issus de l'origine) de dimension n de $\mathbb{C}^{n+p}$. $BU(n\ ,\ p)$ s'interprète de trois manières comme quotient d'espaces topologiques et les trois topologies que nous obtenons coïncident. Définissons ces topologies.

Si $GL(n + p)$ est le groupe linéaire complexe de $\mathbb{C}^{n+p}$, on a une application surjective $u : GL(n + p) \to BU(n\ ,\ p)$ définie par $u(M) = M(a)$, en désignant par a le sous-espace vectoriel engendré par les n premiers vecteurs de base de $\mathbb{C}^{n+p}$; $u^{-1}(a)$ est un sous-groupe fermé de $GL(n + p)$, et $BU(n\ ,\ p)$ s'identifie à l'espace homogène $GL(n + p)/u^{-1}(a)$. Ecrit sous cette forme, $BU(n\ ,\ p)$ est une variété analytique complexe de dimension np [3].

Le raisonnement qui vient d'être fait avec le groupe linéaire peut se répéter avec le groupe unitaire, et on obtient

$$BU(n\ ,\ p) \approx U(n + p)/U(n) \times U(p) \quad .$$

$BU(n\ ,\ p)$, écrit sous cette forme, apparaît alors comme un espace compact.

Désignons par $VU(n\ ,\ p)$ l'espace des suites de n vecteurs indépendants de $\mathbb{C}^{n+p}$, avec la topologie d'un sous-espace de $\underbrace{\mathbb{C}^{n+p} \oplus \mathbb{C}^{n+p} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{n+p}}_{n}$ ($VU(n\ ,\ p)$ est une variété de Stiefel). $BU(n\ ,\ p)$ s'identifie alors au quotient de $VU(n\ ,\ p)$ par la relation d'équivalence qui identifie deux systèmes engendrant le même n-plan de $\mathbb{C}^{n+p}$.

Le système formé par les $BU(n\ ,\ p)$ et les inclusions évidentes $BU(n\ ,\ p) \subset BU(n\ ,\ q)$ pour $p \leq q$ est un système inductif, et on posera

$$BU(n) = \varinjlim_{p} BU(n\ ,\ p) \quad ;$$

$BU(n)$ est muni de la topologie limite inductive : un sous-espace de $BU(n)$ est ouvert (fermé) si son intersection avec chaque $BU(n, p)$ est ouverte (fermée). Par ailleurs $BU(n)$, étant limite inductive croissante de compacts, est un espace paracompact (Appendice 1).

On peut définir $BU(n)$ d'une autre manière, plus intuitive, en s'inspirant de la troisième interprétation de $BU(n, p)$. Considérons la limite inductive, notée $\mathbb{C}^{\infty}$, du système inductif formé des $\mathbb{C}^p$ et des inclusions $\mathbb{C}^p \subset \mathbb{C}^q$ pour $p \leq q$; $\mathbb{C}^{\infty}$ est évidemment le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des vecteurs dont toutes les coordonnées, sauf un nombre fini, sont nulles (c'est la somme infinie $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \dots$)). Alors $BU(n)$ s'identifie à l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\mathbb{C}^{\infty}$. Soit maintenant $VU(n)$ l'espace des systèmes de n vecteurs indépendant de $\mathbb{C}^{\infty}$, avec la topologie induite par celle de $\underbrace{\mathbb{C}^{\infty} \oplus \mathbb{C}^{\infty} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{\infty}}_{n}$; alors $BU(n)$ est un quotient de $VU(n)$, et la topologie quotient coïncide avec la topologie précédente de $BU(n)$.

1.3. Les fibrés $\chi(n, p)$ et $\chi(n)$.

Considérons le sous-espace $\chi(n, p)$ de $BU(n, p) \times \mathbb{C}^{n+p}$ formé des couples (X, x) où $X \in BU(n, p)$ et $x \in X$. Soit π l'application continue surjective de $\chi(n, p)$ sur $BU(n, p)$ définie par $\pi(X, x) = X$; on va démontrer que $\{\chi(n, p), BU(n, p), \pi\}$ est un fibré (vectoriel localement trivial). Pour tout $X_0 \in BU(n, p)$, soit U l'ouvert de $BU(n, p)$ formé des n-plans de $\mathbb{C}^{n+p}$ se projetant orthogonalement sur X_0 ; on a une bijection

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times X_0 \quad ,$$

continue, définie par

$$\varphi(X, x) = (X, \mathrm{proj}_{X_0} x) \quad .$$

On a en outre le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times X_0 \arrow[dl, "p"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

et φ est linéaire au-dessus de chaque point de U. Pour démontrer que $\chi(n, p)$ est un fibré il nous reste à démontrer que φ^{-1} est continue ; cela résulte, par exemple, du fait que $\pi^{-1}(U)$ est réunion d'ouverts relativement compacts.

$\chi(n)$ se définit de la même manière que $\chi(n\ ,\ p)$: c'est le sous-espace de $BU(n) \times \underset{\sim}{C}^{\infty}$ formé des couples $(X\ ,\ x)$, où $X \in BU(n)$ et $x \in X$; tous les raisonnements que nous venons de faire pour $\chi(n\ ,\ p)$ sont encore valables pour $\chi(n)$, sauf le fait que φ^{-1} est continue, mais cela résulte évidemment du lemme :

LEMME 1.3. - Soient $X_1 \subset \ldots \subset X_k \subset \ldots$ et $Y_1 \subset \ldots \subset Y_k \ldots$ deux suites croissantes d'espaces localement compacts, alors, les limites inductives étant prises suivant les inclusions,

$$\varinjlim X_k \times Y_k = (\varinjlim X_k) \times (\varinjlim Y_k) \quad .$$

De ce lemme, il résulte en particulier que $\underset{\sim}{C}^{\infty}$ est un espace vectoriel topologique.

1.4. Une proposition.

Quel que soit le fibré $\{E\ ,\ X\ ,\ \pi\}$ il existe un recouvrement ouvert dénombrable $[U_r]$ tel que $\forall\ r$, $E \mid U_r$ soit trivial.

<u>Démonstration</u>. - X étant paracompact, il existe un recouvrement ouvert localement fini $[V_i]_{i \in I}$ de X tel que $E \mid V_i$ soit trivial. Soit $[\alpha_i]$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $[V_i]$; pour toute partie finie J de I , considérons

$$W_J = \{x \mid \min_{j \in J} \alpha_j(x) > \max_{j \notin J} \alpha_j(x)\}$$

et

$$U_r = \bigcup_{\substack{\text{card } J = r \\ r \in \underset{\sim}{N}}} W_J \quad .$$

$[U_r]$ est un recouvrement ouvert de X ; de plus, si $\text{card } J_1 = \text{card } J_2$, $J_1 \neq J_2$, il existe $j_1 \in J_1$, $j_1 \notin J_2$ et $j_2 \in J_2$, $j_2 \notin J_1$; si $x \in W_{J_1} \cap W_{J_2}$, on aurait $\alpha_{j_1}(x) > \alpha_{j_2}(x)$ et $\alpha_{j_2}(x) > \alpha_{j_1}(x)$ ce qui est impossible, donc $W_{J_1} \cap W_{J_2} = \emptyset$. $\forall\ r$, U_r est donc réunion d'ouverts disjoints tels que la restriction du fibré à chacun de ces ouverts soit triviale (car $W_J \subset V_i$ si $i \in J$), il en résulte que $E \mid U_r$ est trivial.

C. Q. F. D.

1.5. Démonstration du théorème 1.1.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème avec $E_n = \chi(n)$ et $X_n = BU(n)$.

a. Soit $\{E , X , \pi\}$ un fibré de dimension n et $[U_r]$ un recouvrement ouvert dénombrable de X tel que, $\forall$ r , $E \mid U_r$ soit trivial (proposition 1.4)

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_r) \arrow[rr, "\varphi_r"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_r \times \underset{\sim}{C}^n \arrow[dl] \\ & U_r & \end{tikzcd}$$

Soit p_r la composition de φ_r et de la deuxième projection de $U_r \times \underset{\sim}{C}^n$ sur $\underset{\sim}{C}^n$; soit enfin $[\alpha_r]$ une partition de l'unité subordonnée un recouvrement $[U_r]$. Si on considère $\underset{\sim}{C}^\infty$ comme $\underset{\sim}{C}^n \oplus \underset{\sim}{C}^n \oplus \dots$, on a une application $g : E \to \underset{\sim}{C}^\infty$ définie par $g(x) = (\alpha_1(\pi(x))\ p_1(x) , \dots , \alpha_r(\pi(x))\ p_r(x) , \dots)$. Cette écriture a bien un sens si on convient que $p_r(x) = 0$ pour $x \notin \pi^{-1}(U_r)$, et $\alpha_r(\pi(x))p_r x$ est bien continue car α_r est nulle en dehors d'un fermé contenu dans U_r . Par ailleurs g est linéaire et injective sur chaque fibre car, $\forall$ x , un au moins des $\alpha_r(\pi(x))$ n'est pas nul. g détermine donc un morphisme strict :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d] & \chi(n) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & BU(n) \end{tikzcd}$$

avec $\hat{g}(y) = (g(E_x) , g(y))$ si $y \in E_x$ $(x \in X)$.

b. Il existe une correspondance bijective entre l'espace $\mathfrak{a}$ des applications continues, linéaires et injectives sur chaque fibre, de E dans $\underset{\sim}{C}^\infty$ et les morphismes stricts de E dans $\chi(n)$. Cette correspondance est donnée par $g \rightsquigarrow \hat{g}$ et en sens inverse par $g(y) = z$ si $\hat{g}(y) = (Y , z)$. Si $\hat{g}$ et $\hat{h}$ sont deux morphismes stricts de E dans $\chi(n)$, il suffit donc de démontrer que g et h sont homotopes dans $\mathfrak{a}$.

<u>Premier cas.</u> – Supposons que $\forall$ $y \in E^*$, $g(y)$ et $h(y)$ soient égaux ou non-proportionnels. Alors $\forall$ $t \in [0 , 1]$, $tg + (1 - t)\ h \in \mathfrak{a}$ donc $g \approx h$.

Deuxième cas : cas général. – Soient ε_1 et ε_2 les applications linéaires continues de $\underset{\sim}{C}^{\infty}$ dans $\underset{\sim}{C}^{\infty}$ définies par

$\varepsilon_1(x_1 , x_2 , \ldots x_i , \ldots) = (x_1 , 0 , x_2 , 0 , \ldots x_i \ldots)$ x_i au rang $2i - 1$

$\varepsilon_2(x_1 , x_2 , \ldots x_i , \ldots) = (0 , x_1 , 0 , \ldots x_i \ldots)$ x_i au rang $2i$

Alors $g \approx \varepsilon_1 g \approx \varepsilon_2 h \approx h$ d'après le premier cas appliqué trois fois.

1.6. Cas des fibrés de base de dimension finie ou compacte.

Nous dirons qu'un espace topologique est de dimension $\leq p$ si, quel que soit le recouvrement $\mathcal{U}$ de X, il existe un recouvrement plus fin $[V_i]$ tel que chaque point de X appartienne à au plus $(p + 1)$ ensembles du recouvrement $[V_i]$. Un espace est de dimension p s'il est de dimension $\leq p$ et s'il n'est pas de dimension $\leq p - 1$. Un espace de dimension finie est donc paracompact.

Exemples. – Un espace réduit à un point est de dimension 0, $\underset{\sim}{R}^n$ est de dimension n, un compact de $\underset{\sim}{R}^n$ est aussi de dimension $\leq n$ [5].

PROPOSITION 1.6.1. – Si $\mathcal{C}_p$ est la catégorie des espaces topologiques de dimension $\leq p$, alors pour p' assez grand, $\chi(n , p')$ et $BU(n , p')$ sont fibré universel et espace classifiant pour les fibrés de dimension fibrée n, dont la base appartient à $\mathcal{C}_p$; (il suffit que $p' \geq (2p + 1)n$) .

Démonstration. – Il suffit de remarquer qu'en choisissant pour $[V_i]$ le recouvrement donné par la définition de la dimension, $W_J = 0$ si card $J \geq p + 2$; par suite on peut recouvrir X par $(p + 1)$ ouverts $U_1 , U_2 , \ldots , U_{p+1}$ tels que $E \mid U_r$ soit trivial. La démonstration se poursuit comme en 1.5.

PROPOSITION 1.6.2. – Soit X un espace compact.

a. Soit $\{E , X , \pi\}$ un fibré de dimension fibrée n ; pour p assez grand, il existe un morphisme strict de E dans $\chi(n , p)$.

b. Si f et g sont deux morphismes stricts de E dans $\chi(n , p)$, f et g induisent deux applications homotopes de E dans $\chi(n , p')$ pour p' assez grand $(p' \geq n + 2p)$.

2. La cohomologie du classifiant.

2.1. Le diagramme fondamental.

On a une application linéaire continue bijective φ de $\underset{\sim}{C}^{\infty} \oplus \underset{\sim}{C}^{\infty}$ sur $\underset{\sim}{C}^{\infty}$ définie par $\varphi((x_1 , x_2 , \ldots) , (y_1 , y_2 , \ldots)) = (x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , \ldots)$; on définirait de la même manière une application de $\underbrace{\underset{\sim}{C}^{\infty} \oplus \underset{\sim}{C}^{\infty} \oplus \ldots \oplus \underset{\sim}{C}^{\infty}}_{n}$ sur $\underset{\sim}{C}^{\infty}$.

On déduit de cela un morphisme strict qu'on définit de manière évidente :

$$\begin{array}{ccc} \chi(1) \oplus \chi(1) \oplus \ldots \oplus \chi(1) & \longrightarrow & \chi(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{BU(1) \times \ldots \times BU(1)}_{n} & \xrightarrow{\xi_n} & BU(n) \end{array} .$$

Ce diagramme va nous permettre de calculer la cohomologie du classifiant, en particulier les classes de Chern de $\chi(n)$, en fonction de la cohomologie de $BU(1) \times \ldots \times BU(1)$ qui, nous allons le voir, est particulièrement simple.

Avant de commencer cette étude, énonçons une proposition qui justifiera tous les passages à la limite (projective) que nous ferons par la suite.

PROPOSITION 2.1. - Les grassmaniennes $BU(n, r)$ et les inclusions $i_{pq} : BU(n, p) \to BU(n, q)$ définies pour $p \leqslant q$ induisent un système projectif $\{H^*(BU(n, r)), i^*_{pq}\}$ et

$$H^*(BU(n)) = \varprojlim H^*(BU(n, r)) .$$

<u>Démonstration</u>. - Les grassmaniennes $BU(n, r)$ et $BU(n)$ sont des CW-complexes ([7], p. 68) et en identifiant des $BU(n, p)$ à des sous-complexes de $BU(n)$, on voit que $BU(n, r)$ est la réunion des cellules de dimension $\leqslant 2r$ de $BU(n)$ [7]. D'après le calcul classique de la cohomologie d'un CW-complexe, on a des isomorphismes :

$$H^i(BU(n, r)) \approx H^i(BU(n, r+1)) \approx \ldots \approx H^i(BU(n)) \qquad \text{pour } i < 2r$$

induits par les inclusions $BU(n, r) \subset BU(n, r+1) \subset \ldots \subset BU(n)$; d'où la proposition.

2.2. <u>Cohomologie de</u> $P^k(\underset{\sim}{C})$ <u>et de</u> $BU(1)$.

$BU(1, k)$ est l'espace des droites issues de l'origine de $\underset{\sim}{C}^{1+k}$, c'est donc l'espace projectif complexe $P^k(\underset{\sim}{C})$. Appliquons la suite exacte de Gysin (exposé précédent) au fibré $\chi(1, k)$:

$$H^{i+1}(\chi^*(1, k)) \to H^i(P^k(\underset{\sim}{C})) \xrightarrow{c_1} H^{i+2}(P^k(\underset{\sim}{C})) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+2}(\chi^*(1, k))$$

où c_1 est la classe d'Euler de $\chi(1, k)$, c'est-à-dire sa première classe de Chern. Mais $\chi^*(1, k)$ est le sous-espace de $P^k(\underset{\sim}{C}) \times C^{1+k}$ engendré par les couples d'une droite de $\underset{\sim}{C}^{1+k}$ et d'un vecteur non nul sur cette droite ; par suite

$$H^i(\chi^*(1, k)) = 0$$

pour $i \neq 0$ et $i \neq 2k+1$. Il en résulte

$$\underset{\sim}{Z} \approx H^0(P^k(\underset{\sim}{C})) \overset{c_1}{\approx} H^2(P^k(\underset{\sim}{C})) \approx \dots \overset{c_1}{\approx} H^{2k}(P^k(\underset{\sim}{C}))$$

$$0 \approx H^{-1}(P^k(\underset{\sim}{C})) \approx H^1(P^k(\underset{\sim}{C})) \approx \dots \approx H^{2k-1}(P^k(\underset{\sim}{C})) \quad .$$

Par ailleurs $P^k(\underset{\sim}{C})$ étant de dimension $2k$, $H^i(P^k(\underset{\sim}{C})) = 0$ pour $i > 2k$.

PROPOSITION 2.2.1. - L'anneau $H^*(P^k(\underset{\sim}{C}))$ est l'anneau de polynômes tronqués $Z[c_1]/c_1^{k+1}$, $c_1 \in H^2[P^k(\underset{\sim}{C})]$ étant la classe de Chern de $\chi(1, k)$.

En particulier la caractéristique d'Euler-Poincaré de $P^k(\underset{\sim}{C})$ est égale à $k+1$, et la classe fondamentale de $P^k(\underset{\sim}{C})$ est $\pm (c_1)^k$. On verra plus loin (théorème 1.5) que la classe fondamentale de $P^k(\underset{\sim}{C})$ muni de son orientation naturelle est $(-1)^k (c_1)^k$.

Par ailleurs le diagramme

$$\begin{tikzcd} \chi(1, k) \arrow[r] \arrow[d] & \chi(1) \arrow[d] \\ BU(1, k) \arrow[r, "i_k"] & BU(1) \end{tikzcd}$$

où i_k est l'injection de $BU(1, k)$ dans $BU(1)$, montre que

$$i_k^*(c_1(\chi(1))) = c_1(\chi(1, k)) \quad ;$$

i_k^* étant injectif pour $k > 1$, on identifiera $c_1(\chi(1)))$ et $c_1(\chi(1, k))$ de telle sorte que

$$H^*(BU(1)) = \varprojlim H^*(BU(1, k)) \equiv \underset{\sim}{Z}[c_1] \quad .$$

On a ainsi démontré :

PROPOSITION 2.2.2. - La cohomologie de $BU(1)$ est l'anneau de polynômes $\underset{\sim}{Z}[c_1]$, $c_1 \in H^2(BU(1)$ étant la classe de Chern de $\chi(1)$.

2.3. Cohomologie de $BU(1) \times \dots \times BU(1)$.

Elle est donnée par le théorème de Künneth [2] que nous énonçons ici sans démonstration, et, pour simplifier, dans le cas de deux facteurs seulement :

THÉORÈME 2.3. - Soient X et Y deux espaces topologiques tels que $H^*(X)$ et $H^*(Y)$ soient des modules libres sur $\underset{\sim}{Z}$, de type fini en chaque degré. Alors l'application $H^*(X) \otimes H^*(Y)$ dans $H^*(X \times Y)$ définie par le cup-produit externe est un isomorphisme d'anneaux (la structure d'anneau sur $H^*(X) \otimes H^*(Y)$ est donnée par la formule : si

$$a \in H^r(X) \ , \quad b \in H^s(Y) \ , \quad a' \in H^{r'}(X) \ , \quad b' \in H^{s'}(Y) \implies$$

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{sr'} aa' \otimes bb' \ ',$$

plus précisément, si p et q désignent les projections de $X \times Y$ sur ses facteurs, p^* et q^* sont injectifs et $H^*(X \times Y)$ s'identifie, comme anneau, au produit tensoriel gradué des deux sous-anneaux $p^*(H^*(X))$ et $q^*(H^*(Y))$.

Dans le cas particulier de $BU(1) \times \dots \times BU(1)$, désignons par p_i la projection de $BU(1) \times \dots \times BU(1)$ sur le i-ème facteur, et soit $\alpha_i = p_i^*(c_1(\chi(1)))$. Alors

$$H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1) \approx \underset{\sim}{Z}[\alpha_1] \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{Z}[\alpha_n] \quad .$$

Chaque α_i étant de degré 2 , la multiplication dans $\underset{\sim}{Z}[\alpha_1] \times \dots \times \underset{\sim}{Z}[\alpha_n]$ est commutative, d'où la proposition :

PROPOSITION 2.3. - $H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1)) = \underset{\sim}{Z}[\alpha_1 , \dots , \alpha_n]$, avec $\alpha_i = p_i^*(c_1(\chi(1))$.

Cet isomorphisme est un isomorphisme d'algèbre graduées, si on convient d'affecter chaque α_i du degré 2 .

2.4. Cohomologie de $BU(n)$.

Le morphisme strict défini au début de 2.1 montre que

$$\xi_n^*(c(\chi n))) = \underbrace{c(\chi(1) \oplus \dots \oplus (1))}_{\text{n fois}} \quad ;$$

d'après le théorème 4.2 de l'exposé précédent (cf. théorème 4.2 et Erratum à l'appendice), le second membre est égal au produit

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^*(c_1(\chi(1))) \quad .$$

Par l'isomorphisme de la proposition 2.3, on a donc

$$\xi_n^*(c(\chi(n)) = \prod_{i=1}^{n} (1+\alpha_i) \quad .$$

Si on note c_i les classes de Chern $c_i(\chi(n)) \in H^{2i}(BU(n))$, on a donc

$$(2.4.1) \qquad \begin{cases} \xi_n^*(c_1(\chi(n))) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \sigma_1 \quad , \\ \dots \\ \xi_n^*(c_n(\chi(n))) = \alpha_1 \dots \alpha_n = \sigma_n \quad , \end{cases}$$

où $\sigma_1 , \dots , \sigma_n \in \underset{\sim}{Z}[\alpha_1 , \dots , \alpha_n]$ sont les "polynômes symétriques élémentaires".

Introduisons l'algèbre $\underset{\sim}{Z}[c_1 , \dots , c_n]$, graduée en affectant c_i du degré $2i$, et l'homomorphisme d'algèbres graduées

$$\varphi : \underset{\sim}{Z}[c_1 , \dots , c_n] \to H^*(BU(n))$$

qui envoie c_i en $c_i(\chi(n))$.

THÉORÈME 2.4. – φ <u>est un isomorphisme d'algèbres graduées</u> ;

$$\psi = \xi_n^* \circ \varphi : \underset{\sim}{Z}[c_1 , \dots , c_n] \to \underset{\sim}{Z}[\alpha_1 , \dots , \alpha_n]$$

<u>est défini par</u>

$$(2.4.2) \qquad \psi(c_i) = \sigma_i \quad ;$$

<u>enfin</u> $\xi_n^* : H^*(BU(n)) \to \underset{\sim}{Z}[\alpha_1 , \dots , \alpha_n]$ <u>est une injection dont l'image est la sous algèbre des polynômes symétriques en</u> $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$.

Pour la démonstration, on admet le lemme suivant (démontré dans l'Appendice 2) :

LEMME 2.4. – <u>Les classes de Chern</u> $c_i(\chi(n))$ <u>engendrent</u> $H^*(BU(n))$ <u>pour sa structure de</u> $\underset{\sim}{Z}$<u>-algèbre.</u>

Ceci signifie que l'application φ est surjective ; pour montrer que φ est bijective, il suffit alors de prouver que $\psi = \xi_n^* \circ \varphi$ est injective. Or les formules (2.4.2) résultent de (2.4.1) ; le théorème classique des "fonctions symétriques" dit alors que ψ est un isomorphisme sur la sous-algèbre des polynômes symétriques en $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. – ξ_n^* permet d'identifier l'algèbre $H^*(BU(n))$ à une sous-algèbre de $\underset{\sim}{Z}[\alpha_1 , \dots , \alpha_n]$, de façon que

$$c(\chi(n)) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i) \quad .$$

2.5. Classe fondamentale de $P_n(\underset{\sim}{C})$.

DÉFINITION 2.5. - Soient $\{E' , X , \pi'\}$ et $\{E , X , \pi\}$ deux fibrés vectoriels complexes de même base X , $\{E' , X , \pi'\}$ est un fibré conjugué du fibré $\{E , X , \pi\}$ s'il existe un isomorphisme $f : E \to E'$ des fibrés réels sous-jacents (non orientés), tel que $\forall\ x \in X$, $e \in E_x$, $\lambda \in \underset{\sim}{C}$,

$$f(\lambda e) = \bar{\lambda} f(e) \quad .$$

PROPOSITION 2.5. - Si $\{E' , X , \pi'\}$ est un fibré conjugué de $\{E , X , \pi\}$,

$$c_i(E') = (-1)^i\, c_i(E) \quad .$$

Démonstration facile à partir de la relation $\chi_{E'} = (-1)^n \chi_E$, valable si E et E' sont des fibrés complexes de dimension n .

Soit maintenant $\chi'(1 , n)$ le fibré dual de $\chi(1 , n)$ (qui est un fibré conjugué de $\chi(1 , n)$; pour le voir on munit le fibré $\chi(1 , n)$ d'une forme hermitienne). $\chi'(1 , n)$ peut aussi se définir comme étant le fibré vectoriel complexe (de dimension 1) de base $P^n(\underset{\sim}{C})$, quotient de $(\underset{\sim}{C}^{n+1} - \{0\}) \times \underset{\sim}{C}$ par le groupe des homothéties de rapport complexe $\lambda \neq 0$.

THÉORÈME 2.5.

Soit $\alpha'_n = c_1(\chi'(1 , n))$ et $\alpha_n = c_1(\chi(1 , n))$; on a $\alpha_n = -\alpha'_n$.
Soit $T(P^n(\underset{\sim}{C}))$ le fibré tangent orienté de $P^n(\underset{\sim}{C})$; alors :

a. $c(T(P^n(\underset{\sim}{C}))) = (1 + \alpha'_n)^{n+1} = (1 - \alpha_n)^{n+1}$.

b. La classe fondamentale de $P^n(\underset{\sim}{C})$ orienté est $(\alpha'_n)^n = (-1)^n\ (\alpha_n)^n$.

Démonstration. - (a) résulte du lemme et du fait que

$$T(P^n(\underset{\sim}{C})) \oplus_{P^n(\underset{\sim}{C})} 1_{\underset{\sim}{C}} \approx \underbrace{\chi'(1 , n) \oplus \dots \oplus \chi'(1 , n)}_{n+1}$$

(cf. Appendice de l'exposé suivant). D'autre part

$$\chi_{P^n(\underset{\sim}{C})} = c_n(T(P^n(\underset{\sim}{C}))) = (n + 1)\,(\alpha'_n)^n = (-1)^n\ (n + 1)(\alpha_n)^n \quad .$$

Comme la caractéristique d'Euler-Poincaré est $n + 1$ ((proposition 2.2.1), (b) résulte du théorème 3.3 de l'exposé précédent.

Appendices

Appendice 1. – Une limite inductive croissante d'espaces compacts est un espace paracompact.

Soit $X_1 \subset \dots \subset X_k \subset \dots$ une suite croissante d'espaces compacts, et $X = \varinjlim X_k$.

Commençons par démontrer que X est normal. Soient F et F' deux fermés de X. Il suffit de construire par récurrence une fonction continue $h_i : X_i \to [0, 1]$, h_i prolongement de h_{i-1}, égale à 0 sur $F \cap X_i$ et à 1 sur $F' \cap X_i$; on remarque pour cela que le problème revient à prolonger à X_i $(\forall\ i > 1)$ une fonction définie sur le fermé de X_i : $(X_i \cap F) \cup X_{i-1} \cup (X_i \cap F')$, égale à h_{i-1}, à 0 sur $X_i \cap F$ et à 1 sur $X_i \cap F'$, à valeurs dans $[0, 1]$, ce qui est toujours possible.

D'autre part, X est séparé : car tout point est fermé (puisque son intersection avec chaque X_k est fermée) ; donc si x et x' sont deux points distincts, il existe une fonction continue numérique f telle que $f(x) = 0$ et $f(x') = 1$, d'après ce qui précède

C. Q. F. D.

Démontrons maintenant que X est paracompact. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement infini de X ; comme chaque X_i est compact, il existe un recouvrement dénombrable $[U_j]$ extrait du précédent, et une suite d'entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots$ tels que $\bigcup_{j \leq n_k} U_j$ recouvre X_k. Comme X est normal et X_k fermé dans X, il existe un recouvrement V_j^k $(j \leq n_k)$ de X_k tel que $\overline{V}_j^k \subset U_j$ pour $j \leq n_k$ (BOURBAKI, [1], § 4, théorème 3). Posons $U_j' = U_j$ pour $j \leq n_1$ et $U_j' = U_j \cup \complement\big(\bigcup_{\substack{r \leq k-1 \\ i \leq n_r}} \overline{V}_i^r\big)$ pour $n_{k-1} < j \leq n_k$ $(k > 1)$. Alors $\{U_j'\}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathcal{U}$ et localement fini ; en effet si $x \in X_s$, $\bigcup_{\substack{r \leq s \\ i \leq n_r}} V_i^r$ est un voisinage de x qui ne rencontre qu'un nombre fini des U_j'.

Appendice 2. – Les classes de Chern de $\chi(n)$ engendrent $H^*(BU(n))$ comme $\underline{Z}$-algèbre.

On va suivre [6], et raisonner par récurrence sur n. Nous savons déjà (prop. 2.2.2) que $H^*(BU(1))$ est engendré par $c_1(\chi(1))$ comme $\underline{Z}$-algèbre. Supposons la proposition prouvée pour $H^*(BU(k))$ avec $k \leq n - 1$. Soit ρ l'application de

$\chi^*(n , k)$ dans $BU(n-1 , k+1)$ définie par $\rho(X , x) = x^{\perp}$, en désignant par $x^{\perp}$ le sous-espace de X orthogonal au vecteur non nul x. $\chi^*(n , k)$ est un fibré localement trivial de base $BU(n-1 , k+1)$, la fibre étant $\rho^{*(k+1)}$~.
Par suite

$$\rho^* : H^i(BU(n-1 , k+1)) \approx H^i(\chi^*(n , k))$$

sur $i < 2k+1$. Ecrivons la suite exacte de Gysin pour $\{\chi(n , k) , BU(n , k) , \pi\}$ en tenant compte de cet isomorphisme

$$\to H^i(BU(n,k) \xrightarrow{c_n} H^{i+2n}(BU(n,k)) \xrightarrow{\rho^{*-1}\ \pi^*} H^{i+2n}(BU(n-1,k+1)) \to H^{i+1}(BU(n,k) \to \dots$$

pour $i < 2k+1$. En faisant k infini il vient :

$$(S) \to H^i(BU(n) \xrightarrow{c_n} H^{i+2n}(BU(n)) \xrightarrow{\rho^{*-1}\ \pi^*} H^{i+2n}(BU(n-1)) \to H^{i+1}(BU(n)) \to \dots$$

D'autre part, d'après le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\chi(n-1) \oplus 1_{\underset{\sim}{C}} \arrow[d] & E \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \chi(n) \arrow[d, "\pi"] \\
BU(n-1) & \chi^*(n) \arrow[l, "\rho"'] \arrow[r, "\pi"] & BU(n)
\end{tikzcd}$$

où $E \approx \pi^*(BU(n)) \approx \rho^*(BU(n-1))$, et d'après la fonctorialité des classes de Chernn $\rho^{*-1}\ \pi^*$ envoie les classes de Chern de $\chi(n)$ sur celles de $\chi(n-1)$; (S) entraîne donc l'exactitude de la suite

$$(S') \quad 0 \to H^i(BU(n)) \xrightarrow{c_n} H^{i+2n}(BU(n)) \xrightarrow{\rho^{*-1}\ \pi^*} H^{i+2n}(BU(n-1)) \to H^{i+1}(BU(n)) \to 0 \quad .$$

Il faut démontrer que $\forall\ a \in H^*(BU(n))$, a s'écrit comme polynôme des classes de Chern de $\chi(n)$. Raisonnons par récurrence sur le degré de a , la proposition étant vraie si $a \in H^0(BU(n))$. Soit

$$a \in H^{i+2n}(BU(n)) \ ; \ \rho^{*-1}\ \pi^*(a) \in H^{i+2n}(BU(n-1)) \quad ,$$

donc s'écrit comme polynôme $\rho(c'_1 , c'_2 , \dots c'_{n-1})$ des classes de Chern de $\chi(n-1)$. Posons $a' = p(c_1 , c_2 , \dots c_{n-1})$; alors $\rho^{*-1}\ \pi^*(a - a') = 0$, donc $a - a' = a''.c_n$; a'' étant de degré strictement inférieur à celui de a , a'' s'écrit comme polynôme $Q(c_1 , \dots , c_n)$, donc

$$a = p(c_1 , \dots c_{n-1}) + Q(c_1 , \dots c_n)\ c_n \quad .$$

C. Q. F. D.

Appendice 3. - Classes de Chern de la somme directe de deux fibrés.

On va achever la démonstration du théorème 4.2 de l'exposé 4 qui n'a été faite que dans un cas particulier. On va démontrer la formule 4.2.1 de cet exposé, d'où 4.2.2 résultera en observant que $E \oplus_X F$ est induit par $E \oplus F$ sur la diagonale X de $X \times X$.

Soient donc $\{E, X, \pi\}$ et $\{F, Y, \pi'\}$ deux fibrés de dimension n et p respectivement, f et g des applications classifiantes de ces fibrés dans $BU(n)$ et $BU(p)$ respectivement ; l'application k, composée de $f \times g$ et de l'application canonique de $BU(n) \times BU(p)$ dans $BU(n+p)$, est une application classifiante de $E \oplus F$. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \oplus F \arrow[r] \arrow[d, "\pi \times \pi'"'] & \chi(n) \oplus \chi(p) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \chi(n+p) \arrow[d, dashed] \\
X \times Y \arrow[r, "f \times g"] \arrow[rr, bend right, "k"'] & BU(n) \times BU(p) \arrow[r] & BU(n+p)
\end{tikzcd}$$

$$c(E \oplus F) = k^*[c(\chi(n+p))] = (f \times g)^* [c(\chi(n) \oplus \chi(p))]$$

$$= (f \times g)^*[c(\chi(n)) \smile c(\chi(p))]$$

(Cf. théorème 4.2 de l'exposé 4)

$$= f^*(c(\chi(n))) \smile g^*(c(\chi(p))) = c(E) \smile c(F)$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chap. 9, 2e éd. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Eléments de Mathématique, 8).

[2] CARTAN (H.) et EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 8).

[4] DOUADY (Adrien). - La suite spectrale des espaces fibrés ; applications de la suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 2 et 3, 10 et 11 p.

[5] HUREWICZ (W.) and WALLMAN (H.). - Dimension theory. - Princeton, Princeton University Press, 1941 (Princeton mathematical Series, 4).

[6] MILNOR (John). - Lectures on characteristic classes. Notes by James Stasheff. - Princeton, Princeton University, 1957 (multigr.).

[7] MILNOR (John). - Lectures on characteristic classes. - Princeton, Princeton University, 1961 (multigr.).

[8] Séminaire CARTAN, t. 12, 1959/60 : Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott, 2e édition. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.

[9] STEENROD (Norman). - The topology of fibre bundles. - Princeton, Princeton University Press, 1951 (Princeton mathematical Series, 14).