Henri Cartan

Définition et propriétés élémentaires des groupes $K(X)$ et $K(X,A)$

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A3_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 3

28 octobre 1963

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES GROUPES $K(X)$ ET $K(X, A)$

par Henri CARTAN

(Rédigé par Luc ILLUSIE)

On a vu, dans l'exposé précédent, que la considération du m-symbole d'un opérateur elliptique conduit à la situation suivante : on a deux fibrés au-dessus de la même base (le fibré des covecteurs tangents à X) et un isomorphisme de leurs restrictions à un sous-espace (le complémentaire de la section nulle). Nous nous proposons d'étudier ce genre de situation dans un cadre général.

Tous les fibrés dont il sera question dans la suite seront des fibrés vectoriels localement triviaux sur des espaces topologiques. (On n'exige pas que la dimension soit la même sur les différentes composantes connexes de X). L'exposé vaudra pour le cas réel comme pour le cas complexe.

1. Définition de $K(X)$.

Si X est un espace topologique, nous désignerons par $\Phi(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés de base X . Muni de la loi de composition définie par l'addition des fibrés sur X , $\Phi(X)$ est un monoïde commutatif, ayant un élément neutre : la classe du fibré de dimension zéro sur X . Pour tout fibré E sur X , on notera $\mathring{E}$ sa classe dans $\Phi(X)$.

Considérons le problème universel défini par la donnée des couples (G, f) , où G est un groupe abélien et f un homomorphisme de monoïdes : $\Phi(X) \to G$. Plus précisément, on cherche un couple $(K(X), \varphi)$ ($K(X)$ groupe abélien, φ homomorphisme de monoïdes : $\Phi(X) \to K(X)$) tel que, pour tout couple (G, f) , il existe un homomorphisme de groupes et un seul, h , rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Phi(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & K(X) \arrow[d, "h"] \\ & G \end{tikzcd}$$

On sait que s'il existe une solution, elle est unique à un isomorphisme près. Si l'on note $L(\Phi(X))$ le groupe abélien libre engendré par $\Phi(X)$, et R le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $(E \otimes F)^{\cdot} - \mathring{E} - \mathring{F}$, il est clair que le couple formé de $L(\Phi(X))/R$ et de l'application composée des applications canoniques $\Phi(X) \to L(\Phi(X)) \to L(\Phi(X))/R$ fournit une solution. Observons que si X est vide, $\Phi(X)$ est vide, et $K(X)$ est le groupe réduit à l'élément neutre.

Nous allons cependant exprimer la solution de ce problème sous une autre forme qui nous sera utile dans la suite.

Considérons dans $\Phi(X) \times \Phi(X)$ la relation d'équivalence suivante

$$(a , b) \sim (a' , b')$$

si et seulement s'il existe $c \in \Phi(X)$ et $d \in \Phi(X)$, tel que

$$(a + c , b + c) = (a' + d , b' + d) .$$

Nous noterons $d(a , b)$ la classe du couple (a , b) . Cette relation d'équivalence étant compatible avec l'addition dans $\Phi(X) \times \Phi(X)$, l'ensemble $K(X)$ des classes d'équivalence est un monoïde commutatif avec élément neutre : $d(a , a)$. C'est même un groupe, car $d(a , b) + d(b , a) = 0$. Enfin, si l'on désigne par φ l'application $\Phi(X) \to K(X)$ définie par $\varphi(a) = d(a , 0)$, il est clair que le couple $(K(X) , \varphi)$ est solution du problème universel.

La construction précédente est tout-à-fait analogue à celle de $\underset{\sim}{Z}$ à partir de $\underset{\sim}{N}$. Toutefois, il est bon de remarquer que l'application $\varphi : \Phi(X) \to K(X)$ n'est pas injective en général, car un élément de $\Phi(X)$ n'est pas nécessairement régulier. Ainsi le fibré $T(S^n)$ tangent à la sphère S^n n'est pas trivial pour $n \neq 1 , 3 , 7$; cependant, si $N(S^n)$ est le fibré normal (qui est trivial), le fibré $T(S^n) \oplus N(S^n)$ est trivial : $(T(S^n))^{\cdot}$ n'est donc pas régulier dans $\Phi(S^n)$. Nous verrons plus loin, moyennant des hypothèses sur X , une condition nécessaire et suffisante simple, pour que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Soient maintenant f une application continue $X' \to X$, E un fibré sur X , $f^*(E)$ son image réciproque sur X' . L'application $f^* : \Phi(X) \to \Phi(X')$ est compatible avec l'addition, donc définit un homomorphisme $\Phi(X) \to K(X')$ qui, d'après la propriété universelle de $K(X)$, se factorise de manière unique à travers $K(X)$. Il existe donc un unique homomorphisme $K(X) \xrightarrow{f^*} K(X')$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Phi(X) & \xrightarrow{f^*} & \Phi(X') \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ K(X) & \xrightarrow{f^*} & K(X') \end{array}$$

De plus, $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$ et $I^* = I$. $K(\ )$ est donc un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques dans celle des groupes abéliens.

2. Définition de $\tilde{K}(X)$ et de $K(X, x_0)$.

Nous désignerons par Θ_n le fibré trivial de dimension n sur X. Soit P un espace topologique réduit à un point. L'application qui, à un fibré sur P, associe la dimension de l'espace vectoriel correspondant, permet d'identifier, comme monoïdes, $\Phi(P)$ à $\underset{\sim}{N}$. Par suite, $K(P)$ est canoniquement isomorphe à $\underset{\sim}{Z}$.

Soient maintenant X un espace topologique quelconque, et f l'unique application (continue) $X \to P$. D'après le paragraphe précédent, f définit un homomorphisme $f^* : K(P) \to K(X)$, donc, moyennant l'isomorphisme $K(P) \approx \underset{\sim}{Z}$, un homomorphisme, noté encore $f^* : \underset{\sim}{Z} \to K(X)$. On a, pour $n \geqslant 0$, $f^*(n) = d(\dot{\Theta}_n, 0)$. Si X est non vide, f^* est injectif. Soient en effet $x_0 \in X$ et j l'injection canonique $x_0 \to X$. Notons j^* l'homomorphisme $K(X) \to \underset{\sim}{Z}$ $(\approx K(x_0))$ correspondant. On a $j^* d(\dot{E}, \dot{F}) = \dim E_{x_0} - \dim F_{x_0}$. L'homomorphisme composé

$$\underset{\sim}{Z} \xrightarrow{f^*} K(X) \xrightarrow{j^*} \underset{\sim}{Z}$$

est l'identité, ce qui prouve l'injectivité de f^*. Nous poserons

$$K(X, x_0) = \operatorname{Ker} j^*$$
$$\tilde{K}(X) = \operatorname{Coker} f^* .$$

Les suites

$$0 \longrightarrow K(X, x_0) \longrightarrow K(X) \xrightarrow{j^*} \underset{\sim}{Z} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{Z} \xrightarrow{f^*} K(X) \rightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow 0$$

sont exactes et scindées, car $f^* \circ j^*$ est un projecteur dans $K(X)$, (cf. [2], § 1, n° 1). On a donc

$$K(X) \approx K(X, x_0) \oplus \underset{\sim}{Z} \approx \underset{\sim}{Z} + \tilde{K}(X) .$$

Par suite, la donnée de x_0 définit un isomorphisme canonique $\tilde{K}(X) \approx K(X, x_0)$. Enfin, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & K(X) \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ K(X, x_0) & & \tilde{K}(X) \arrow[ll, "\approx"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif (u et v sont les projecteurs des décompositions en somme directe).

Explicitons le projecteur $u : K(X) \to K(X, x_0)$. On a $u = I - f^* \circ j^*$, d'où

$$u(d(\dot{E}, \dot{F})) = d(\dot{E}, \dot{F}) - d(\dot{\Theta}_p, \dot{\Theta}_q)$$

avec

$$p = \dim E_{x_0} \ , \qquad q = \dim F_{x_0} \ .$$

Remarquons pour terminer que l'homomorphisme $v \circ \varphi : \Phi(X) \to \tilde{K}(X)$ est nul sur les classes des fibrés triviaux, et que le couple $(\tilde{K}(X) , v \circ \varphi)$ est universel, en un sens que le lecteur précisera.

Exercice. - Si X' et X'' sont deux ouverts disjoints d'un espace topologique X, l'application canonique $K(X) \to K(X') \times K(X'')$, définie par les inclusions $X' \to X$, $X'' \to X$, est un isomorphisme.

Désormais, et sauf mention expresse du contraire, tous les fibrés considérés auront une base X compacte. (Pour forte qu'elle soit, cette hypothèse est cependant moins restrictive que celle de [1], où l'on suppose que les bases sont des CW-complexes finis.)

PROPOSITION 1. - Pour tout fibré E sur X, il existe un fibré E' sur X tel que $E \oplus_X E'$ soit trivial.

Démonstration. - Pour tout $x \in X$, soient $s_1 , \ldots , s_n$ des sections de E telles que $s_1(x) , \ldots , s_n(x)$ engendrent E_x. Alors $s_1(y) , \ldots , s_n(y)$ engendrent E_y pour tout y d'un ouvert U_x contenant x. X étant compact, on peut trouver un nombre fini d'ouverts U_k recouvrant X, et des sections $s_{k,i}$ en nombre fini, tels que l'ensemble des $s_{k,i}(x)$ (k fixé) engendre E_x pour tout $x \in U_k$. L'ensemble de tous les $s_{k,i}(x)$ engendre donc E_x pour tout $x \in X$. En d'autres termes, E est quotient d'un fibré trivial Θ sur X ; mais au moyen d'une forme quadratique, on montre alors que E est facteur direct. (Pour les détails, voir [3], chap. III, § 5.)

COROLLAIRE 1. - Tout élément de $K(X)$ peut s'écrire $d(\dot{E} , \dot{\Theta})$, où Θ est un fibré trivial sur X. Deux fibrés E et F sur X ont même image dans $K(X)$ si et seulement s'il existe un fibré trivial Θ tel que

$$E \oplus_X \Theta \approx F \oplus_X \Theta \ .$$

Soit en effet $d(\dot{E} , \dot{F}) \in K(X)$. D'après la proposition 1, il existe F' tel que $\Theta = F \oplus_X F'$ soit trivial ; on a donc

$$d(\dot{E} , \dot{F}) = d(\dot{E} + \dot{F} , \dot{\Theta}) \ ,$$

ce qui démontre la première assertion.

Pour la deuxième, il suffit de remarquer que $d(\dot{E}, 0) = d(\dot{F}, 0)$ équivaut à $d(\dot{E}, \dot{F}) = 0$, et que, par définition même de $K(X)$, $d(\dot{E}, \dot{F}) = 0$ si et seulement s'il existe un fibré G tel que $E \oplus G \approx F \oplus G$. Mais, d'après la proposition 1, on peut supposer G trivial, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 2. - L'homomorphisme canonique $v \circ \varphi : \Phi(X) \to \tilde{K}(X)$ est surjectif et $\tilde{K}(X)$ s'identifie à la limite inductive des groupes $\Phi(X)$ suivant les applications $\Phi(X) \to \Phi(X)$ définies par l'addition d'un fibré trivial.

Ecartons le cas trivial où X est vide. Soient $x_0 \in X$ et u le projecteur $K(X) \to K(X, x_0)$ défini plus haut. Compte tenu de la propriété universelle de $v \circ \varphi$, et de l'isomorphisme $K(X, x_0) \approx \tilde{K}(X)$, tout revient à montrer que $u \circ \varphi$ est surjectif. Mais

$$u \circ \varphi(\dot{E}) = u\, d(\dot{E}, 0) = d(\dot{E}, 0) - d(\dot{\Theta}_n, 0) = d(\dot{E}, \dot{\Theta}_n)$$

(où $n = \dim E_{x_0}$), d'où le résultat, d'après le corollaire 1.

3. Définition de $K(X, A)$.

Soit A un sous-espace fermé de X (toujours supposé compact). Nous considérerons les triples $(E, F; \alpha)$, où E et F sont deux fibrés de base X et α un isomorphisme $E|_A \to F|_A$ de leurs restrictions à A. (C'est, comme il a été dit plus haut, la situation que l'on rencontre avec le symbole d'un opérateur elliptique, à cela près que dans ce cas X et A ne vérifient pas les hypothèses de ce paragraphe ; mais on verra plus tard comment se ramener au cas où X est compact, et A fermé.)

Par définition, un isomorphisme $(E, F; \alpha) \approx (E', F'; \alpha')$ de deux tels triples est un couple d'isomorphismes

$$(\varphi, \psi) : E \xrightarrow{\varphi} E', \quad F \xrightarrow{\psi} F'$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E|_A & \xrightarrow{\varphi|_A} & E'|_A \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ F|_A & \xrightarrow{\psi|_A} & F'|_A \end{array}$$

Nous dirons que deux triples (E, F, α) et (E', F', α') sont équivalents s'il existe des fibrés G_1 et G_2 sur X tels que

$$(E \oplus G_1, F \oplus G_1, \alpha \oplus I_{G_1|_A}) \approx (E' \oplus G_2, F' \oplus G_2, \alpha' \oplus I_{G_2|_A}) .$$

Nous noterons $K(X, A)$ l'ensemble des classes d'équivalence de triples $(E, F; \alpha)$. Cette relation d'équivalence étant compatible avec l'opération de somme directe, $K(X, A)$ est un monoïde commutatif avec élément neutre, nous verrons que c'est en fait un groupe commutatif.

Pour $A = \emptyset$, on retrouve la définition de $K(X)$.

Nous noterons $d(E, F; \alpha)$ la classe du triple $(E, F; \alpha)$.

THÉORÈME 1. - Si $(E, F; \alpha)$, $(F, G; \beta)$ sont deux triples quelconques, alors

$$d(E, F; \alpha) + d(F, G; \beta) = d(E, G; \beta \circ \alpha). \tag{1}$$

Il résultera en particulier de ce théorème que $K(X, A)$ est un groupe ; en effet $d(E, F; \alpha) + d(F, E; \alpha^{-1}) = 0$.

Avant d'aborder la démonstration, donnons deux lemmes.

LEMME 1. - Tout isomorphisme $E|_A \xrightarrow{\alpha} F|_A$ au-dessus de A peut se prolonger en un isomorphisme $E|_V \longrightarrow F|_V$ au-dessus d'un voisinage V de A.

Démonstration. - Considérons le fibré (vectoriel localement trivial) $\mathcal{L}_X(E, F)$ dont la fibre au-dessus de $x \in X$ est $\mathcal{L}(E_x, F_x)$. L'isomorphisme $\alpha : E|_A \to F|_A$ définit une section s de $\mathcal{L}(E, F)$ au-dessus de A. Si l'on admet pour un instant que s se prolonge à X, le lemme est démontré, car l'ensemble des points x où $\det s(x) \neq 0$ est ouvert dans X et contient A par hypothèse. On est donc ramené à montrer que toute section d'un fibré $E \to X$ au-dessus de A se prolonge à un voisinage de A. On peut, sans restreindre la généralité, supposer X connexe. Il résulte alors d'un théorème classique (sur les fibrés "à groupe structural" et à fibre "solide") que toute section de E au-dessus de A se prolonge à X tout entier (cf. [5], I, théorème 12.2, p. 55).

DÉFINITION 1. - Nous dirons que deux isomorphismes $\alpha_0, \alpha_1 : E \to F$ de fibrés sur X sont isotopes s'il existe une section continue $\alpha(x, t)$ du fibré $\mathcal{L}_X(E, F) \times I$ au-dessus de $X \times I$, telle que, pour tout $t \in I$, $\alpha(x, t)$ soit un isomorphisme de E sur F, avec $\alpha(x, 0) = \alpha_0(x)$ et $\alpha(x, 1) = \alpha_1(x)$ pour tout $x \in X$. Nous dirons que α réalise une isotopie de α_0.

LEMME 2. - I désignant le segment $[0, 1]$, et V un voisinage arbitraire de A dans X, il existe une application continue de $X \times I$ dans $(X \times \{0\}) \cup (V \times I)$ induisant l'identité sur $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$.

On prend l'application $(x, t) \leadsto (x, t\varphi(x))$, où φ est une fonction continue sur X, à valeurs dans I, égale à 1 dans A, et à 0 dans $X - V$.

<u>Définition</u>. - E et F étant deux fibrés sur X, et π désignant la projection $X \times I \to X$, nous dirons que deux homomorphismes (resp. isomorphismes) α_o et α_1 de E dans F (resp. sur F) sont <u>homotopes</u> (resp. <u>isotopes</u>) s'il existe un homomorphisme (resp. un isomorphisme) α de $\pi^* E$ dans $\pi^* F$ (resp. sur $\pi^* F$) tel que

$$\alpha|_{X\times\{0\}} = \alpha_o \qquad \text{et} \qquad \alpha|_{X\times\{1\}} = \alpha_1 \ .$$

LEMME 3. - <u>Si α_o est un isomorphisme de E sur F au-dessus de X, et α_1 un isomorphisme de $E|_\Lambda$ sur $F|_\Lambda$ isotope à $\alpha_o|_\Lambda$, on peut prolonger α_1 en un isomorphisme de E sur F au-dessus de X, isotope à α_o</u>.

En effet, il existe par hypothèse un isomorphisme α de $\pi^* E$ sur $\pi^* F$ au-dessus de $(X \times \{0\}) \cup (\Lambda \times I)$ coïncidant avec α_o et α_1 au-dessus de $X \times \{0\}$ et $\Lambda \times \{1\}$ respectivement. D'après le lemme 1, il existe un voisinage V de Λ tel que α se prolonge en un isomorphisme au-dessus de $(X \times \{0\}) \cup (V \times I)$. Si f est une application continue de $X \times I$ dans $(X \times \{0\}) \cup (V \times I)$ induisant l'identité sur $(X \times \{0\}) \cup (\Lambda \times I)$ (lemme 2), l'isomorphisme $\bar{\alpha} : \pi^* E \to \pi^* F$ défini par $\bar{\alpha}(x , t) = \alpha(f(x , t))$ prolonge α au-dessus de $X \times I$; donc $\bar{\alpha}|_{X\times\{1\}}$ est un prolongement de α_1 isotope à α_o.

COROLLAIRE. - <u>Si α et α' sont deux isomorphismes isotopes $E|_\Lambda \to F|_\Lambda$, alors</u>

$$d(E , F ; \alpha) = d(E , F ; \alpha') \ .$$

En effet, il résulte de la définition de $K(X , \Lambda)$ que si β est un isomorphisme $F \to G$ (sur X), on a

$$d(E , F ; \alpha) = d(E , G ; \beta \circ \alpha) \ .$$

Le corollaire s'en déduit aussitôt : il suffit de prendre pour β un isomorphisme $F \to F$ prolongeant $\alpha' \circ \alpha^{-1}$ (un tel prolongement existe en vertu du lemme 2).

<u>Démonstration du théorème</u> 1. - Notons E_Λ, F_Λ, G_Λ les restrictions à Λ des fibrés E, F, G.

Par définition de l'addition des triples, on a

$$d(E \oplus F , F \oplus G ; \alpha \oplus \beta) = d(E , F ; \alpha) + d(F , G ; \beta) \ .$$

L'isomorphisme $\alpha \oplus \beta$ se décompose en

$$E_\Lambda \oplus F_\Lambda \xrightarrow{\alpha\oplus 1} F_\Lambda \oplus F_\Lambda \xrightarrow{1\oplus\beta} F_\Lambda \oplus G_\Lambda \ .$$

Or l'automorphisme γ de $F_\Lambda \oplus F_\Lambda$ défini par $(x , y) \rightsquigarrow (- y , x)$ est isotope à l'identité (considérer la rotation

$$\rho_t(x) = x \cos \frac{\pi}{2} t - y \sin \frac{\pi}{2} t , \qquad \rho_t(y) = x \sin \frac{\pi}{2} t + y \cos \frac{\pi}{2} t$$

pour $0 \leqslant t \leqslant 1$).

On a donc

$$d(E \oplus F , F \oplus G ; \alpha \oplus \beta) = d(E \oplus F , F \oplus G ; (1 \oplus \beta) \circ \gamma \circ (\alpha \oplus 1)) .$$

Soit d'autre part δ la restriction à A de l'isomorphisme $F \oplus G \to G \oplus F$ défini par $(x , t) \rightsquigarrow (y , - x)$. Notant ε le composé

$$\delta \circ (1 \oplus \beta) \circ \gamma \circ (\alpha \oplus 1) ,$$

on obtient finalement

$$d(E \oplus F , F \oplus G ; \alpha \oplus \beta) = d(E \oplus F , G \oplus F ; \varepsilon)$$

Mais ε est défini par

$$(x , y) \rightsquigarrow (\alpha x , y) \rightsquigarrow (- y , \alpha x) \rightsquigarrow (- y , \beta \circ \alpha x) \rightsquigarrow (\beta \circ \alpha x , y)$$

c'est-à-dire $\varepsilon = (\beta \circ \alpha) \oplus 1$. Alors

$$d(E \oplus F , F \oplus G ; \alpha \oplus \beta) = d(E \oplus F , G \oplus F ; (\beta \circ \alpha) \oplus 1) = d(E , G ; \beta \circ \alpha)$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. - <u>Tout élément de</u> $K(X , A)$ <u>peut se mettre sous la forme</u> $d(E , \Theta ; \alpha)$ <u>où</u> Θ <u>est un fibré trivial sur</u> X . <u>On a</u> $d(E , \Theta ; \alpha) = 0$ <u>si et seulement s'il existe un fibré trivial</u> Θ' (<u>sur</u> X) <u>tel que la trivialisation</u> $\alpha \oplus 1 : E \oplus \Theta'|_A \to \Theta \oplus \Theta'|_A$ <u>se prolonge en une trivialisation de</u> $E \oplus \Theta'$ <u>au-dessus de</u> X .

La proposition résulte immédiatement de la proposition 1 et de la définition de $K(X , A)$.

Le lecteur remarquera que si la trivialisation $\alpha : E|_A \to \Theta|_A$ se prolonge au-dessus de X , alors $d(E , \Theta ; \alpha) = 0$, mais que **la réciproque est fausse** (comme le montre le cas où $A = \emptyset$, $E = T(S^2)$).

A toute application continue $f : Y \to X$ telle que $f(B) \subset A$ correspond un homomorphisme naturel $f^* : K(X , A) \to K(Y , B)$ défini par

$$f^* d(E , F ; \alpha) = d(f^* E , f^* F ; f^* \alpha) .$$

On a une relation de transitivité habituelle. Ainsi, $K(X , A)$ est un foncteur contravariant de (X , A) .

THÉORÈME 2. - <u>La suite</u>

(2) $$K(X\ ,\ A) \xrightarrow{g^*} K(X) \xrightarrow{f^*} K(A)$$

<u>définie par les inclusions</u> $(A\ ,\ \emptyset) \xrightarrow{f} (X\ ,\ \emptyset) \xrightarrow{g} (X\ ,\ A)$ <u>est une suite exacte</u>.

<u>Démonstration.</u> - $f^* \circ g^* = 0$ est évident. Supposons maintenant que $f^* d(\dot{E}\ ,\ \dot{F}) = 0$, c'est-à-dire $d(\dot{E}_{|A}\ ,\ \dot{F}_{|A}) = 0$. D'après le corollaire 1 de la proposition 1, il existe un fibré trivial Θ sur X tel que

$$(E \oplus \Theta)_{|A} \approx (F \oplus \Theta)_{|A} .$$

Soit α un isomorphisme $(E \oplus \Theta)_{|A} \to (F \oplus \Theta)_{|A}$. On a :

$$d(E\ ,\ F) = d(E \oplus \Theta\ ,\ F \oplus \Theta) = g^* d(E \oplus \Theta\ ,\ F \oplus \Theta\ ;\ \alpha)\ ,$$

ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 2 bis. - <u>Dans le cas où</u> A <u>est rétracte de</u> X , <u>la suite</u>

(3) $$0 \to K(X\ ,\ A) \xrightarrow{g^*} K(X) \xrightarrow{f^*} K(A) \to 0$$

<u>est exacte</u>.

<u>Démonstration</u>.

a. f^* est surjectif. En effet, soit p une rétraction $X \to A$, on a $p \circ f = 1$, d'où $f^* \circ p^* = 1$.

b. g^* est injectif. Supposons en effet que $g^* d(E\ ,\ \Theta\ ;\ \alpha) = 0$ (Θ trivial). D'après le corollaire 1 de la proposition 1, il existe un fibré trivial Θ' sur X tel que $E \oplus \Theta' \approx \Theta \oplus \Theta'$. Soit β la restriction à A d'un morphisme $E \oplus \Theta' \to \Theta \oplus \Theta'$. Alors $\beta \circ (\alpha \oplus 1)^{-1}$ est un automorphisme du fibré trivial $\Theta \oplus \Theta'$ au-dessus de A . Mais cet automorphisme se prolonge au-dessus de X par $p^*(\beta \circ (\alpha \oplus 1)^{-1})$. Il existe donc un isomorphisme $E \oplus \Theta' \to \Theta \oplus \Theta'$ dont la restriction à A est $\alpha \oplus 1$, ce qui entraîne $d(E\ ,\ \Theta\ ;\ \alpha) = 0$ en vertu de la proposition 2.

<u>Remarque</u> 1. - Sans hypothèse de rétraction, $K(X) \to K(A)$ n'est pas surjectif en général, et $K(X\ ,\ A) \to K(X)$ n'est pas injectif en général.

<u>Remarque</u> 2. - Dans le cas où A est réduit à un point x_o (lequel est évidemment rétracte de X), $K(X\ ,\ \{x_o\})$ s'identifie au noyau de $K(X) \to K(\{x_o\})$, c'est-à-dire au $K(X\ ,\ x_o)$ déjà défini. On pourra donc écrire $K(X\ ,\ x_o)$ au lieu de $K(X\ ,\ \{x_o\})$.

DÉFINITION 2. - Si $A \neq \emptyset$, nous noterons X/A l'espace quotient de X par la relation d'équivalence qui identifie entre eux les points de A . C'est un espace compact. Dans le cas où $A = \emptyset$, on fait la convention que $X/\emptyset$ est la somme topologique de X et d'un point isolé.

Dans l'espace X/A , soit a le point, classe d'équivalence du sous-espace A (point qui existe même si $A = \emptyset$ d'après la convention précédente), et soit p l'application canonique $X \to X/A$.

THÉORÈME 3. - $p^* : K(X/A , a) \to K(X , A)$ <u>est un isomorphisme</u>.

Si $A = \emptyset$, le théorème est évident. Nous supposerons $A \neq \emptyset$ pour faire la démonstration.

a. p^* <u>est injectif</u>. - Soit $d(E , \Theta ; \alpha) \in K(X/A , a)$ (avec Θ trivial) tel que $p^* d(E , \Theta ; \alpha) = 0$, c'est-à-dire $d(p^* E , p^* \Theta ; p^* \alpha) = 0$. Il existe donc un fibré trivial sur X , qu'on peut supposer de la forme $p^* \Theta'$, tel que la trivialisation

$$p^*(\alpha \oplus 1) : p^*(E \oplus \Theta')_{|A} \to p^*(\Theta \oplus \Theta')_{|A}$$

se prolonge en une trivialisation f de $p^*(E \oplus \Theta')$ au-dessus de X . Il est clair que l'application $g : E \oplus \Theta' \to \Theta \oplus \Theta'$, qui coïncide avec f au-dessus de $X - A$ et avec $\alpha \oplus 1$ au-dessus de a , est une trivialisation de $E \oplus \Theta'$ prolongeant $\alpha \oplus 1$. On a donc

$$d(E , \Theta ; \alpha) = 0 .$$

b. p^* <u>est surjectif</u>. - Donnons-nous $d(E , \Theta ; \alpha) \in K(X , A)$ avec Θ trivial sur X , et soit Θ' un fibré trivial sur X/A , tel que $p^* \Theta' = \Theta$. D'après le lemme 1, α se prolonge en un isomorphisme (noté encore α) $E_V \to \Theta_V$ au-dessus d'un voisinage V de A . Il existe un fibré E_1 sur V/A et un isomorphisme $\alpha' : E_1 \to \Theta'_{V/A}$ tel que le diagramme

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} E_V \arrow[r, "\alpha"] & \Theta_V \\ E_1 \arrow[u, "p^*"] \arrow[r, "\alpha'"] & \Theta'_{V/A} \arrow[u, "p^*"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif (on pourra par exemple prendre un morphisme "strict" (cf. exposé 1) $f : \Theta_V \to \Theta'_{V/A}$ tel que $f \circ p^* = 1$, et considérer la décomposition canonique du morphisme strict $f \circ \alpha$).

Les fibrés E_{X-A} sur $X - A$ et E_1 sur V/A se recollent sur $V - A$ au moyen du diagramme (4) et définissent un fibré E' sur X/A tel que

$$p^* \, d(E' , \Theta' ; \alpha'|_a) = d(E , \Theta ; \alpha) .$$

4. Structures multiplicatives (cf. aussi plus loin, exposé 15).

a. "Absolues". - Nous supposons ici que X et Y sont des espaces topologiques quelconques. L'application qui, à un fibré E sur X et à un fibré F sur Y, associe leur produit tensoriel externe $E \otimes F$ (cf. exposé 1) définit une application $\Phi(X) \times \Phi(Y) \to \Phi(X \times Y)$ compatible avec l'addition, donc un homomorphisme

$$K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y) .$$

[on pourrait le définir directement par la formule

$$d(a , b) \otimes d(a' , b') = d((a \otimes a') \oplus (b \otimes b') , (a \otimes b') \oplus (b \otimes a')) .]$$

Supposons maintenant $X = Y$ et soit Δ l'application diagonale $X \to X \times X$. Par composition avec Δ^*, on obtient un homomorphisme

$$K(X) \otimes K(X) \to K(X)$$

(le lecteur véfifiera que c'est le même que celui que l'on obtiendrait au moyen du produit tensoriel interne).

Ainsi $K(X)$ est un anneau, commutatif (car $E \underset{X}{\otimes} F \approx F \underset{X}{\otimes} E$), avec élément unité non nul : la classe du fibré trivial de dimension 1 sur X.

b. "Relatives". - Nous supposons à nouveau X et Y compacts. On définit un homomorphisme

$$K(X) \otimes K(Y , A) \to K(X \times Y , X \times A)$$

par la formule

$$d(G , 0) \otimes d(E , F ; \alpha) \to d(G \otimes E , G \otimes F , 1 \otimes \alpha)$$

(Si $A = \emptyset$, c'est l'homomorphisme $K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ déjà défini).

Faisons $X = Y$. L'application $(X , A) \to (X \times X , X \times A)$, définie par

$$(x , a) \rightsquigarrow ((x, x) , (a , a))$$

donne en passant aux K un homomorphisme

$$K(X \times X , X \times A) \to K(X , A) ,$$

d'où, en définitive, un homomorphisme

$$K(X) \otimes K(X , A) \to K(X , A)$$

qui définit sur $K(X , A)$ une structure de $K(X)$-module .

Si l'on tient compte de l'isomorphisme de $K(X , A)$ avec $K(X/A , a)$, on obtient enfin un homomorphisme :

$$K(X) \otimes K(X/A , a) \to K(X/A , a) .$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). - Vector bundles and homogeneous spaces, Differential geometry, p. 7-38. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Proc. Symp. pure Math., 3).

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chap. 8 : Modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Eléments de Mathématique, 23).

[3] LANG (S.). - Introduction to differentiable manifolds. - New York, Interscience Publishers, 1962.

[4] Séminaire CARTAN, t. 3, 1950/51 : Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux, 2e éd. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

[5] STEENROD (N.). - The topology of fibre bundles. - Princeton, Princeton University Press, 1951 (Princeton mathematical Series, 14).