LAURENT SCHWARTZ

Opérateurs elliptiques et indices

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A2_0>

OPÉRATEURS ELLIPTIQUES ET INDICES

par Laurent SCHWARTZ

(Rédigé par Jean HORVATH)

1. Sections d'un espace fibré.

Soient E un espace fibré de classe C^r à fibre vectorielle, X sa base et $\pi : E \to X$ sa projection. Une section de E est une application $s : X \to E$ qui envoie tout point x de X dans la fibre E_x au-dessus de x, ou, autrement dit, qui composée avec la projection π donne l'application identique de X sur lui-même. Spécifions qu'on n'exige nullement qu'une section soit continue comme c'est le cas en topologie algébrique où la continuité de la section fait partie de la définition. On considérera même des sections qui ne sont définies que presque partout dans un sens qu'on précisera tout à l'heure.

Sur un fibré E à fibre vectorielle de classe C^r on peut considérer des sections de classe $C^{r'}$ pour tout $r' \leqslant r$. Les sections de classe $C^{r'}$ forment un espace vectoriel qu'on désignera par $\mathcal{E}^{r'}(X ; E)$. En particulier on désignera par $\mathcal{E}(X ; E)$ l'espace vectoriel des sections C^∞ de l'espace fibré E de classe C^∞. Si E est un espace fibré trivial, c'est-à-dire le produit cartésien de la base X et de la fibre type E_o, alors $\mathcal{E}^r(X ; E)$ s'identifie à l'espace des fonctions de classe C^r définies sur X et prenant leurs valeurs dans E_o.

Définissons maintenant les sections de E qui sont localement dans L^2 (ou dans L^p). Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X tel qu'il existe un difféomorphisme de classe C^r de $\mathcal{U}$ sur un ouvert Θ de $\underset{\sim}{R}^n$ et tel que l'espace fibré $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ soit isomorphe à l'espace fibré trivial $\Theta \times E_o$. Etant donnée une section de E, sa restriction à $\mathcal{U}$ peut être transportée sur Θ par le difféomorphisme $\mathcal{U} \overset{\sim}{\to} \Theta$, et l'on obtient une fonction définie sur Θ, à valeurs dans E_o. Si alors on a une section non nécessairement partout définie de E, on dira qu'elle est définie presque partout, si, pour tout $\mathcal{U}$, de la sorte décrite il y a un moment, la fonction qui lui correspond sur Θ est définie presque partout. On voit facilement que cette notion est invariante par rapport à un difféomorphisme de la base et qu'en particulier il suffit de considérer un recouvrement de X par des ouverts $\mathcal{U}$ ayant la propriété mentionnée.

Si une section presque partout définie de E est telle que pour toute carte $\mathcal{U}$ de X, de la sorte considérée, la fonction sur $\mathcal{O}$, qui correspond à la restriction de la section à $\mathcal{U}$, est localement dans L^2 par rapport à la mesure de Lebesgue, on dira que la section appartient localement à L^2. Les sections qui sont localement dans L^2 (ou plutôt leurs classes d'équivalence modulo la relation d'égalité presque partout) forment un espace vectoriel qu'on désignera par $L^2_{loc}(X\,;E)$. Ici encore $L^2_{loc}(X\,;E)$ s'identifiera avec l'espace des fonctions définies presque partout sur X, à valeurs dans E_o, qui sont localement dans L^2, lorsque E est l'espace fibré trivial $X \times E_o$.

Un exemple important d'une section d'un espace fibré à fibre vectorielle est une forme quadratique définie positive ou une forme hermitienne définie positive sur chaque fibre E_x de E qui dépende d'une façon C^r du point x de la base. En effet, une forme sesquilinéaire sur $E_x \times E_x$ peut être identifiée à un élément du produit tensoriel $E_x^* \otimes \overline{E_x^*}$, de manière qu'une forme hermitienne définie positive, qui varie d'une façon C^r avec le point de la base, peut être identifiée à une section définie positive de l'espace fibré $E^* \otimes_X \overline{E^*}$. Si X est paracompact, on construit une telle section de la manière suivante. On prend un recouvrement $(\mathcal{U}_i)$ de X par des ouverts de X tels que au-dessus de chaque $\mathcal{U}_i$ l'espace fibré soit trivial. Soit (α_i) une partition de l'unité de classe C^r, localement finie, subordonnée au recouvrement $(\mathcal{U}_i)$. Au-dessus de chaque $\mathcal{U}_i$ il est trivial de trouver une forme hermitienne définie positive s_i qui varie de façon C^r avec le point x, on peut par exemple prendre s_i constante quand x varie dans $\mathcal{U}_i$. La forme hermitienne $\alpha_i\, s_i$ ne sera plus définie positive sur $\mathcal{U}_i$, car $\operatorname{Supp} \alpha_i\, s_i \subset \operatorname{Supp} \alpha_i$, mais elle restera $\geqslant 0$ et aura l'avantage de pouvoir être prolongée de façon C^r à tout X en lui donnant simplement la valeur zéro hors de $\mathcal{U}_i$. La somme $s = \sum \alpha_i\, s_i$ est localement finie, de classe C^r et, comme $\sum \alpha_i(x) \equiv 1$, en tout point $x \in X$ il existe un indice i tel que $\alpha_i(x) > 0$, donc s est bien une forme hermitienne définie positive sur la fibre E_x.

2. Opérateurs différentiels. Le symbole.

Soient E et F deux espaces fibrés de classe C^∞, à fibre vectorielle ayant même base X dont on supposera dès maintenant qu'elle est une variété de classe C^∞, séparée et dénombrable à l'infini. Un opérateur différentiel P de classe C^∞ est alors une application linéaire continue de caractère local de l'espace $\mathcal{E}(X\,;E)$ dans l'espace $\mathcal{E}(X\,;F)$. Supposons que l'ouvert $\mathcal{U}$ de X soit une carte locale pour les deux fibrés E et F à la fois, c'est-à-dire que $\mathcal{U}$ soit

C^∞-difféomorphe à un ouvert $\mathcal{O}$ de $\underset{\sim}{R}^n$, que la partie $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ de E soit isomorphe à $\mathcal{O} \times E_o$ et que la partie $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ de F soit isomorphe à $\mathcal{O} \times F_o$. Puisque l'opérateur P est de caractère local, il suffit de connaître une section $f \in \mathcal{E}(X ; E)$ au-dessus de $\mathcal{U}$ pour connaître Pf au-dessus de $\mathcal{U}$. D'après ce qu'on a vu dans le premier exposé, sur $\mathcal{U}$ l'opérateur P s'écrit sous la forme $P(x , D) = \sum a_p(x) D^p$ où les a_p sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathcal{O}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(E_o , F_o)$ et la somme est finie sur tout compact. On rejoint ainsi la définition donnée originalement d'un opérateur différentiel sur $\underset{\sim}{R}^n$.

Dans le cas d'un sous-ensemble ouvert $\mathcal{O}$ d'un espace affine X_o on a attaché à tout opérateur différentiel P définie sur $\mathcal{O}$ une fonction $P(x , \xi)$ définie sur $\mathcal{O} \times \Xi$, où Ξ est le dual de l'espace vectoriel attaché à X_o, qui prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(E_o , F_o)$ et qui, pour tout $x \in \mathcal{O}$, est un polynôme en ξ. On a un isomorphisme de l'espace vectoriel des opérateurs différentiels $P(x , D)$ sur l'espace vectoriel des fonctions $P(x , \xi)$ qui, pour tout $x \in \mathcal{O}$, sont des polynômes en ξ (qui n'est pas un isomorphisme d'algèbres car ξ^p commute avec tout $a \in \mathcal{E}(X ; \mathcal{L}(E_o , F_o))$ mais pas D^p). On pourrait penser à faire la même chose pour un opérateur différentiel P défini sur une variété X quelconque, c'est-à-dire à attacher à P une fonction $P(\xi)$ du covecteur tangent ξ de X, qui, pour tout x est un polynôme en ξ sur $T^*(X)$, et dont le degré est borné quand x varie dans un sous-ensemble compact de X. La manière de faire cela serait de considérer la forme $P(x , D) = \sum a_p(x) D^p$ que P prend sur une carte locale $\mathcal{O}$ et de lui attacher la fonction $P(x , \xi) = \sum a_p(x) \xi^p$. Or cela dépend de la carte choisie, car on a vu que $P(x , \xi)$ est donnée par la relation

$$P(x , \xi).\vec{e}.\exp(2\pi i\langle x - a , \xi\rangle) = P(\exp(2\pi i\langle x - a , \xi\rangle).\vec{e}) \quad ,$$

où $\vec{e} \in E_o$, et la forme bilinéaire $\langle x - a , \xi\rangle$ n'est pas invariante par rapport à un difféomorphisme de $\mathcal{O}$.

Ce qui garde son sens pour un opérateur différentiel P défini sur une variété X, c'est la fonction $P_m(x , \xi)$, qui dans le cas où

$$P(x , D) = \sum_{|p| \leq m} a_p(x) D^p \quad ,$$

est un opérateur d'ordre au plus m, défini sur un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$, est définie par

$$P_m(x , \xi) = \sum_{|p| = m} a_p(x) \xi^p \quad .$$

On a vu, en effet, que $P_m(x_o , \xi_o).\vec{e}$ est le coefficient de t^m dans l'expression $P(\exp(2\pi it\varphi).\vec{e})(x_o)$, qui est un polynôme en t de degré $\leq m$, si $\varphi \in \mathcal{E}$

est telle que $\varphi(x_o) = 0$, $d\varphi(x_o) = \xi_o$. Or cette dernière expression est parfaitement intrinsèque et définie sur une variété X , on aura seulement à prendre cette fois $\vec{e}$ dans la fibre E_{x_o} et $\xi_o \in T^*_{x_o}(X)$. L'élément $P_m(x_o , \xi_o).\vec{e}$ appartiendra à la fibre F_{x_o} (nous préférons écrire (x_o , ξ_o) , bien que ξ_o détermine complètement x_o). De cette façon on attache à tout opérateur différentiel $P : \mathcal{E}(X ; E) \to \mathcal{E}(X ; F)$ d'ordre au plus égal à m son <u>m-symbole</u>, P_m , qui est une fonction définie sur l'espace fibré $T^*(X)$ des covecteurs tangents de X , telle que $P_m(x , \xi) \in \mathcal{L}(E_x , F_x)$ et qui, pour tout x , est un polynôme homogène de degré m en ξ . Comme chaque covecteur tangent ξ détermine son origine x , il serait plus logique, mais moins commode, d'écrire $P_m(\xi)$ au lieu de $P_m(x , \xi)$.

Comme un opérateur d'ordre $\leqslant m$ est aussi d'ordre $\leqslant m + 1$, $\leqslant m + 2$, ... , on pourra aussi parler de son $(m + 1)$-symbole, $(m + 2)$-symbole, ... , qui sont tous nuls (noter l'analogie avec la notion de polynôme de degré $\leqslant m$). Avec cette convention, on peut affirmer que le m-symbole de la somme de deux opérateurs d'ordres $\leqslant m$ est la somme de leurs m-symboles.

Désignons par $\mathrm{Diff}(X ; E , F)$ l'espace vectoriel des opérateurs différentiels $\mathcal{E}(X ; E) \to \mathcal{E}(X ; F)$ et par $\mathrm{Diff}_m(X ; E , F)$ le sous-espace formé par les opérateurs d'ordre au plus égal à m . L'application, qui à tout $P \in \mathrm{Diff}_m(X ; E , F)$ fait correspondre son symbole, applique $\mathrm{Diff}_m(X ; E , F)$ dans l'espace $\mathcal{P}_m(X , T^*(X) ; \mathcal{L}(E , F))$ des fonctions, $P(X , \xi)$ définies sur $T^*(X)$, tels que pour un $x \in X$ fixe $P(x , \xi)$ appartienne à $\mathcal{L}(E_x , F_x)$, et soit un polynôme homogène de degré m en ξ . On peut interpréter $\mathcal{P}_m(X , T^*(X) ; \mathcal{L}(E , F))$ comme l'espace des sections d'un espace fibré. En effet l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré m sur $T^*_x(X)$ est isomorphe à la m-ième puissance tensorielle symétrique $\overset{s_m}{\otimes} T_x(X)$, d'où il résulte que tout élément de $\mathcal{P}_m(X , T^*(X) ; \mathcal{L}(E , F))$ est une section de l'espace fibré

$$\overset{s_m}{\otimes}_X T(X) \otimes_X \mathcal{L}_X(E , F) = \overset{s_m}{\otimes}_X T(X) \otimes_X E^* \otimes_X F$$

et qu'en fait on a

$$\mathcal{P}_m(X , T^*(X) ; \mathcal{L}(E , F)) = \mathcal{E}(X ; \overset{s_m}{\otimes}_X T(X) \otimes_X \mathcal{L}_X(E , F)) \quad .$$

Le noyau de l'application

$$(1) \qquad \mathrm{Diff}_m(X ; E , F) \to \mathcal{E}(X ; \overset{s_m}{\otimes}_X T(X) \otimes_X \mathcal{L}_X(E , F))$$

donné par $P \rightsquigarrow P_m$ est évidemment le sous-espace $\mathrm{Diff}_{m-1}(X ; E , F)$. On voit en utilisant un recouvrement de X par des cartes locales et une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, que l'application (1) est surjective. Autrement dit, la suite

$$0 \to \mathrm{Diff}_{m-1}(X ; E , F) \to \mathrm{Diff}_m(X ; E , F) \to \mathcal{E}(X ; \overset{s_m}{\otimes} T^*(X) \otimes_X \mathcal{L}(E , F)) \to 0$$

est donc exacte. L'espace vectoriel $\mathrm{Diff}_{\mathrm{fini}}(X ; E , F)$ des opérateurs différentiels d'ordre fini est filtré par les sous-espaces $\mathrm{Diff}_m(X ; E , F)$ et le sous-espace vectoriel gradué associé est

$$\bigoplus_m \mathcal{E}(X ; \overset{s_m}{\otimes} T(X) \otimes_X \mathcal{L}(E , F)) \quad .$$

Etant donnés trois espaces fibrés E, F, G de classe C^∞, à fibre vectorielle, ayant même base X, on a une application

$$\mathrm{Diff}_p(X ; E , F) \times \mathrm{Diff}_q(X ; F , G) \to \mathrm{Diff}_{p+q}(X ; E , G)$$

qui à un opérateur P d'ordre $\leq p$ et à un opérateur Q d'ordre $\leq q$ fait correspondre l'opérateur composé $Q \circ P$ d'ordre $\leq p + q$. Pour les symboles correspondants il suit de la formule de Leibnitz qu'on la règle

$$(Q \circ P)_{p+q} = Q_q . P_p \quad .$$

Si $E = F = G = \underset{\sim}{C}$ corps des complexes, on sait que $Q \circ P - P \circ Q$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq p + q - 1$ donc son $(p + q)$-symbole est nul. C'est visible directement, car ici $Q_q \circ P_p - P_p \circ Q_q = 0$.

Il est commode de pouvoir considérer $\mathrm{Diff}_m(X ; E ; F)$ comme l'espace vectoriel des sections C^∞ d'un fibré sur X. Soit P un opérateur différentiel scalaire d'ordre $\leq m$. Alors $f \rightsquigarrow (Pf)(a)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}(X)$, nulle sur les fonctions m-plates en a (c'est-à-dire les fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont nulles en a) ; c'est donc une forme linéaire sur l'espace vectoriel $T^*_{m,a}(X)$ des jets d'ordre m de fonctions en a. Autrement dit, $f \rightsquigarrow (Pf)(a)$ est un élément du dual $T_{m,a}(X)$ de cet espace. C'est ce que nous avons déjà exprimé dans l'esposé n° 1 en disant que c'est une distribution d'ordre $\leq m$ du support a. En outre cet élément de $T_{m,a}(X)$ dépend C^∞ de a ; finalement l'opérateur différentiel P est une section C^∞ de l'espace fibré $T_m(X)$, réunion des $T_{m,a}(X)$ pour $a \in X$. On voit sans peine qu'un élément de $\mathrm{Diff}_m(X ; E ; F)$ est alors une section C^∞ de l'espace fibré produit tensoriel $T_m(X) \otimes_X E^* \otimes_X F$:

$$\mathrm{Diff}_m(X ; E ; F) = \mathcal{E}(X ; T_m(X) \otimes_X E^* \otimes_X F) \quad .$$

Alors si f est une section C^∞ de E, elle a en chaque point un jet d'ordre m, donc elle définit canoniquement une section de $T^*_m(X) \otimes_X E$. Alors la section Pf de F est définie par l'application X-bilinéaire évidente d'espaces fibrés :

$$(T_m(X) \otimes_X E' \otimes_X F) \times_X (T^*_m(X) \otimes_X E) \to F \quad .$$

On sait, en théorie des variétés différentiables, que le quotient $T_{m,a}(X)/T_{m-1,a}(X)$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\overset{s_m}{\otimes} T_a(X)$ des polynômes homogènes de degré m sur $T^*_a(X)$ (1). On a donc la suite exacte de morphismes de fibrés

$$0 \to T_{m-1}(X) \to T_m(X) \to \overset{s_m}{\otimes}_X T(X) \to 0$$

donc aussi la suite exacte de morphismes de fibrés

$$0 \to T_{m-1}(X) \otimes_X E' \otimes_X F \to T_m(X) \otimes_X E' \otimes_X F \xrightarrow{\sigma} \overset{s_m}{\otimes}_X T(X) \otimes_X E' \otimes F \to 0 \qquad ;$$

L'homomorphisme σ appliqué aux sections C^∞ donne l'application "symbole",

$$\mathrm{Diff}_m(X \,;\, E \,;\, F) \to \mathcal{E}(X \,;\, \overset{s_m}{\otimes} T(X) \otimes_X E' \otimes_X F) \quad .$$

3. Opérateurs elliptiques.

L'exemple le plus simple d'un opérateur elliptique (quand E et F sont des fibrés triviaux à fibre unidimensionnelle et à base $\mathbb{R}^n$) est le laplacien

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad .$$

Il lui correspond le symbole $-4\pi^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)$ qui a la propriété de ne pas s'annuler pour ξ réel, $\xi \neq 0$. En généralisant ceci, on dit que l'opérateur

---

(1) Dans cet isomorphisme, on devra mettre le facteur $2i\pi$ si on veut retrouver les formules du début. A l'opérateur différentiel D^p sur $\mathbb{R}^n$, d'ordre $|p| = m$,

$$D^p = \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} \quad ,$$

on fera correspondre son image dans $\overset{s_m}{\otimes} \mathbb{R}_n$, le polynôme

$$\xi \rightsquigarrow \xi^p = \xi_1^{p_1}\, \xi_2^{p_2} \cdots \xi_n^{p_n} \quad ,$$

homogène d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$.

scalaire

$$P(x\,,\,D) = \sum_{|p|\leq m} a_p(x)\, D^p$$

défini sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\underset{\sim}{R}^n$ est elliptique si $\sum_{|p|=m} a_p(x)\,\xi^p$ (bien noter qu'on ne prend que la partie homogène de degré m) est différent de zéro pour tout $x \in \mathcal{O}$ et tout ξ réel $\neq 0$. Restant toujours sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\underset{\sim}{R}^n$ mais considérant un opérateur $P(x\,,\,D)$ vectoriel, à cette fois $a_p(x) \in \mathcal{L}(E_o\,,F_o)$, on dira que $P(x\,,\,D)$ est elliptique si $\sum_{|p|=m} a_p(x)\,\xi^p$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(E_o\,,\,F_o)$ pour tout $x \in \mathcal{O}$ et $\xi \neq 0$.

Pour un opérateur différentiel d'ordre $\leq m$, $P : \mathcal{E}(X\,;\,E) \to \mathcal{E}(X\,;\,F)$, défini sur une variété X, on est donc amené à dire qu'il est m-elliptique si son m-symbole $P_m(x\,,\,\xi)$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(E_x\,,\,F_x)$ pour tout $\xi \neq 0$ (D'après cette définition le laplacien par exemple est 2-elliptique mais pas 3-elliptique !).

Considérons un opérateur P d'ordre $\leq m$ et m-elliptique. Pour tout $x \in X$ et tout $\xi \in T^*_x(X)$, $\xi \neq 0$, le symbole $P_m(x\,,\,\xi)$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(E_x\,,\,F_x)$, c'est-à-dire un isomorphisme de E_x sur F_x. Il serait souhaitable de pouvoir considérer E_x et F_x comme des fibres au-dessus du point $(x\,,\,\xi)$ (avec $\xi \neq 0$) et non pas au-dessus du point x. La notion d'image réciproque d'un espace fibré est faite pour cela. Désignons donc par $T^*_{\bullet}(X)$ l'espace des covecteurs tangents non nuls à X : chaque espace $T^*_x(X)$ est privé de son origine. Soit $h : T^*_{\bullet}(X) \to X$ l'application canonique qui à tout covecteur tangent en x fait correspondre son origine x. Si nous désignons par $\underset{\sim}{E} = h^*(E)$ et $\underset{\sim}{F} = h^*(F)$ les images réciproques correspondantes, alors ce seront deux espaces fibrés à base $T^*_{\bullet}(X)$, et $P_m(x\,,\,\xi)$ définira un isomorphisme de classe C^∞ de $\underset{\sim}{E}$ sur $\underset{\sim}{F}$. Remarquons que la fibre de $\underset{\sim}{E}$ (resp. $\underset{\sim}{F}$) au-dessus d'un point $(x\,,\,\xi) \in T^*_{\bullet}(X)$ est E_x (resp. F_x).

Il y a encore une façon d'exprimer ces choses. L'application $(x\,,\xi) \rightsquigarrow P_m(x\,,\,\xi)$ de $T^*(X)$ dans $\mathcal{L}(E\,,\,F)$ est un relèvement de l'application canonique $h : (x\,,\,\xi) \rightsquigarrow x$ de $T^*(X)$ sur X, tel que pour tout x fixe on ait un polynôme homogène de degré m en ξ. Or à ce relèvement il correspond une section de l'image réciproque $h^*(\mathcal{L}(E\,,\,F))$ qui,

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}(E\,,\,F) \arrow[d] \\ T^*(X) \arrow[ur] \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

à son tour, définit un morphisme de l'espace fibré $h^*(E)$ dans l'espace fibré $h^*(F)$. L'opérateur P est elliptique si et seulement si ce morphisme P_m induit, au-dessus de chaque covecteur $\xi \neq 0$, un isomorphisme de la fibre $\underset{\sim}{E}_{(x,\xi)} = E_x$ sur la fibre $\underset{\sim}{F}_{(x,\xi)} = F_x$; P_m est donc un isomorphisme d'espaces fibrés sur $T^*_{\bullet}(X)$: $\underset{\sim}{E} \to \underset{\sim}{F}$.

Remarquons finalement que le composé d'un opérateur p-elliptique et d'un opérateur q-elliptique est un opérateur $(p+q)$-elliptique. Le fait qu'un opérateur est m-elliptique ne dépend que de son symbole, il restera donc m-elliptique si l'on lui ajoute des termes d'ordre $< m$. S'il existe un opérateur elliptique $P : \mathcal{E}(X ; E) \to \mathcal{E}(X , F)$ alors $\underset{\sim}{E}$ et $\underset{\sim}{F}$ sont isomorphes : il n'existe pas des opérateurs elliptiques pour tout couple d'espace fibrés E et F.

4. Indices.

Soient A et B deux espaces vectoriels sur un corps quelconque et soit $u : A \to B$ une application linéaire. On dit que u admet un indice si son noyau $\operatorname{Ker} u$ a une dimension finie et son image $\operatorname{Im} u$ a une codimension finie, et si c'est le cas, alors on définit l'indice de u par

$$\chi(u) = \dim \operatorname{Ker} u - \operatorname{codim} \operatorname{Im} u \quad .$$

Comme la codimension de $\operatorname{Im} u$ est la même chose que la dimension du conoyau $\operatorname{Coker} u = B/\operatorname{Im} u$, on a aussi

$$\chi(u) = \dim \operatorname{Ker} u - \dim \operatorname{Coker} u \quad .$$

Remarquons qu'on désigne l'indice par la lettre χ qui est classiquement réservé à la caractéristique d'Euler-Poincaré. On peut en effet considérer $\chi(u)$ comme une caractéristique, car si on définit un complexe C par

$$0 \to 0 \to A \xrightarrow{u} B \to 0 \to 0 \to 0 \to \dots \quad ,$$

on aura $H_2(C) = \operatorname{Ker} u$, $H_3(C) = B/\operatorname{Im} u = \operatorname{Coker} u$ et $H_i(C) = 0$ pour $i \neq 2 , 3$. On a donc

$$\chi(C) = \sum_i (-1)^i \dim H_i(C) = \chi(u) \quad .$$

Dans la suite nous considérerons surtout le cas où A et B sont des espaces de Fréchet et u est continue. Si $\operatorname{Im} u$ est alors de codimension finie, il résulte d'un théorème de Banach que u est un homomorphisme et $\operatorname{Im} u$ fermée. Dans ce cas ${}^t u$ est un homomorphisme faible, il admet un indice et de plus $\operatorname{Im} {}^t u$ est faiblement fermé (BOURBAKI, E. V. T., chap. IV, § 4, exposé 5). On a aussi $\dim \operatorname{Ker} {}^t u = \dim \operatorname{Coker} u$, donc en particulier

$$\chi(u) = \dim \operatorname{Ker} u - \dim \operatorname{Ker} {}^t u \quad ;$$

et

$$\chi({}^t u) = - \chi(u) \quad .$$

Voici encore quelques propriétés de l'indice :

1° Si u et v admettent un indice, alors $u \circ v$ admet un indice et

$$\chi(u \circ v) = \chi(u) + \chi(v) \quad .$$

2° Si $u : A_1 \to B_1$ et $v : A_2 \to B_2$ admettent un indice, alors $u \oplus v : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2$ admet un indice et

$$\chi(u \oplus v) = \chi(u) + \chi(v) \quad .$$

3° $\chi(u \otimes I_m) = m\chi(u)$, si I_m désigne l'application identique d'un espace de dimension m sur lui-même.

4° (DIEUDONNÉ) Si A et B sont des espaces de Banach, alors les opérateurs qui admettent un indice forment un ensemble ouvert U dans l'espace normé $\mathcal{L}(A , B)$. On a $\chi(u + v) = \chi(u)$ pour tout v suffisamment petit (ATKINSON) et en particulier χ est constante sur chaque composante connexe de U .

5° Si A et B sont des Banach, et si u admet un indice et v est compact, alors $u + v$ admet le même indice.

6° Tout opérateur m-elliptique sur une variété compacte admet, en tant qu'opérateur de $\mathcal{E}(X ; E)$ dans $\mathcal{E}(X ; F)$, un indice qui ne dépend que du m-symbole de l'opérateur. Le but du séminaire est de démontrer cette propriété et de calculer l'indice.

BIBLIOGRAPHIE [sur l'indice]

[1] ATKINSON (F. V.). - La solvabilité normale des équations linéaires dans des espaces normés [en russe], Mat. Sbornik, N. S., t. 28, 1951, p. 3-14.

[2] AUDIN (Maurice). - Sur les équations linéaires dans un espace vectoriel, Publ. scient. Univ. Alger, Série A : Mathématiques, t. 4, 1957, p. 5-75 (Thèse Sc. math. Paris, 1957).

[3] DIEUDONNE (Jean). - Sur les homomorphismes d'espaces normés, Bull. Sc. math., t. 67, 1943, 1re partie, p. 72-84.

[4] GOKHBERG (I. C.) i KREJN (M. G.). - Osnovny polozenija o defektnykh cislakh i indeksakh linejnykh operatorov, Uspekhi mat. Nauk, t. 12, 1957, n° 2, p. 43-118.

[5] KATO (Tosio). - Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, J. Anal. math., Jérusalem, t. 6, 1958, p. 261-322.

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Homomorphismes et applications complètement continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 2472-2473.