Pierre Grisvard

Opérateurs à indice - lemme de compacité

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 12, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A12_0>

OPÉRATEURS À INDICE - LEMME DE COMPACITÉ

par Pierre GRISVARD.

1. Opérateurs linéaires à indice.

Nous supposerons pour fixer les idées, que tous les espaces vectoriels considérés ici ont $\mathbb{C}$ pour corps de base. E et F étant deux espaces vectoriels, nous noterons $\ell(E ; F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F.

On dit qu'un opérateur $u \in \ell(E ; F)$ admet un indice si $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Coker} u$ sont de dimension finie ; l'indice de u est alors la quantité

$$\chi(u) = \dim \operatorname{Ker} u - \dim \operatorname{Coker} u ,$$

c'est la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe

$$0 \to 0 \to E \xrightarrow{u} F \to 0 \to 0 \to \cdots$$

Si E et F sont de dimension finie, on a trivialement $E/\operatorname{Ker} u \simeq u(E)$, donc $\chi(u) = \dim E - \dim F$, quel que soit u.

Nous donnons pour commencer quelques propriétés algébriques de l'indice.

Si $u_0 \in \ell(E_0 ; F_0)$ et $u_1 \in \ell(E_1 ; F_1)$ sont deux opérateurs à indice, alors l'opérateur $u_0 \oplus u_1 \in \ell(E_0 \oplus E_1 , F_0 \oplus F_1)$ admet un indice donné par l'identité

$$\chi(u_0 \oplus u_1) = \chi(u_0) + \chi(u_1) .$$

Cette propriété est évidente ; on en déduit immédiatement que si $u \in \ell(E ; F)$ est un opérateur à indice et 1_G est l'identité d'un espace vectoriel G de dimension m, l'opérateur $u \otimes 1_G$ admet un indice et

$$\chi(u \otimes 1_G) = m\,\chi(u) .$$

La propriété suivante de l'indice est essentielle :

PROPOSITION 0. - *Soient* $u \in \ell(E ; F)$ *et* $v \in \ell(F ; G)$ *deux opérateurs à indice, alors l'opérateur* $v \circ u$ *admet un indice donné par l'identité*

$$\chi(v \circ u) = \chi(v) + \chi(u) .$$

Démonstration. - Il est immédiat que $v \circ u$ admet un indice ; pour le calculer, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "(1_E, u)"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "(v, 1_F)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \oplus F \arrow[r, "(v \circ u \oplus 1_F)"] \arrow[d, "u+(-1_F)"'] & G \oplus F \arrow[r] \arrow[d, "1_G+(-v)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "v"] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

<u>Explication</u> :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "(1_E, u)"] \\ E \oplus F \end{tikzcd} \quad \text{veut dire} \quad \begin{tikzcd} x \arrow[d] \\ (x\ ,\ u(x)) \end{tikzcd}$$

tandis que

$$\begin{tikzcd} E \oplus F \arrow[d, "u+(-1_F)"] \\ F \end{tikzcd} \quad \text{veut dire} \quad \begin{tikzcd} (x\ ,\ y) \arrow[d] \\ u(x) - y \end{tikzcd}$$

Le diagramme est commutatif et les colonnes sont exactes ;

$$\chi(u)\ ,\quad \chi(v \circ u \oplus 1_F) = \chi(v \circ u) \quad \text{et} \quad \chi(v)$$

sont les caractéristiques des trois complexes :

$$0 \to 0 \to E \to F \to 0 \to \dots$$

$$0 \to 0 \to E \oplus F \to G \oplus F \to 0 \to \dots$$

$$0 \to 0 \to F \to G \to 0 \to \dots$$

respectivement. On a donc l'identité

$$\chi(u) - \chi(v \circ u) + \chi(v) = 0$$

C. Q. F. D.

Les propositions suivantes sont relatives aux opérateurs à indice, continus dans les espaces de Fréchet et de Banach. De manière générale, si E et F sont deux espaces localement convexes, nous notons $\mathcal{L}(E\ ;\ F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E.

<u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Fréchet et</u> $u \in \mathcal{L}(E\ ;\ F)$ <u>un opérateur dont l'image est de codimension finie, alors</u> u <u>est un morphisme strict</u> (homomorphisme au sens de Banach), <u>et</u> $\operatorname{Im} u$ <u>est fermée</u>.

En effet si G désigne un supplémentaire (algébrique) de $\operatorname{Im} u$ dans F, l'opérateur $u + 1_G \in \mathcal{L}(E \times G\ ;\ F)$ est surjectif, c'est donc un morphisme strict (théorème de Banach); u est la restriction de $u + 1_G$ à $E \times \{0\}$ (identifié à E), c'est donc un morphisme strict, car $\operatorname{Ker}(u + 1_G) = \operatorname{Ker} u \times \{0\}$.

<u>Remarque</u>. - ${}^t u \in \mathcal{L}(F'\ ;\ E')$ est donc un morphisme strict pour les topologies faibles et $\operatorname{Ker} {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\circ$ (polaire de $\operatorname{Im} u$) et $\operatorname{Im} {}^t u = (\operatorname{Ker} u)^\circ$. Puisque, inversement, si u est un morphisme strict, $\operatorname{Im} u$ est fermée, donc $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} {}^t u)^\circ$, on en déduit que <u>pour qu'un opérateur</u> $u \in \mathcal{L}(E\ ;\ F)$ (E, F <u>espaces de Fréchet) admette un indice, il faut et il suffit que</u> u <u>soit un morphisme strict tel que</u> $\operatorname{Ker} u$ <u>et</u> $\operatorname{Ker} {}^t u$ <u>soient de dimension finie ; on a alors l'identité</u> :

$$\chi(u) = - \chi({}^t u) = \dim \operatorname{Ker} u - \dim \operatorname{Ker} {}^t u .$$

Dans la suite nous utiliserons la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> $u \in \ell(E\ ;\ F)$; <u>pour qu'il ait un indice, il faut et il suffit qu'il existe</u> $v \in \ell(F\ ;\ E)$ <u>tel que</u> $u \circ v - 1_F$ <u>et</u> $v \circ u - 1_E$ <u>soient des opérateurs de rang fini. Dans ce cas,</u> v <u>a aussi un indice, et</u>

$$\chi(v) = - \chi(u) .$$

<u>Il est possible de choisir</u> v <u>tel que</u> $u \circ v \circ u = u$ <u>et</u> $v \circ u \circ v = v$. <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont des Fréchets, et si</u> u <u>est continue,</u> v <u>peut être choisie continue</u>.

<u>Démonstration.</u> - Supposons d'abord que u ait un indice. Soit E_0 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors $u_0 = u|_{E_0}$ est un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$; nous noterons u_0^{-1} l'inverse de u_0. Soit P un projecteur de F sur $\operatorname{Im} u$, l'opérateur

$$v = u_0^{-1} \circ P$$

répond à la question.

L'image de $v \circ u - 1_E$ est en effet $\operatorname{Ker} u$, et l'image de $u \circ v - 1_F$ est

$\operatorname{Ker} P$, qui sont de dimension finie. Comme u est nul sur $\operatorname{Ker} u$, on en déduit que

$$u \circ v \circ u = u ,$$

et comme v est nul sur $\operatorname{Ker} P$, on a

$$v \circ u \circ v = v .$$

Si E et F sont des Fréchets, u_0 est un isomorphisme topologique, si E_0 est un supplémentaire topologique de $\operatorname{Ker} u$. Si on choisit P continu, v est alors continu.

Inversement, supposons qu'il existe $v \in \ell(F ; E)$ tel que $s = u \circ v - 1_E$ et $t = v \circ u - 1_F$ soient de rang fini ; montrons que u a un indice, et par conséquent aussi v . On a

$$\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v \circ u \subset \operatorname{Im} t$$

de dimension finie ;

$$\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} u \circ v = \operatorname{Im}(1_E + s)$$

et si $S = \operatorname{Ker} s$, on a $E/S \simeq \operatorname{Im} s$ de dimension finie, donc S est de codimension finie, or $1_E + s$ vaut 1 sur S , $\operatorname{Im}(1_E + s) \supset S$, donc est de codimension finie. u a donc bien un indice, et par suite v aussi. Le fait que

$$\chi(u) + \chi(v) = 0$$

résultera de la proposition 0 et de ce que $\chi(1_E + s) = 0$, donc de la proposition suivante :

PROPOSITION 1 bis. - <u>Si</u> w <u>est de rang fini de</u> E <u>dans</u> E , $1_E + w$ <u>a un indice nul</u>. <u>Si</u> $u \in \ell(E ; F)$ <u>a un indice et si</u> w <u>est de rang fini de</u> E <u>dans</u> F , $u + w$ <u>a un indice égal à celui de</u> u .

Soit en effet $G = \operatorname{Im} w$. Alors $1_E + w$ opère de G dans G , donc de E/G dans E/G ; en outre, on aura, comme pour la suite exacte de la page 12-02, puisque $0 \to G \to E \to E/G \to 0$ est exacte,

$$\chi(1 + w)_E = \chi(1 + w)_G + \chi(1 + w)_{E/G} .$$

Mais $\chi(1 + w)_G$ est nul, puisque G est de dimension finie ; d'autre part $1 + w$ est bijective de E/G sur lui-même (si en effet $e \in E$ est tel que $(1 + w)e \in G$, comme $we \in G$, on a $e \in G$, donc $1 + w$ est injective ; d'autre part, tout e peut s'écrire $- we + (1 + w)e$, donc il est dans $\operatorname{Im}(1 + w)$ modulo G , et $1 + w$ est surjective), donc $\chi(1 + w)_{E/G} = 0$, ce qui prouve la première partie de la proposition. Bien entendu, ceci achève de prouver la proposition 1. Pour achever la démonstration de la proposition 1 bis, considérons u ayant un indice, et soient v, déterminé dans la proposition 1, et w, de rang fini de E dans F. Alors $(u + w) \circ v - 1_E$ est encore de rang fini, donc $\chi(u + w) + \chi(v) = 0$, et $\chi(u + w) = \chi(u)$.

Rappelons un résultat bien connu dû à F. RIESZ :

LEMME. - <u>Soient</u> E <u>un espace de Banach et</u> $k \in \mathcal{L}(E , E)$ <u>un opérateur compact, alors</u> $1_E + k$ <u>admet un indice</u>. (Nous verrons plus loin que cet indice est nul.)

<u>Démonstration</u>. - Posons $u = 1_E + k$. Nous allons vérifier que u est un morphisme strict et que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} {}^t u$ sont de dimension finie. Sur $\operatorname{Ker} u$ l'identité est compacte pour la topologie induite par E, donc $\operatorname{Ker} u$ est de dimension finie ; de même $\operatorname{Ker} {}^t u$ est de dimension finie,,car ${}^t u = 1_{E'} + {}^t k$, et ${}^t k$ est compact. Pour vérifier que u est un morphisme strict, c'est-à-dire que $\operatorname{Im} u$ est fermée, on choisit un supplémentaire topologique E_o de $\operatorname{Ker} u$ dans E et on montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|x\| \leqslant C \, \|u(x)\|$$

pour tout $x \in E_o$. Si une telle inégalité n'avait pas lieu, on pourrait trouver une suite $\{x_n\}_{n=1,2,\dots} \subset E_o$, telle que $\|x_n\| = 1$, $n = 1, 2, \dots$ et $x_n + kx_n \to 0$ dans E pour $n \to +\infty$. Utilisant la compacité de k, on voit alors qu'il existe une suite extraite, notée $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$, telle que kx_n converge vers une limite, donc x_n converge vers une limite x, puisque $x_n + kx_n \to 0$; cette limite a les propriétés suivantes : $\|x\| = 1$, $x \in E_o$ et $x + kx = 0$ où $x \in \operatorname{Ker} u$, ce qui est impossible. L'inégalité est démontrée, le lemme également.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer les trois propriétés principales de l'indice dans les espaces de Banach.

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach et</u> $u \in \mathcal{L}(E ; F)$; <u>une condition (nécessaire et) suffisante pour que</u> u <u>admette un indice est qu'il existe</u> $v \in \mathcal{L}(F ; E)$ <u>tel que</u> $u \circ v - 1_F$ <u>et</u> $v \circ u - 1_E$ <u>soient des opérateurs compacts</u>.

<u>Démonstration</u>. - Un opérateur de rang fini étant compact, la nécessité résulte de la proposition 1. Il résulte du lemme précédent et des inclusions $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v \circ w$ et $\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} u \circ v$ que la condition est suffisante.

THÉORÈME 2. - Soient E et F deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{L}(E , F)$ un opérateur à indice ; alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u + w$ admette un indice et $\chi(u + w) = \chi(u)$ pour tout $w \in \mathcal{L}(E , F)$ tel que $\|w\| < \varepsilon$.

En d'autres termes, l'ensemble des opérateurs à indice est ouvert dans $\mathcal{L}(E ; F)$, et la fonction $u \rightsquigarrow \chi(u)$ est continue dans cet ensemble (c'est-à-dire constante sur chaque composante connexe).

Démonstration. - Soit v l'opérateur construit dans la proposition 1 ; nous posons $\varepsilon = \|v\|^{-1}$; alors les opérateurs $1_F + w \circ v$ et $1_E + v \circ w$ sont inversibles, et par conséquent admettent un indice nul. Nous avons

$$(u + w) \circ v = u \circ v + w \circ v = 1_F + s + w \circ v$$

où s est de rang fini. Comme $1_F + w \circ v$ est inversible, $1_F + w \circ v + s$ a un indice nul (proposition 1 bis) ; alors comme

$$\mathrm{Im}((u + w) \circ v) \subset \mathrm{Im}(u + w) \ ,$$

ce dernier est bien de codimension finie. De manière analogue, $\mathrm{Ker}(u + w)$ est de dimension finie, et $u + w$ a un indice. D'autre part, on a

$$\chi(u + w) + \chi(v) = 0 \ ,$$

et comme $\chi(u) + \chi(v) = 0$, on a

$$\chi(u + w) = \chi(u) \ .$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3. - Soient E et F deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{L}(E ; F)$ un opérateur à indice ; pour tout opérateur compact $k \in \mathcal{L}(E , F)$, $u + k$ admet un indice et $\chi(u + k) = \chi(u)$.

Démonstration. - Soit toujours v l'opérateur construit dans la proposition 1 , les opérateurs $(u + k) \circ v - 1_F$ et $v \circ (u + k) - 1_E$ sont compacts ; $u + k$ admet donc un indice (théorème 1). Ce résultat, appliqué à $u + tk$ pour tout $t \in [0 , 1]$, montre que u et $u + k$ sont homotopes dans l'ensemble des opérateurs de E dans F qui ont un indice ; on en déduit (théorème 2) que

$$\chi(u + k) = \chi(u) \ .$$

C. Q. F. D.

Remarque 1. - En particulier nous voyons que, pour $k \in \mathcal{L}(E , E)$ opérateur compact, $1_E + k$ a pour indice 0 .

Il est immédiat de vérifier que $u \in \mathcal{L}(E , F)$ admet un indice nul, si et seulement s'il existe $k \in \mathcal{L}(E , F)$ compact, tel que $u + k$ soit inversible.

Remarque 2. - Les théorèmes 1 et 3 sont encore vrais si on remplace Banach par Fréchet.

Remarque 3. - On peut interpréter les résultats précédents comme suit.

Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\underset{\sim}{C}$, où les morphismes sont les classes $\dot{u}$ d'opérateurs linéaires u modulo les opérateurs linéaires de rang fini. Alors un isomorphisme $\dot{u}$ dans la catégorie est une classe d'opérateurs à indice (" $\dot{u}$ est un isomorphisme" équivaut à "il existe un morphisme $\dot{v}$ tel que $\dot{u}\,\dot{v} = \dot{I}$ et $\dot{v}\,\dot{u} = \dot{I}$ ", ou, en relevant en u et v, " $uv - I$ et $vu - I$ sont de rang fini") ; en outre l'indice de tous les $u \in \dot{u}$ est le même, l'indice est une fonction définie sur l'ensemble des isomorphismes de la catégorie $\mathcal{E}$. Les seuls morphismes de $\mathcal{E}$ d'indice nul sont les classes $\dot{u}$ des applications linéaires bijectives u, c'est-à-dire des isomorphismes au sens habituel. On pourrait prendre aussi la catégorie $\mathcal{B}$ des Banach, avec pour morphismes les classes d'applications linéaires continues modulo les opérateurs linéaires compacts, et on aurait des résultats analogues.

2. Lemmes de compacité.

Voici pour commencer une extension du classique "critère de Rellich", aux espaces H^s :

Une condition (nécessaire et) suffisante pour qu'un ensemble Φ de fonctions de $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$ ayant leurs supports dans un compact fixe K de $\underset{\sim}{R}^n$, soit relativement compact dans $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$ est que Φ soit bornée dans $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$ et que

$$(\tau_h \varphi - \varphi) \to 0 \quad (^1)$$

dans $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$, pour $h \to 0$, uniformément pour $\varphi \in \Phi$.

Démonstation. - La nécessité de la condition est facile. Pour montrer que la condition est suffisante, on vérifie que Φ est précompacte dans H^s complet, donc relativement compacte. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, montrons qu'on peut recouvrir Φ à l'aide d'un nombre fini de boules de rayon ε dans $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(R^n)$ une fonction positive, nulle hors de la boule unité, et de masse totale 1; nous posons

$$\alpha_k(x) = k^n\, \alpha(kx) \qquad k = 1 , 2 , \ldots$$

---

(1) $\tau_h \varphi(x) = \varphi(x - h)$ pour x, $h \in \underset{\sim}{R}^n$.

La suite $\{\alpha_k\}$ est une suite "régularisante". Nous allons vérifier que, pour k assez grand, on a

$$\|\alpha_k \star \varphi - \varphi\|_s \leqslant \varepsilon/2$$

pour $\varphi \in \Phi$; vérifions d'abord que, pour $\varphi \in H^s(\underset{\sim}{R}^n)$ quelconque, on a

$$(\qquad \|\alpha_k \star \varphi - \varphi\|_s \leqslant \sup_{|y|\leqslant 1/k} \|\tau_y \varphi - \varphi\|_s \, .$$

Par densité, il suffit de prouver l'inégalité pour $\varphi \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$; dans ce cas, on déduit de l'identité :

$$[\alpha_k \star \varphi - \varphi] = \int_{|y|\leqslant 1/k} \alpha_k(y)\, [\tau_y \varphi - \varphi]\, dy$$

(intégrale vectorielle d'une fonction $\underset{\sim}{R}^n \to H^s(\underset{\sim}{R}^n)$) que

$$\|\alpha_k \star \varphi - \varphi\|_s \leqslant \int_{|y|\leqslant 1/k} \alpha_k(y)\, \|\tau_y \varphi - \varphi\|_s\, dy$$

$$\leqslant \sup_{|y|\leqslant 1/k} \|\tau_y \varphi - \varphi\|_s \, .$$

On applique cette inégalité à $\varphi \in \Phi$, en fixant k assez grand pour que l'on ait

$$\|\tau_y \varphi - \varphi\|_s \leqslant \varepsilon/2$$

pour $|y| \leqslant 1/k$, ce qui est possible d'après l'hypothèse.

On obtient alors

$$\|\alpha_k \star \varphi - \varphi\|_s \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad \varphi \in \Phi \, .$$

Pour cette valeur de k fixée, on considère l'ensemble

$$\Phi' = \{\alpha_k \star \varphi \; ; \; \varphi \in \Phi\}$$

Les fonctions de Φ' ont leurs supports dans le compact fixe

$$\{x + y \; ; \; x \in K \, , \; |y| \leqslant 1/k\}$$

et comme Φ est borné dans H^s , donc dans $\mathcal{D}'$, Φ' est borné dans $\mathcal{E}(\underset{\sim}{R}^n)$, donc dans $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$, donc relativement compact dans $\mathcal{D}(R^n)$ et a fortiori dans $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$. L'ensemble Φ' peut donc être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\leqslant \varepsilon/2$ dans $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$; les boules de même centre et de rayon ε recouvrent Φ .

De ce critère, on déduit que <u>tout ensemble</u> Φ <u>borné dans</u> $H^{s+\alpha}(\underset{\sim}{R}^n)$ $(\alpha > 0)$ <u>et formé de fonctions ayant leurs supports dans un compact fixe</u> K <u>de</u> $\underset{\sim}{R}^n$, <u>est relativement compact dans</u> $H^s(R^n)$

Un tel ensemble est évidemment borné dans $H^s(R^n)$, Nous allons vérifier qu'il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\|\tau_h \varphi - \varphi\|_s \leq C\, |h|^\alpha\, \|\varphi\|_{s+\alpha} \text{ pour toute } \varphi \in H^{s+1}(\underset{\sim}{R}^n) \;;$$

il suffit de vérifier l'inégalité pour $\varphi \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$, dans ce cas on écrit

$$\|\tau_h \varphi - \varphi\|_s^2 = \int |e^{-2\pi i\langle \xi, h\rangle} - 1|^2\, |\hat{\varphi}(\xi)|^2\, (1 + |\xi|^2)^s\, d\xi \;.$$

Quitte à réduire α , on peut le supposer ≤ 1 ; choisissant C_α telle que $|e^{-2\pi it} - 1| \leq C_\alpha\, |t|^\alpha$ pour tout t réel, on obtient

$$\begin{aligned}\|\tau_h \varphi - \varphi\|_s^2 &\leq C_\alpha^2\, |h|^{2\alpha} \int |\xi|^{2\alpha}\, |\hat{\varphi}(\xi)|^2\, (1 + |\xi|^2)^s\, d\xi \\ &\leq C_\alpha^2\, |h|^{2\alpha}\, \|\varphi\|_{s+\alpha}^2\end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité. Comme Φ est borné dans $H^{s+\alpha}(\underset{\sim}{R}^n)$, on en déduit l'existence d'une seconde constante $C' > 0$, telle que

$$\|\tau_h \varphi - \varphi\|_s \leq C'\, |h|^\alpha$$

pour $\varphi \in \Phi$ et par conséquent

$$\tau_h \varphi - \varphi \to 0$$

dans $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$ pour $h \to 0$, uniformément pour $\varphi \in \Phi$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du "critère de Rellich".

Les résultats précédents restent évidemment vrais lorsqu'on remplace les espaces $H^s(\underset{\sim}{R}^n)$ par $H^s(\underset{\sim}{R}^n ; E)$ pour E espace vectoriel <u>de dimension finie</u>. On en déduit, par cartes locales, le résultat, fondamental dans la suite :

THÉORÈME 4. - <u>Soient</u> X <u>une variété réelle de classe</u> C^∞ , <u>compacte et</u> E <u>un espace fibré à fibre vectorielle, de classe</u> C^∞ , <u>ayant pour base</u> X . <u>Pour tout</u> s <u>réel et tout</u> $\alpha > 0$, <u>l'injection de</u> $H^{s+\alpha}(X ; E)$ <u>dans</u> $H^s(X ; E)$ <u>est compacte.</u>