

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

JEAN CERF

## La nullité de $\pi_0(\text{Diff } S^3)$ . 3. Construction d'une section pour le revêtement $\mathfrak{R}$

*Séminaire Henri Cartan*, tome 15 (1962-1963), exp. n° 21, p. 1-25

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1962-1963\\_\\_15\\_\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A9_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LA NULLITÉ DE  $\pi_0(\text{Diff } S^3)$ .

3. CONSTRUCTION D'UNE SECTION POUR LE REVÊTEMENT  $\mathcal{R}$

par Jean CERF

1. Les sous-variétés de petite complexité.

Ce paragraphe est essentiellement consacré à construire le "démarrage" d'une section du revêtement  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire à construire une telle section pour les éléments de petite complexité. Au passage on démontrera deux résultats (1° des lemmes 2 et 6) qu'on a utilisés en [3] (§ 2, n° 3, lemmes  $\alpha$  et  $\beta$ ) pour la démonstration de la conjecture de Schönflies. Au n° 2, on démontrera un lemme qui sera utilisé au § 3.

1. Etude de  $\mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1$ .

Les notations utilisées sont celles de [3] (§ 1, n° 2).

Définition. - Soit  $F \in \mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1$ ; soit  $D$  la face horizontale de  $F$ ; si pour tout  $x \in D$ , la verticale de  $x$  coupe  $F - D$  transversalement et en un seul point, on dit que  $F$  est transversal aux verticales.

On note  $\mathcal{C}$  la partie de  $\mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1$  formée des éléments transversaux aux verticales.

LEMME 1. -  $\mathcal{C}$  est contenu dans l'image de  $\mathcal{E}_1/\mathcal{S}_1$ , et le revêtement  $\mathcal{R}$  admet une section continue  $\tau$  au-dessus de  $\mathcal{C}$ .

Démonstration. - Il est commode d'utiliser, au lieu du modèle  $M_1$ , la partie  $M_1^1$  de la boule unité de  $\mathbb{R}^3$  définie par  $z \geq 1/2$ ; (le choix d'un difféomorphisme de  $M_1$  sur  $M_1^1$ , par exemple  $\Theta|M_1$  (cf. [3], § 4, n° 5) permet d'identifier les espaces fonctionnels relatifs à  $M_1^1$  aux espaces analogues relatifs à  $M_1$ ). On note  $D_1$  la face horizontale de  $M_1^1$ .

Soit  $F \in \mathcal{C}$ ; soit  $D$  la face horizontale de  $F$ . Soit  $h$  un difféomorphisme de  $D_1$  sur  $D$ , compatible avec l'orientation induite par  $M_1^1$  sur  $D_1$  et celle induite par  $\hat{F}$  sur  $D$ . Par linéarité sur chaque verticale,  $h$  se prolonge en un difféomorphisme  $f$ , conservant l'orientation, de  $M_1^1$  sur  $\hat{F}$ . Puisque  $\pi_0(\text{Diff } D^2) = 0$ ,  $h$  est bien défini à une isotopie près; donc  $f$  est bien défini à une isotopie près.

LEMME 2.

1°  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$  est contenu dans l'image de  $\mathfrak{E}_1/\mathfrak{S}_1$ ,

2° Le revêtement  $\mathfrak{R}$  admet une section continue  $\sigma$  au-dessus de  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$ , telle que  $\sigma$  et  $\tau$  coïncident sur  $\mathfrak{C} \cap (\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$ .

Démonstration. - Soit  $F \in (\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$ ; tout plan horizontal coupant  $F$  assez près de son sommet définit une décomposition de  $F$  en deux éléments dont l'un appartient à  $\mathfrak{C}$ . Il en résulte que tout compact  $\mathfrak{K}$  de  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$  peut être déformé sur  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$  en une partie de  $\mathfrak{C}$ , de façon que  $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{C}$  reste dans  $\mathfrak{C}$  au cours de la déformation; d'où à la fois le 1° et le 2°.

COROLLAIRE. -  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)_{(0,0)}^0$  est contenu dans l'image de  $\mathfrak{E}_0/\mathfrak{S}_0$ , et le revêtement  $\mathfrak{R}$  admet une section continue  $\sigma$  au-dessus de  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)_{(0,0)}^0$ .

Démonstration. - Soit  $F \in (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)_{(0,0)}^0$ ; soit  $(A, B)$  une décomposition d'Alexander de  $F$ ; nécessairement  $A$  et  $B$  sont dans  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$ ; donc d'après le lemme 2 ci-dessus et [3] (§ 2, n° 3, lemme 2),  $F$  est dans l'image de  $\mathfrak{E}_0/\mathfrak{S}_0$ . En plus, deux telles décompositions peuvent être déformées continûment l'une dans l'autre, de sorte que si l'on pose :

$$\sigma(F) = \sigma(A) + \sigma(B) \quad ,$$

cette valeur est indépendante du choix particulier de la décomposition.

Le résultat suivant précise le 1° du lemme 2 :

LEMME 3. - Soient  $F$  et  $F'$  deux éléments de  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$ ; on suppose que les faces horizontales  $D$  et  $D'$  de  $F$  et  $F'$  d'une part, et leurs sommets  $s$  et  $s'$  d'autre part, sont dans le même plan horizontal. Il existe alors un difféomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que :

- a.  $g$  laisse la cote invariante ;
- b.  $g(F) = F'$  .

Démonstration. - Supposons que la cote de  $s$  soit 0 et que celle de  $D$  soit 1. On va construire un difféomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^2 \times ]-\infty, 1]$ , à support compact, vérifiant (a) et (b); (un tel difféomorphisme se prolonge sans difficulté en un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant (a) et, nécessairement, (b)). La construction de  $g$  se fait en deux temps :

1er temps. - On suppose que  $s$  et  $s'$  sont confondus à l'origine  $0$ ;  $F$  coïncide alors au voisinage de  $0$  avec le graphe d'une fonction  $f: \underline{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ , définie au voisinage de  $0$ , telle que :

$$(1) \quad f(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0 \quad ;$$

(2) la forme quadratique des dérivées secondes de  $f$  en  $0$  est définie positive.

Par une application classique de la formule de Taylor,  $f$  se met alors sous la forme :

$$(3) \quad f(x, y) = A(x, y) x^2 + 2B(x, y) xy + C(x, y) y^2$$

avec

$$(4) \quad A(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) (1-t) dt, \quad \text{etc.}$$

de sorte que, compte tenu de (2),  $AC - B^2$  et  $A$  sont positifs à l'origine ; on peut donc, au voisinage de  $0$ , écrire (3) sous la forme :

$$(5) \quad f(x, y) = \varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y) \quad ,$$

avec

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(x, y) = \frac{A(x, y) x + B(x, y) y}{|A(x, y)|^{1/2}} \\ \psi(x, y) = \left( \frac{A(x, y) C(x, y) - B^2(x, y)}{A(x, y)} \right)^{1/2} \end{cases} \quad .$$

Les équations (6) définissent un difféomorphisme laissant fixe  $0$ , d'un voisinage de  $0$  dans  $\underline{\mathbb{R}}^2$  sur un autre tel voisinage ; soit  $h_0$  un difféomorphisme de  $\underline{\mathbb{R}}^2$ , à support compact, coïncidant avec (6) sur un voisinage  $V$  de  $0$  ; posons

$$g_0(x, y, z) = (h_0(x, y), z)$$

$g_0$  applique la partie du graphe de  $f$  située au-dessus de  $V$  sur la partie du graphe de la fonction  $x^2 + y^2$  située au-dessus de  $g_0(V)$  ; puisque  $F$  et le graphe de  $f$  coïncident au voisinage de  $0$ , et ne rencontrent le plan  $\{z = 0\}$  qu'au point  $0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $g_0(F)$  et le graphe de la fonction  $x^2 + y^2$  coïncident pour  $z \leq \delta$ . De même à  $F'$  correspondent  $f'$ ,  $\delta'$  et un difféomorphisme  $g'_0$  ; soit  $\varepsilon = \inf(\delta, \delta')$ , la restriction de  $g_0^{-1} \circ g'_0$  à  $\{z \leq \varepsilon\}$  conserve la cote, et applique  $F \cap \{z \leq \varepsilon\}$  sur  $F' \cap \{z \leq \varepsilon\}$ .

2e temps. - Le choix d'un difféomorphisme de  $S^1$  sur  $F \cap \{z \leq \varepsilon/2\}$  permet (à l'aide des lignes de gradient de la fonction  $z$  sur  $F$ ) de définir un difféomorphisme  $k$  de  $S^1 \times [\varepsilon/2, 1]$  sur  $F \cap \{\varepsilon/2 \leq z \leq 1\}$ , conservant la cote. Soit  $\mathcal{L}$  le groupe des difféomorphismes de  $\underline{\mathbb{R}}^2$  à support dans un disque assez

grand ; l'application canonique :  $\mathcal{E} \rightarrow \text{Pl}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est localement différentiablement triviale (cf. [1], II, 2.4.4) ; or  $k$  s'identifie à un chemin différentiable dans  $\text{Pl}(S^1, \mathbb{R}^2)$  ; donc  $k$  peut se prolonger en un difféomorphisme  $g_1$  de  $\mathbb{R}^2 \times [\varepsilon/2, 1]$ , à support compact, conservant la cote. De même à  $F'$  on associe  $g'_1$  ;  $g'_1 \circ g_1^{-1}$  conserve la cote et applique  $F \cap \{\varepsilon/2 \leq z \leq 1\}$  sur la partie correspondante de  $F'$  ; il n'est pas difficile de modifier ce difféomorphisme de façon qu'il se recolle avec  $g_0^{-1} \circ g_0$  le long de  $\{z = \varepsilon/2\}$ .

COROLLAIRE. - Soit  $F \in (\mathcal{S}_1/\mathcal{K}_1)_{(0,0)}^0$  ; on note  $D$  la façon horizontale de  $F$ . On note  $\mathcal{X}$  le sous-espace de  $(\mathcal{S}_1/\mathcal{K}_1)_{(0,0)}^0$  formé des éléments  $F'$  dont la face horizontale est confondue avec  $D$ , et dont la seconde face  $\overline{F'} - D$  est tangente à  $\overline{F} - D$  le long de  $\partial D$ , et située du même côté de  $D$ . Soient  $F'$  et  $F''$  deux éléments de  $\mathcal{X}$  ; soit  $V$  un voisinage arbitraire de  $\widehat{F'} \cup \widehat{F''}$ . Il existe un chemin continu :  $t \rightarrow F_t$ , joignant  $F'$  à  $F''$  dans  $\mathcal{X}$ , tel que  $F_t \subset V$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Démonstration. - On peut évidemment se borner au cas où  $F'' = F$ . Soit  $g$  un difféomorphisme "horizontal" de  $\widehat{F}$  sur  $\widehat{F'}$ , donné par le lemme 3 ; en modifiant  $g$  par une isotopie horizontale de  $\mathbb{R}^3$  (dont le support peut être choisi dans un voisinage arbitrairement petit de  $D$ ) on se ramène au cas où il existe un voisinage  $W$  de  $D$  sur lequel  $g$  se réduit à l'identité. Il existe, dans la partie de  $\mathcal{X}$  formée des éléments contenus dans  $\widehat{F}$ , un chemin  $\alpha$  d'origine  $F$ , d'extrémité  $F_1$  contenue dans  $W$  ; (d'après le lemme 3, il suffit de montrer ceci dans le cas où  $F = M_1^1$ , cas très simple où l'on est ramené à une propriété des fonctions réelles d'une variable). Le transmué  $\beta$  de  $\alpha$  par  $g$  est un chemin d'origine  $F'$  et d'extrémité  $F_1$  dans la partie de  $\mathcal{X}$  formée des éléments contenus dans  $\widehat{F'}$  ; il suffit donc de composer  $\alpha$  avec l'opposé de  $\beta$ .

## 2. Application à la suppression des singularités primitives.

Définition. - Soit  $F$  une sous-variété différentiable de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$  (éventuellement avec bord) ; un couple  $(c, s)$  de singularités de Morse de la fonction cote sur  $F$  est dit primitif si  $c$  est un col et  $s$  un sommet, et si les conditions suivantes sont remplies :

1° Si  $P$  désigne le plan horizontal de  $c$ ,  $P \cap F$  contient une "boucle"  $L$  de sommet  $s$  (c'est-à-dire une courbe fermée sans point double, différentiable sauf en  $s$ , où elle présente un point anguleux).

2°  $L$  est contenu dans  $F - \partial F$ , et borde sur  $F$  un disque topologique  $D_F$ , sur lequel la cote n'a pas d'autre singularité que  $c$  et  $s$ .

3° Si  $D_P$  désigne l'enveloppe de  $L$  dans son plan, on a  $D_P \cap F = L$ .

Remarques.

1° D'après la condition 3°,  $D_P$  a en  $s$  un angle saillant.

2°  $D_P \cup D_F$  est homéomorphe à  $S^2$ , donc son enveloppe  $\widehat{D_P \cup D_F}$  est homéomorphe à  $D^3$ .

3° Il existe des éléments de  $(\mathfrak{S}_0/\mathcal{K}_0)^0$  non triviaux (c'est-à-dire ayant au moins un col) sur lesquels il n'y a aucun couple primitif; ce fait ne peut se produire que pour des éléments ayant au moins trois cols.

LEMME 4. - Soient  $F$ ,  $c$ ,  $s$ ,  $L$ ,  $D_F$  et  $D_P$  comme ci-dessus. Soit  $V$  un voisinage suffisamment petit de  $\widehat{D_P \cup D_F}$ ; il existe dans l'espace des sous-variétés de  $\mathbb{R}^3$  difféomorphes à  $F$  un chemin  $t \rightarrow F_t$ , d'origine  $F$ , ayant les propriétés suivantes :

1°  $F_t \cap (\mathbb{R}^3 - V)$  ne dépend pas de  $t$ ;

2° Il existe  $t_1 \in ]0, 1[$  tel que  $F_t \cap V$  ait (pour la fonction cote) deux singularités pour  $t < t_1$ , toutes deux du type de Morse; une seule singularité, du type  $x^2 + y^3$ , pour  $t = t_1$ ; et aucune singularité pour  $t > t_1$ .

3° Pour  $t \in ]0, t_1[$ , la cote du col de  $F_t \cap V$  reste arbitrairement voisine de celle de  $c$ .

Démonstration. - Soient  $F$  et  $F'$  deux surfaces présentant chacune un couple primitif; on suppose que  $c$  et  $c'$  sont confondus en  $0$ ; on peut même, d'après la remarque 1° ci-dessus, se ramener par un difféomorphisme horizontal de  $\mathbb{R}^3$  au cas où les boucles  $L$  et  $L'$  sont confondues; enfin on se ramène par une affinité au cas où  $s$  et  $s'$  ont la même cote. Je dis que, dans ces conditions, il existe un difféomorphisme horizontal de  $\mathbb{R}^3$ , laissant fixe  $L$ , qui applique un voisinage de  $D_F$  dans  $F$  sur un voisinage de  $D_{F'}$  dans  $F'$ .

En effet,  $F$  coïncide au voisinage de  $0$  avec le graphe d'une fonction  $f$ , qu'on peut mettre sous la forme (3) ci-dessus; cette fois  $AC - B^2$  est négatif à l'origine, et, pour un choix convenable des axes, il en est de même de  $A$ ; de sorte que,  $\varphi$  et  $\psi$  étant toujours donnés par les formules (6), on peut écrire (3) au voisinage de  $0$  sous la forme :

$$(5') \quad f(x, y) = -\varphi^2(x, y) + \psi^2(x, y) \quad .$$

Il existe donc un difféomorphisme horizontal de  $\underline{\mathbb{R}}^3$  qui, au voisinage de 0, applique  $F$  sur le graphe de la fonction  $-x^2 + y^2$ . Le même raisonnement s'applique à  $F'$ ; il existe donc un difféomorphisme horizontal  $g$  de  $\underline{\mathbb{R}}^3$ , qu'on peut choisir laissant fixe  $L$ , qui, au voisinage de 0, applique  $F$  sur  $F'$ ; en composant  $g$  avec un difféomorphisme horizontal convenable de  $\underline{\mathbb{R}}^3$ , on obtient un difféomorphisme horizontal qui laisse fixe  $L$  et applique un voisinage de  $L$  dans  $F$  sur un voisinage de  $L$  dans  $F'$ ; il suffit alors d'appliquer le lemme 2 pour établir l'assertion ci-dessus.

Ce qui précède montre qu'on peut se borner à démontrer le lemme pour une surface  $F$  particulière. On choisit pour  $F$  le graphe de la fonction  $f(x, y) = y^3 + y^2 - x^2$ , et pour  $V$  un voisinage arbitraire de  $\widehat{D_P \cup D_F}$ . La déformation cherchée peut alors être définie explicitement comme suit. Soit  $\varepsilon > 0$ , suffisamment petit, soit  $h$  une fonction  $\underline{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$  telle que :

$$y^3 + y^2 - h(y) \text{ soit négatif pour } y \in ]-1 - \varepsilon, \varepsilon[ \text{, nul ailleurs ;}$$

$$h'(y) > 0 \text{ pour tout } y ;$$

$$h''(-\frac{1}{3}) = 0 ; h''(y) \neq 0 \text{ pour } y \neq -\frac{1}{3} .$$

Soit  $k$  une fonction analogue à  $h$ , mais relative à  $2\varepsilon$ , et telle que :

$$k(y) < h(y) \quad \text{pour } y \in [-1 - \varepsilon, \varepsilon] .$$

Soit, pour  $b > 0$  et  $a < b$ ,  $\chi_{a,b}$  une famille de fonctions différentiables  $\underline{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ , dépendant différentiablement de  $(a, b)$ , telles que :

$$\chi_{a,b}(x) = x^2 \text{ dès que } x^2 \geq b \text{ ou } a = 0 \quad ;$$

$$\chi_{a,b}(0) = a \text{ pour tout } (a, b) \quad ;$$

$$\chi'_{a,b}(0) = 0 ; \chi'_{a,b}(x) \neq 0 \text{ pour } x \neq 0 \quad ;$$

$$\chi''_{a,b}(0) \neq 0 \quad .$$

On pose :

$$f_t(x, y) = y^3 + y^2 + \chi_{t(y^3+y^2-h(y)), y^3+y^2-k(y)}(x) \quad .$$

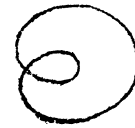
On peut prendre pour  $F_t$  le graphe de  $f_t$ . En effet, le 1° est vérifié dès que  $\varepsilon$  est assez petit; le 2° résulte du fait que les points singuliers de la fonction cote sur  $F_t \cap V$  sont les points à tangente horizontale du graphe de la fonction  $th(y) + (1-t)(y^3 + y^2)$ ; un calcul de dérivée immédiat montre que la cote de ces points est fonction décroissante de  $t$ ; donc en particulier la cote du col reste comprise entre  $-(\varepsilon^3 + \varepsilon^2)$  et 0; d'où le 3°.

### 3. Etude de $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^{\circ}(1,0)$ .

Soit  $F \in (\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^{\circ}(1,0)$  ; soit  $c$  le col de  $F$  ; soit  $P$  le plan horizontal de  $c$  ;  $P \cap F$  est une courbe différentiable connexe avec un point de self-intersection transversale. La classification de ces courbes (relativement aux difféomorphismes du plan) est immédiate, il y a deux types possibles :



type I



type II .

Si  $F'$  est un élément de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^{\circ}(1,0)$  voisin de  $F$ ,  $P \cap F'$  est une courbe voisine de  $P \cap F$ . [On peut en effet se ramener au cas où  $c$  et  $c'$  sont confondus en  $0$  ; l'intersection de  $F$  et  $F'$  avec  $P$  étant transversale sauf en  $0$ , il suffit d'étudier le voisinage de ce point ; or il résulte des formules (4) et (6) ci-dessus qu'on peut mettre  $F$  sous forme canonique au voisinage de  $0$  par un difféomorphisme local conservant la cote, et dépendant continûment de  $F$ .] De ceci résulte en particulier que si  $F$  et  $F'$  sont dans la même composante connexe de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^{\circ}(1,0)$ ,  $P' \cap F'$  est du même type que  $P \cap F$ . D'autre part on montre sans difficulté (en procédant comme dans la démonstration du lemme 4) que si  $P \cap F$  et  $P' \cap F'$  sont du même type, et si les demi-normales à  $F$  (resp.  $F'$ ) en  $c$  (resp.  $c'$ ), sortantes relativement à  $\hat{F}$  (resp.  $\hat{F}'$ ) sont dirigées dans le même sens,  $F$  et  $F'$  sont dans la même composante connexe de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^{\circ}(1,0)$  ; cet espace a donc quatre composantes connexes ; par symétrie, on se ramène à étudier les deux composantes définies comme suit :

- type  $\alpha$  :  $P \cap F$  est du type I, et la demi-normale sortante en  $c$  est dirigée vers le haut ;

- type  $\beta$  :  $P \cap F$  est du type II, et la demi-normale sortante en  $c$  est dirigée vers le bas.

**LEMME 5.** - Soit  $\mathcal{Q}$  le sous-espace de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^{\circ}(1,0)$  formé des éléments  $F$  tels qu'en aucun point de  $P \cap F$  le plan tangent à  $F$  ne soit vertical. Tout compact  $\mathcal{K}$  de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^{\circ}(1,0)$  peut être déformé sur  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^{\circ}(1,0)$  en une partie de  $\mathcal{Q}$ , de façon que  $\mathcal{K} \cap \mathcal{Q}$  reste dans  $\mathcal{Q}$  au cours de la déformation.



Démonstration. -- On se ramène immédiatement à ne considérer que les éléments dont le col  $s$  est en  $0$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on note  $D_\varepsilon$  le 2-disque horizontal de centre  $0$ , de rayon  $\varepsilon$ . Pour tout  $F \in \mathcal{K}$  et tout  $u \in P \cap F$  (distinct de  $0$ ), on choisit, dans le plan normal en  $u$  à  $P \cap F$ , le repère constitué de la demi-normale horizontale  $\nu$  en  $u$  à  $P \cap F$  (orientée vers l'intérieur de  $\hat{F}$  si  $F$  est du type  $\alpha$ , vers l'extérieur si  $F$  est du type  $\beta$ ) et de la verticale ascendante. On note  $\alpha(u)$  l'angle (compris entre  $0$  et  $\pi$ ) de  $\nu$  et de la ligne de pente (orientée vers le haut) du plan tangent en  $u$  à  $F$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , assez petit pour que, pour tout  $F \in \mathcal{K}$ , il n'y ait aucun point de  $D_\varepsilon \cap F$  où le plan tangent à  $F$  soit vertical. Soit  $\eta > 0$ , assez petit pour que, pour tout  $F \in \mathcal{K}$ ,  $F \cap (P - D_{\varepsilon/2})$  admette dans  $P$  un voisinage tubulaire de rayon  $\eta$ , qu'on note  $T_{F,\eta}$ . Soit  $\delta$  tel que :

$$0 < \delta/\eta < \inf_{\substack{F \in \mathcal{K}; i=1,2; \\ u \in F \cap (P - D_{\varepsilon/2})}} \operatorname{tg} \frac{\alpha(u)}{i} .$$

Soient :  $\rho$  une fonction différentiable :  $P \rightarrow [0, 1]$ , nulle au voisinage de  $D_{\varepsilon/2}$ , égale à  $1$  en dehors de  $D_\varepsilon$  ;

$\omega$  une fonction différentiable  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , égale à  $1$  au voisinage de  $0$ , nulle en dehors de  $[-\delta, +\delta]$  ;

$\varphi_{a,b}$  (pour  $a$  et  $b \in [-\eta, +\eta]$ ) un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$ , dépendant différentiablement du couple  $(a, b)$ , se réduisant à l'identité en dehors de  $[-\eta, +\eta]$ , tel que

$$\varphi_{a,b}(a) = b .$$

A tout  $F \in \mathcal{K}$  on associe l'isotopie horizontale  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^3$  définie comme suit :  $\gamma$  laisse fixe le complémentaire de  $T_{F,\eta} \times [-\delta, +\delta]$  ; et pour  $u \in F \cap (P - D_{\varepsilon/2})$ ,  $|v| \leq \eta$  et  $|z| \leq \delta$ , l'image par  $\gamma_t$  du point de coordonnées  $(v, z)$  du plan normal en  $u$  à  $P \cap F$  est le point de ce plan dont les coordonnées sont :

$$(v + t\rho(u) \omega(z)(\varphi_{a,b}(v) - v), z)$$

avec :

$$a = z/\operatorname{tg} \alpha(u) ; \quad b = z/\operatorname{tg} \frac{\alpha(u)}{2} .$$

La déformation définie par :  $(F, t) \rightarrow \gamma_t(F)$  a les propriétés voulues.

LEMME 6.

1°  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{K}_0)^{\circ}(1,0)$  est contenu dans l'image de  $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}_0$ .

2° Le revêtement  $\mathfrak{R}$  admet une section continue au-dessus de  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{K}_0)^{\circ}(1,0)$ .

Démonstration. - On s'occupe successivement des éléments du type  $\alpha$  et du type  $\beta$ ; dans chaque cas il suffit, d'après le lemme 5, de considérer les éléments qui appartiennent au sous-espace  $\mathfrak{Q}$ .

Type  $\alpha$ . - Soit  $F \in \mathfrak{Q}$ , de type  $\alpha$ . On considère deux plans horizontaux  $P_+$  et  $P_-$ , voisins du plan horizontal  $P$  du col;  $P_+$ , situé au-dessus du col, coupe  $F$  suivant deux cercles  $C_1$  et  $C_2$ ;  $P_-$ , situé au-dessous du col, coupe  $F$  suivant un cercle  $C_3$ . Pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $C_i$  borde un disque horizontal  $D_i$ ;  $D_i$  est contenu dans  $\hat{F}$ , et coupe par conséquent  $\hat{F}$  en deux parties; on note  $A_i$  celle qui ne contient pas le col;  $A_1, A_2, A_3$  sont disjoints; ce sont d'après le 1° du lemme 2 des éléments de  $\mathfrak{E}_1/\mathfrak{S}_1$ ; on note :

$$\hat{F} = \bigcup_{i=1,2,3} \overset{\circ}{A}_i = B \quad .$$

Puisque  $F \in \mathfrak{Q}$ , il existe, dès que  $P_+$  est assez voisin de  $P$ , un élément  $A'_i$  ( $i = 1, 2$ ) de  $\mathfrak{C}$  [cf. n° 1; on identifie ici  $\mathfrak{C}$  à son image dans  $\mathfrak{E}_1/\mathfrak{S}_1$ ] dont la face horizontale soit  $D_i$ , et dont la seconde face soit située au-dessus de  $D_i$  et se raccorde à  $F$  le long de  $C_i$ . Si  $P_-$  est assez voisin de  $P$ ,  $B \cup A'_1 \cup A'_2$  est un élément de  $\mathfrak{C}$ ; donc  $B \cup A'_1 \cup A'_2 \cup A_3$  est un élément de  $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}_0$ , donc également  $\hat{F}$ , qui lui est difféomorphe.

Les valeurs de  $\sigma(A_1), \sigma(A_2), \sigma(A_3)$  étant données par le lemme 2, et celles de  $\tau(A'_1), \tau(A'_2), \tau(B \cup A'_1 \cup A'_2)$  par le lemme 1, on pose successivement :

$$\begin{aligned} \sigma(B \cup A'_1 \cup A'_2 \cup A_3) &= \tau(B \cup A'_1 \cup A'_2) + \sigma(A_3) \quad ; \\ \sigma(B \cup A_3) &= (\sigma(B \cup A'_1 \cup A'_2 \cup A_3) - \tau(A'_1)) - \tau(A'_2) \quad ; \\ \sigma(\hat{F}) &= (\sigma(B \cup A_3) + \sigma(A_1)) + \sigma(A_2) \quad . \end{aligned}$$

Il résulte de l'associativité de l'addition dans  $\mathfrak{R}$  (cf. [3], proposition 3) que l'on obtiendrait le même résultat en permutant le rôle des indices 1 et 2. Il résulte de la continuité de l'addition dans  $\mathfrak{R}$  que la valeur de  $\sigma(\hat{F})$  ainsi obtenue est indépendante du choix particulier de  $A'_1$  et  $A'_2$ , car on peut par exemple passer continûment de  $A'_1$  à tout élément analogue  $\tilde{A}'_1$ . Egalement par raison de continuité, la valeur de  $\sigma(\hat{F})$  ne dépend pas du choix particulier des plans  $P_+$  et  $P_-$ . Enfin il est immédiat que la section ainsi définie est continue.

Type  $\beta$  . - Soit  $F \in \mathcal{Q}$  , de type  $\beta$  . On considère cette fois trois plans horizontaux  $P_+$  ,  $P_{++}$  et  $P_-$  , voisins du plan  $P$  , l'ordre par cotes croissantes étant :  $P_-$  ,  $P$  ,  $P_+$  ,  $P_{++}$  . Le plan  $P_+$  (resp.  $P_{++}$  ) coupe  $F$  suivant deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  (resp.  $C_3$  et  $C_4$  ) ;  $P_-$  coupe  $F$  suivant un cercle  $C_5$  . Pour  $i = 1, \dots, 5$  ,  $C_i$  borde un disque horizontal  $D_i$  ; on choisit les notations de façon que  $D_1 \subset D_2$  et  $D_3 \subset D_4$  . Le disque  $D_1$  est extérieur à  $\hat{F}$  , et définit avec l'une des parties en lesquelles  $C_1$  coupe  $F$  , un élément de  $\mathcal{E}_1/\mathcal{S}_1$  qu'on note  $A_1$  . Le disque  $D_5$  coupe  $\hat{F}$  en deux parties, on note  $A_5$  celle qui ne contient pas le col. Si  $P_+$  et  $P_-$  sont assez voisins de  $P$  , on peut définir des éléments  $A_1^!$  et  $A_5^!$  de  $\mathcal{C}$  (analogues aux éléments  $A_1^!$  et  $A_2^!$  définis précédemment) ; en plus, on choisit  $A_1^!$  de façon qu'il soit entièrement en-dessous de  $P_{++}$  . Le disque  $D_4$  coupe  $(\hat{F} \cup A_1) - A_1^!$  en deux parties ; on note  $A_4$  celle qui ne contient pas le col. On note :

$$(\hat{F} \cup A_1) - (A_4 \cup A_5) = B \quad .$$

Si  $P_{++}$  a été choisi assez voisin de  $P$  ,  $(B - A_1^!) \cup A_5^!$  est un élément de  $\mathcal{C}$  ; donc  $(B - A_1^!) \cup A_5^! \cup A_4$  est un élément de  $\mathcal{E}_0/\mathcal{S}_0$  ; donc également  $\hat{F}$  , qui lui est difféomorphe.

On pose successivement :

$$\begin{aligned} \sigma((B - A_1^!) \cup A_5^! \cup A_4) &= \tau((B - A_1^!) \cup A_5^!) + \sigma(A_4) & ; \\ \sigma(B \cup A_4) &= (\sigma((B - A_1^!) \cup A_5^! \cup A_4) + \tau(A_1^!)) - \tau(A_5^!) & ; \\ \sigma(\hat{F}) &= (\sigma(B \cup A_4) - \sigma(A_1^!)) + \sigma(A_5) & . \end{aligned}$$

Propriétés de la section construite au lemme 6.

1° La construction faite ci-dessus (dans le cas du type  $\alpha$  ) s'applique aussi au cas où deux sommets de  $F$  sont au même niveau. Il en résulte que la section  $\sigma$  peut se prolonger continûment à la partie de  $(\mathcal{F}/\mathcal{K}_0)^1$  formée des éléments ayant un col, et dont deux des trois sommets sont au même niveau.

2° La section  $\sigma$  , définie sur  $(\mathcal{F}/\mathcal{K}_0)_{(0,0)}^0$  par le corollaire du lemme 2, et sur  $(\mathcal{F}/\mathcal{K}_0)_{(1,0)}^0$  par le lemme 6, peut se prolonger par continuité aux points de  $(\mathcal{F}/\mathcal{K}_0)^1$  ayant 0 col et un point critique non de Morse.

Ceci se démontre à l'aide du lemme suivant qui est une conséquence immédiate de la proposition 7 de [2] :

LEMME 7. - Soient  $\mathcal{A}$  un ouvert de  $(\mathcal{F}/\mathcal{K}_0)^0$  et  $\mathcal{B}$  un ouvert de  $(\mathcal{F}/\mathcal{K}_0)^1$  tels que  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  soit un voisinage de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{F}/\mathcal{K}_0$  . Soit  $\sigma$  une section

partielle continue de  $\mathcal{R}$ , donnée au-dessus de  $\mathcal{A}$ . Soit  $F \in \mathcal{B}$ ; s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $F$  dans  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  tel que  $\sigma$  puisse se prolonger en une section continue au-dessus de  $\mathcal{A} \cup \mathcal{V}$ , on dit simplement que  $\sigma$  est continue en  $F$ .

1° Si  $\sigma$  est continue en tout point  $F \in \mathcal{B}$ ,  $\sigma$  peut être prolongée par continuité à  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ .

2° S'il existe un chemin  $\alpha$  dans  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  traversant  $\mathcal{B}$  en  $F$  pour  $t = 1/2$ , tel que  $\sigma \circ \alpha$  puisse être prolongé en une fonction continue au voisinage de  $t = 1/2$ , alors  $\sigma$  est continue en  $F$ .

3° Si  $\sigma$  est continue en un point  $F'$  situé dans la composante connexe de  $F$  dans  $\mathcal{B}$ , alors  $\sigma$  est continue en  $F$ .

Le lemme 7 s'applique ici comme suit. Soit  $F$  un élément de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$  ayant 0 col, et un point critique non de Morse, qu'on note  $e$ . On suppose par exemple que la normale à  $F$  en  $e$ , sortante par rapport à  $\hat{F}$ , est dirigée vers le haut, et que (à un difféomorphisme horizontal près)  $F$  coïncide au voisinage de  $e$  avec le graphe de la fonction  $z = -x^2 + y^3$ ; les points de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^0$  assez voisins de  $F$  sont alors du type  $\alpha$ . Soit  $P$  le plan horizontal de  $e$ ; on peut déformer  $F$ , par une isotopie horizontale laissant fixe un voisinage de  $e$ , en un élément  $F'$  de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$  tel qu'en aucun point de  $P \cap F'$  le plan tangent à  $F'$  ne soit vertical. D'après le 3° du lemme 7, il suffit de vérifier au point  $F'$  la condition du 2° de ce lemme. Soient  $P_+$  et  $P_-$  deux plans horizontaux situés, le premier au-dessus, le second au-dessous de  $P$ ; on note  $P_+ \cap \hat{F}' = D_1$ ;  $P_- \cap \hat{F}' = D_2$ ; on note respectivement  $A_1$ ,  $B$  et  $A_2$  les adhérences des parties de  $\hat{F}'$  situées au-dessus de  $P_+$ , entre  $P_+$  et  $P_-$ , en-dessous de  $P_-$ . Si  $P_+$  est assez voisin de  $P$ , il existe un élément  $A'_1$  de  $\mathcal{C}$ , situé au-dessus de  $D_1$ , se raccordant avec  $F'$  le long de  $\partial D_1$ . Soit  $V$  un voisinage de  $e$  situé entre  $P_+$  et  $P_-$ ; soit  $t \rightarrow F'_t$  un chemin traversant  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$  en  $F'$  pour  $t = 1/2$ , tel que  $F'_t \cap (\mathbb{R}^3 - V)$  soit indépendant de  $t$ ;  $\hat{F}'_t$  est de la forme :

$$\hat{F}'_t = A_1 \cup B_t \cup A_2 \quad \text{avec} \quad B_{1/2} = B \quad ;$$

posons :

$$\hat{F}''_t = A'_1 \cup B_t \cup A_2 \quad .$$

Le chemin  $t \rightarrow F''_t$  traverse  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$  pour  $t = 1/2$ . Si l'on a choisi  $P_-$  assez voisin de  $P$ ,  $A'_1 \cup B$  est un élément de  $\mathcal{C}$ , donc  $A'_1 \cup B_t$  est un élément de  $\mathcal{C}$  pour  $t$  assez voisin de  $1/2$ . Donc, par construction de la section  $\sigma$  sur  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^0_{(0,0)}$  et sur  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^0_{(1,0)}$ , on a, pour tout  $t$  assez voisin de  $1/2$ , et différent de  $1/2$  :

$$\sigma(F_t'') = \tau(A_1' \cup B_t) + \sigma(A_2) \quad .$$

La fonction  $t \rightarrow \sigma(F_t'')$  peut donc se prolonger en une fonction continue sur tout un voisinage de la valeur  $1/2$ . Il en est donc de même, d'après la continuité de l'addition dans  $\mathbb{R}$ , de la fonction  $t \rightarrow \sigma(F_t')$ .

Enfin, les résultats des numéros 1 et 3 du présent paragraphe peuvent se résumer comme suit : grâce au 1° des lemmes 2 et 6, la conjecture de Schönflies est complètement établie pour toutes les variétés dont l'arrondi est difféomorphe à  $D^3$  (cf. [3], § 2, corollaire 1 de la proposition 1) ; - comme d'autre part le lemme 4 de [2] s'étend sans difficulté à ces variétés, l'espace  $\mathbb{E}_k/\mathbb{S}_k$  et l'espace  $\mathbb{F}_k/\mathbb{K}_k$  relatifs au modèle  $M_k$  (cf. [3], § 1, n° 2) sont canoniquement homéomorphes pour  $k = 0, 1, \dots, 5$ . Les résultats concernant l'existence de sections partielles pour le revêtement  $\mathbb{R}$  peuvent donc s'exprimer indifféremment en termes de l'espace  $\mathbb{E}/\mathbb{S}$  ou de l'espace  $\mathbb{F}/\mathbb{K}$  (somme topologique des espaces  $\mathbb{F}_k/\mathbb{K}_k$  pour  $k = 0, 1, \dots, 5$ ) ; dans toute la suite, on conservera le point de vue  $\mathbb{F}/\mathbb{K}$  ; ce qu'on a établi jusqu'à présent dans cette voie est rassemblé dans la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Le revêtement  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}/\mathbb{K}$  admet au-dessus de  $(\mathbb{F}_1/\mathbb{K}_1)_{(0,0)}^0 \cup (\mathbb{F}_0/\mathbb{K}_0)_{(0,0)}^0 \cup (\mathbb{F}_0/\mathbb{K}_0)_{(1,0)}^0$  une section  $\sigma$  continue, additive, c'est-à-dire telle que, pour tout  $F \in (\mathbb{F}_0/\mathbb{K}_0)_{(0,0)}^0$  et pour toute décomposition d'Alexander de  $F$  en deux éléments  $A$  et  $B$  de  $(\mathbb{F}_1/\mathbb{K}_1)_{(0,0)}^0$ , on ait :

$$\sigma(F) = \sigma(A) + \sigma(B)$$

et vérifiant les conditions suivantes :

(\*)  $\sigma$  est continue aux points de  $(\mathbb{F}_0/\mathbb{K}_0)^1$  ayant 1 col, et dont deux sommets sont situés dans le même plan horizontal.

(\*\*)  $\sigma$  est continue aux points de  $(\mathbb{F}_0/\mathbb{K}_0)^1$  ayant 0 col et un point critique non de Morse.

## 2. Construction d'une section additive.

### 1. Notion de bon arrondi et notion de complexité pour les modèles à deux arêtes.

Soit  $F \in (\mathbb{F}_k/\mathbb{K}_k)^0$  ( $k = 1, 2$ ) ; la définition d'une décomposition d'Alexander de  $F$  est analogue à celle donnée en [3] (§ 2, n° 2) pour  $k = 0$ , mais il faut

ici imposer une condition supplémentaire au cercle minimal  $C$  : son plan doit être distinct de celui qui contient la face horizontale de  $F$ . L'élément de  $\mathfrak{F}_k/\mathfrak{H}_k$  ( $k = 3, 4$  ou  $5$ ) obtenu à l'aide d'une telle décomposition vérifie les conditions suivantes : ses deux faces non adjacentes sont situées dans des plans horizontaux distincts et non tangents à la 3e face, et cette 3e face est de Morse pour la cote ; on définit  $(\mathfrak{F}_k/\mathfrak{H}_k)^\circ$  ( $k = 3, 4, 5$ ) comme étant la partie de  $\mathfrak{F}_k/\mathfrak{H}_k$  formée des éléments qui vérifient ces conditions. On note  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^\circ$  l'espace somme topologique des espaces  $(\mathfrak{F}_k/\mathfrak{H}_k)^\circ$  pour  $k = 0, 1, \dots, 5$ .

Soit  $F \in \mathfrak{F}_0/\mathfrak{H}_0$ , et soit  $(F, D', D'')$  une double décomposition de  $F$  ; d'après les propositions 2 et 3 de [3], cette double décomposition définit (à l'ordre près) un modèle d'associativité ; à ce modèle sont associés (comme dans le corollaire de la proposition 3 de [3]) 6 éléments de  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  ; l'un de ces éléments est  $F$  ; 4 correspondent à des modèles ayant une arête (ce sont les éléments associés aux décompositions simples  $(F, D')$  et  $(F, D'')$ ) ; le 6e élément a deux arêtes. Supposons maintenant  $F \in (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{H}_0)^\circ$  ; on a alors la notion de double décomposition d'Alexander de  $F$  ; c'est une double décomposition  $(F, D', D'')$  telle que  $(F, D')$  et  $(F, D'')$  soient des décompositions d'Alexander, et que les plans de  $D'$  et  $D''$  soient distincts ; les 6 éléments de  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  associés à  $(F, D', D'')$  appartiennent alors à  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^\circ$ .

Soit  $F \in (\mathfrak{F}_k/\mathfrak{H}_k)^\circ$  ( $k = 3, 4, 5$ ) ; soient  $D'$  et  $D''$  les faces horizontales de  $F$ ,  $C$  et  $C''$  leur bord respectif ; on dit qu'un élément  $F'$  de  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{H}_1)^\circ_{(0,0)}$  arrondit bien  $F$  le long de  $C'$  si les faces horizontales de  $F$  et  $F'$  se raccordent le long de  $C'$  de façon que  $\widehat{F} \pm \widehat{F}'$  existe, et si  $F'$  ne rencontre, ni le plan de  $D''$ , ni aucun plan horizontal tangent à  $F$ . Soit de même  $F''$  arrondissant bien  $F$  le long de  $C''$ , on suppose en plus qu'il n'existe aucun plan horizontal rencontrant à la fois  $F'$  et  $F''$  ; on dit alors que l'élément  $F_0$  de  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{H}_0)^\circ$  défini par :

$$\widehat{F}_0 = \widehat{F} \pm \widehat{F}' \pm \widehat{F}''$$

est un bon arrondi de  $F$ . Il est immédiat que la complexité de  $F_0$  est indépendante du choix particulier de  $F'$  et  $F''$  ; par définition, c'est la complexité de  $F$ .

#### Propriétés immédiates.

1° Soit  $F \in (\mathfrak{F}_k/\mathfrak{H}_k)^\circ$  ( $k = 3, 4, 5$ ) ; soient  $F'$  et  $F''$  définissant un bon arrondi  $F_0$  de  $F$  ; alors  $F_0$  est un bon arrondi (au sens de [3], § 2, n° 1, définition 2) pour chacun des arrondis partiels de  $F$  respectivement définis par  $F'$  et  $F''$ .

2° Soit  $F \in (\mathfrak{F}_k/\mathfrak{H}_k)^\circ$  ( $k = 1, 2$ ) ; soient A et B les éléments d'une décomposition d'Alexander de F ; la complexité de A et celle de B sont au plus égales à celle de F .

3° Soit  $F \in (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{H}_0)^\circ$  ; soit  $(F, D', D'')$  une double décomposition d'Alexander de F .

a. Les 5 éléments de  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^\circ$  définis (outre F) par cette décomposition sont de complexité au plus égale à celle de F ;

b. Si l'une au moins des décompositions  $(F, D')$  et  $(F, D'')$  est simplifiante, l'élément à deux arêtes défini par  $(F, D', D'')$  est de complexité strictement plus petite que celle de F . (Donc, si chacune des décompositions  $(F, D')$ ,  $(F, D'')$  est simplifiante, les 5 éléments définis par  $(F, D', D'')$  sont de complexité strictement plus petite que celle de F .)

## 2. Construction d'une section additive au-dessus de $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^\circ$ .

Définition. - Soit  $\mathcal{Y}$  une partie quelconque de  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^\circ$  ; on dit qu'une section  $\sigma$  du revêtement  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ , définie au-dessus de  $\mathcal{Y}$ , est additive si pour tout  $F \in \mathcal{Y}$ , et pour toute décomposition d'Alexander de F dont les éléments A et B appartiennent à  $\mathcal{Y}$ , on a :

$$\sigma(F) = \sigma(A) \pm \sigma(B)$$

avec le signe + ou le signe - suivant que la décomposition est additive ou soustractive.

PROPOSITION 2. - Soit  $\sigma$  une section continue et additive du revêtement  $\mathfrak{R}$ , définie au-dessus de  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{H}_1)^\circ_{(0,0)} \cup (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{H}_0)^\circ_{(0,0)} \cup (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{H}_0)^\circ_{(1,0)}$ , et vérifiant la condition (\*) de la proposition 1.

La section  $\sigma$  peut se prolonger d'une manière unique en une section  $\bar{\sigma}$  continue et additive au-dessus de  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^\circ$  .

Remarque. - Seule l'existence d'un tel prolongement sera utilisée dans la suite.

La démonstration de la proposition 2 repose sur deux lemmes de récurrence.

Premier LEMME de récurrence. - Soit  $(i, j)$  un couple d'entiers tel que  $(i, j) \geq (2, 0)$ . Soit  $\sigma$  une section additive de  $\mathcal{R}$  définie au-dessus de  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^{\circ}_{<(i,j)}$ ;  $\sigma$  peut se prolonger d'une manière unique en une section  $\bar{\sigma}$  additive au-dessus de  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^{\circ}_{<(i,j)} \cup (\mathfrak{F}/\mathfrak{H}_0)^{\circ}_{(i,j)}$ . Si en plus  $\sigma$  est continue,  $\bar{\sigma}$  est continue.

Démonstration du premier lemme de récurrence. - On peut supposer  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H}_0)^{\circ}_{(i,j)}$  non vide (sans quoi le lemme est trivial). Soit  $F \in (\mathfrak{F}/\mathfrak{H}_0)^{\circ}_{(i,j)}$ ; puisque  $(i, j) \geq (2, 0)$ , il existe d'après le lemme 2 de [3] une décomposition d'Alexander simplifiante  $(F, D)$  de  $F$ ; soient  $A$  et  $B$  les éléments d'une telle décomposition;  $\sigma(A)$  et  $\sigma(B)$  sont définis; nécessairement  $\bar{\sigma}(F)$  doit vérifier :

$$(1) \quad \bar{\sigma}(F) = \sigma(A) \pm \sigma(B)$$

avec le signe  $+$  ou  $-$  suivant que la décomposition est additive ou soustractive; ceci montre l'unicité de  $\bar{\sigma}$ .

On va montrer que la valeur de  $\bar{\sigma}(F)$  définie par (1) est indépendante de la décomposition choisie. Soit  $(F, D')$  une autre décomposition d'Alexander simplifiante de  $F$ , soient  $A'$  et  $B'$  ses éléments; on peut supposer (en introduisant au besoin une 3e décomposition) que les plans de  $D$  et  $D'$  sont distincts;  $(F, D, D')$  est alors une double décomposition d'Alexander au sens du n° 1. Les éléments de  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})^{\circ}$  associés à cette double décomposition sont  $F, A, B, A', B'$ , et un 6e élément qu'on note  $H$ . D'après la propriété 3 (b) du n° 1, la complexité de  $H$  est strictement plus petite que celle de  $F$ , donc  $\sigma(H)$  est défini. Entre les éléments  $\bar{\sigma}(F)$  (défini par (1)),  $\sigma(A), \sigma(B), \sigma(A'), \sigma(B')$  et  $\sigma(H)$ , trois des quatre relations d'additivité possibles sont vérifiées: l'une d'après (1), deux autres d'après l'additivité de  $\sigma$ ; il résulte donc du corollaire de la proposition 3 de [3] que la 4e relation d'additivité est aussi vérifiée, ce qu'il fallait démontrer.

Additivité de  $\bar{\sigma}$ : elle est vérifiée par construction.

Continuité de  $\bar{\sigma}$  lorsque  $\sigma$  est continue: soit  $\tilde{F}$  un élément de  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}_0$  assez voisin de  $F$ ; soient  $D, A, B$  comme ci-dessus; l'intersection du plan horizontal de  $D$  et de  $\tilde{F}$  contient un disque  $\tilde{D}$  voisin de  $D$ ;  $(\tilde{F}, \tilde{D})$  est une décomposition d'Alexander simplifiante de  $\tilde{F}$ , dont les éléments  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont respectivement voisins de  $A$  et  $B$ ; donc d'après la continuité de  $\sigma$ ,  $\sigma(\tilde{A})$  et  $\sigma(\tilde{B})$  sont respectivement voisins de  $\sigma(A)$  et  $\sigma(B)$ ; donc d'après la continuité de l'addition,  $\bar{\sigma}(\tilde{F})$  est voisin de  $\bar{\sigma}(F)$ .



Second LEMME de récurrence. - Soit  $(i, j)$  un couple d'entiers positifs ou nuls. Soit  $\sigma$  une section additive et continue de  $\mathcal{R}$ , définie au-dessus de  $(\mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1)_{(0,0)}^0 \cup (\mathcal{F}/\mathcal{H})_{<(i,j)}^0 \cup (\mathcal{F}_0/\mathcal{K}_0)_{(i,j)}^0$ , et vérifiant (lorsque  $i$  est  $\neq 0$ ) la condition (\*) de la proposition 1. La section  $\sigma$  peut se prolonger d'une manière unique en une section  $\bar{\sigma}$ , continue et additive au-dessus de  $(\mathcal{F}/\mathcal{H})_{\leq(i,j)}^0$ .

Démonstration du second lemme de récurrence. - On suppose  $(\mathcal{F}_0/\mathcal{K}_0)_{(i,j)}^0$  non vide (sans quoi le lemme est trivial).

Unicité et continuité de  $\bar{\sigma}$  : Soit  $F \in (\mathcal{F}_k/\mathcal{K}_k)_{(i,j)}^0$  avec  $k = 1, 2, 3, 4$  ou  $5$  ; deux cas sont à distinguer :

1er Cas. -  $k = 1$  ou  $2$  ; alors  $F$  a une face horizontale unique  $D$ , de bord  $C$  ; on arrondit bien  $F$  le long de  $C$  à l'aide d'un élément  $A$  de  $(\mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1)_{(0,0)}^0$  ; on note  $B$  le bon arrondi de  $F$  ainsi obtenu ; on a suivant les cas  $\hat{F} = \hat{B} \pm \hat{A}$ . D'après la définition de la complexité de  $F$ , la complexité de  $B$  est  $(i, j)$  ; donc  $\sigma(B)$  est défini ; nécessairement  $\bar{\sigma}(F)$  doit vérifier :

$$(2) \quad \bar{\sigma}(F) = \sigma(B) \pm \sigma(A)$$

(ce qui montre l'unicité de  $\bar{\sigma}$  dans ce cas). Si  $A$  varie continûment en continuant à bien arrondir  $F$  le long de  $C$ ,  $B$  varie continûment et reste dans  $(\mathcal{F}_0/\mathcal{K}_0)^0$  ; donc  $\sigma(A)$  et  $\sigma(B)$  varient continûment. Comme, d'après le corollaire du lemme 3, le sous-espace de  $(\mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1)_{(0,0)}^0$  formé des éléments qui arrondissent bien  $F$  le long de  $C$  est connexe, la valeur de  $\bar{\sigma}(F)$  donnée par (2) est indépendante du choix particulier de  $A$ .

D'autre part, si  $\tilde{F}$  est assez voisin de  $F$ , on peut arrondir  $\tilde{F}$  le long de son arête  $\tilde{C}$  à l'aide d'un élément  $\tilde{A}$  voisin de  $A$  ;  $\tilde{B}$  est alors voisin de  $B$ , donc  $\bar{\sigma}(\tilde{F})$  est voisin de  $\bar{\sigma}(F)$ .

2e Cas. -  $k = 3, 4$  ou  $5$  ; alors  $F$  a deux faces horizontales  $D'$  et  $D''$ , de bords respectifs  $C'$  et  $C''$  ; on arrondit bien  $F$  le long de  $C'$  à l'aide d'un élément  $A'$  de  $(\mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1)_{(0,0)}^0$  ; on obtient ainsi un élément  $B'$  tel que  $\hat{F} = \hat{B}' \pm \hat{A}'$ , dont le modèle est  $M_1$  ou  $M_2$  et la complexité  $(i, j)$  ; donc  $\bar{\sigma}(B')$  a été défini ci-dessus ; nécessairement  $\bar{\sigma}(F)$  doit vérifier :

$$(3) \quad \bar{\sigma}(F) = \bar{\sigma}(B') \pm \sigma(A')$$

(ce qui montre l'unicité de  $\bar{\sigma}$  dans ce cas) ; puisque  $\bar{\sigma}(B')$  varie continûment avec  $B'$ , la valeur de  $\bar{\sigma}(F)$  donnée par (3) ne dépend pas du choix particulier

de  $B'$ , et est une fonction continue de  $F$ . Il reste à montrer que le même procédé appliqué en remplaçant  $C'$  par  $C''$ , conduit à la même valeur de  $\bar{\sigma}(F)$ . On arrondit  $F$  le long de  $C''$  à l'aide de  $A''$ ; on note  $B''$  l'arrondi partiel de  $F$  ainsi obtenu; on choisit  $A''$  de façon que  $A'$  et  $A''$  définissent un bon arrondi  $F_0$  de  $F$ ;  $D'$  et  $D''$  définissent une double décomposition d'Alexander de  $F_0$ , dont les éléments sont (outre  $F_0$ ),  $A'$ ,  $B'$ ,  $A''$ ,  $B''$  et  $F$ ;  $\sigma(F_0)$ ,  $\sigma(A')$ ,  $\sigma(A'')$ ,  $\bar{\sigma}(B')$ ,  $\bar{\sigma}(B'')$  et  $\bar{\sigma}(F)$  sont définis (ce dernier par (3)); trois relations d'additivité sont vérifiées: d'une part (3), et d'autre part les deux relations provenant de la définition de  $\bar{\sigma}(B')$  et  $\bar{\sigma}(B'')$ , par exemple:

$$\bar{\sigma}(B') = \sigma(F_0) \pm \sigma(A'') \quad ;$$

la 4e relation est donc aussi vérifiée, ce qu'il fallait démontrer.

Additivité de  $\bar{\sigma}$ . - Soit  $F \in (\mathfrak{F}_k/\mathfrak{K}_k)_{(i,j)}^0$ , avec  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  ou  $5$ ; il faut distinguer trois types de décompositions d'Alexander.

1er type. -  $k = 1$  ou  $2$  et  $(F, D)$  est une décomposition simplifiante.

Soient  $A$  et  $B$  les éléments de  $(F, D)$ ; on suppose que  $B$  est celui d'entre eux qui a deux arêtes. Soit  $D'$  la face horizontale de  $F$ ; soit  $F'$  un élément de  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$  définissant un bon arrondi  $F_0$  de  $F$ ; on choisit  $F'$  de façon que  $D$  et  $D'$  définissent une double décomposition d'Alexander de  $F_0$ ; les éléments de cette décomposition sont (outre  $F_0$ ),  $F$ ,  $F'$ ,  $A$ ,  $B$ , et un sixième élément qu'on note  $A'$ ;  $A'$  est l'arrondi partiel de  $B$  défini par  $F'$ . Tous ces éléments sont de complexité  $\leq (i, j)$ , de sorte que  $\bar{\sigma}$  est défini pour chacun d'entre eux. Trois relations d'additivité sont vérifiées:

1° Celle relative à la décomposition  $(F_0, D)$  (car cette décomposition est simplifiante);

2° Celle qui résulte de la définition de  $\bar{\sigma}(F)$  d'après (2):

$$\bar{\sigma}(F) = \sigma(F_0) \pm \sigma(F') \quad .$$

3° Celle qui résulte de la définition de  $\bar{\sigma}(B)$  d'après (3):

$$\bar{\sigma}(B) = \bar{\sigma}(A') \pm \sigma(F') \quad .$$

La 4e relation est donc vérifiée, ce qu'il fallait démontrer.

2e type. -  $k = 0$  et la décomposition  $(F, D)$  n'est pas simplifiante.

Lorsque la complexité  $(i, j)$  de  $F$  est  $(0, 0)$ , l'additivité à lieu par hypothèse; on suppose donc  $(i, j) \geq (1, 0)$ . Soient  $A$  et  $B$  les éléments

de  $(F, D)$  ; l'un d'entre eux appartient nécessairement à  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$ , supposons que ce soit  $A$ .

Cas où  $(i, j) = (1, 0)$ . - Si  $F$  est un bon arrondi de  $B$ , l'additivité résulte de la définition de  $\sigma(B)$  d'après (2). Si  $F$  n'est pas un bon arrondi de  $B$ , on choisit un élément  $A'$  de  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$  tel que  $F' = B \pm A'$  soit un bon arrondi de  $B$  ; on a alors :

$$(4) \quad \bar{\sigma}(B) = \sigma(F') \mp \sigma(A') \quad .$$

D'après le corollaire du lemme 3, il existe un chemin continu  $t \rightarrow A_t$  joignant  $A$  à  $A'$  dans  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$ , tel que, pour tout  $t$ ,  $\hat{B} \pm \hat{A}_t$  existe ; soit  $\hat{F}_t$  défini par :  $\hat{F}_t = \hat{B} \pm \hat{A}_t$ . L'application  $t \rightarrow \sigma(A_t)$  est continue ; d'après la condition (\*), l'application  $t \rightarrow \sigma(F_t)$  peut être prolongée en une fonction continue sur tout  $[0, 1]$ , la fonction  $t \rightarrow \sigma(F_t) \mp \sigma(A_t)$  est donc constante ; donc d'après (4) :

$$\bar{\sigma}(B) = \sigma(F) \mp \sigma(A) \quad ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cas où  $(i, j) \geq (2, 0)$ . - Soit  $(F, D')$  une décomposition simplifiante de  $F$  en deux éléments  $A'$  et  $B'$  ; l'un de ces éléments contient le bord de  $D$ , on suppose que c'est  $B'$  ; en plus on choisit  $D'$  tel que son plan soit distinct de celui de  $D$  ;  $(B, D')$  est alors une décomposition d'Alexander simplifiante de  $B$  ;  $(F, D, D')$  est une double décomposition d'Alexander de  $F$ , dont les éléments sont (outre  $F$ ),  $A, B, A', B'$  et un sixième élément qu'on note  $H$  et dont la complexité est (d'après la propriété 3 (b) du n° 1) strictement plus petite que  $(i, j)$  ;  $\sigma(F), \sigma(A), \sigma(A'), \sigma(B'), \bar{\sigma}(B)$  sont définis. Trois relations d'additivité sont vérifiées :

- 1° Celle relative à  $(F, D')$  (d'après l'additivité de  $\sigma$ ) ;
- 2° Celle relative à  $(B, D')$  (car elle est du 1er type considéré ci-dessus) ;
- 3° Celle relative à  $(B', D)$  (d'après l'additivité de  $\sigma$ ).

La 4e relation est donc vérifiée, ce qu'il fallait démontrer.

3e type. -  $k = 1$  ou  $2$  et la décomposition n'est pas simplifiante.

On procède exactement comme pour le 1er type ci-dessus ; les relations d'additivité 1°, 2° et 3° sont encore vérifiées ; mais cette fois la relation 1° est vérifiée parce qu'elle correspond à une décomposition du 2e type ci-dessus.

Ceci achève la démonstration du second lemme de récurrence.

Démonstration de la proposition 2. - On considère la restriction de  $\sigma$  à  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0 \cup (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)_{(0,0)}^0$  ; on lui applique le second lemme de récurrence (avec  $(i, j) = (0, 0)$ ) ; on obtient ainsi un prolongement continu et additif à  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})_{(0,0)}^0$  . On a ainsi défini un prolongement  $\bar{\sigma}$  de  $\sigma$  à  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})_{(0,0)}^0 \cup (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)_{(1,0)}^0$  ; cette section  $\bar{\sigma}$  vérifie la condition (\*) (qui se conserve évidemment par prolongement) et elle est additive (car d'une part sa restriction à  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})_{(0,0)}^0$  est additive, et d'autre part il n'existe pas de décomposition d'un élément de  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)_{(1,0)}^0$  en deux éléments de  $(\mathfrak{F}/\mathfrak{H})_{(0,0)}^0 \cup (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)_{(1,0)}^0$ ). On peut donc appliquer de nouveau le 2e lemme de récurrence, avec cette fois  $(i, j) = (1, 0)$  . Puis on applique le 1er lemme de récurrence, puis de nouveau le 2e, et ainsi de suite. Le prolongement obtenu est unique, puisqu'il en est ainsi à chaque pas.

### 3. Prolongement d'une section additive.

PROPOSITION 3. - Soit  $\sigma$  une section partielle continue et additive du revêtement  $\mathfrak{R}$ , définie au-dessus de  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)^0 \cup (\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)^0 \cup (\mathfrak{F}_2/\mathfrak{K}_2)^0$ . Pour que  $\sigma$  puisse se prolonger par continuité à  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)^1$ , il suffit que  $\sigma$  vérifie la condition (\*\*) de la proposition 1 (c'est-à-dire, que  $\sigma$  soit continue aux points de  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)^1$  ayant 0 col et un point critique non de Morse).

La confrontation des propositions 1, 2 et 3 montre que le revêtement  $\mathfrak{R}$  admet une section continue au-dessus de  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)^0 \cup (\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)^1$  ; ceci achève la démonstration de la nullité de  $\pi_0$  (Diff  $S^3$ ) .

Le principe de la démonstration de la proposition 3 est le suivant : on vérifie la condition du 2° du lemme 7 en tout point  $F$  de  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)^1$  . On examine successivement trois cas.

1. Premier cas. -  $F$  est un point de  $(\mathfrak{F}_0/\mathfrak{K}_0)_\beta^1$  où se croisent deux singularités dont l'une au moins est un sommet  $s$ .

Soit  $C$  un cercle horizontal de  $F$  suffisamment voisin de  $s$  ;  $C$  définit une décomposition d'Alexander de  $F$  en deux éléments  $A, B$  ; soit  $A$  celui qui contient  $s$  ;  $A$  est un élément de  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$  . Soit  $t \rightarrow A_t$  un chemin dans  $(\mathfrak{F}_1/\mathfrak{K}_1)_{(0,0)}^0$  vérifiant les conditions suivantes :

1°  $A_t$  est constant en dehors d'un petit voisinage de  $s$  ;

2°  $A_{1/2} = A$  ;

3° La cote du sommet de  $A_t$  est, au voisinage de la valeur  $t = 1/2$ , une fonction strictement croissante de  $t$ .

Supposons par exemple la décomposition  $(A, B)$  additive ; soit  $F_t$  l'élément de  $\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0$  défini par :  $\widehat{F}_t = \widehat{B} + \widehat{A}_t$ . Le chemin  $t \rightarrow F_t$  traverse  $(\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0)^1$  en  $F$  pour  $t = 1/2$ . Pour  $t \neq 1/2$ , on a d'après l'additivité de  $\sigma$  :

$$\sigma(F_t) = \sigma(B) + \sigma(A_t) \quad ;$$

donc, d'après la continuité de l'addition dans  $\mathbb{R}$ , la fonction  $t \rightarrow \sigma(F_t)$  peut se prolonger en une fonction continue au voisinage de  $t = 1/2$  ; la condition du 2° du lemme 7 est donc vérifiée en  $F$ .

2. Deuxième cas. -  $F$  est un point de  $(\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0)_\alpha^1$  ; autrement dit,  $F$  a un point critique non de Morse, qu'on note  $e$ .

La démonstration se fait par récurrence sur la complexité de  $F$ , notion dont la définition est analogue à celle donnée en [3] (§ 2, n° 2) dans le cas de  $(\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0)^0$ , à ceci près qu'on doit ici rajouter le point  $e$  à l'ensemble des cols. Autrement dit,  $i$  est le nombre de cols plus un ; un cercle  $C$  de  $F$  est dit essentiel s'il est situé dans un plan horizontal non tangent à  $F$ , et si, sur la composante de  $F - C$  qui ne contient pas  $e$ , il y a au moins un col ; la définition de  $j$  est inchangée, et la complexité de  $F$  est le couple  $(i, j)$ . Soit  $(A, B)$  une décomposition d'Alexander de  $F$  ; on suppose par exemple :  $e \in A$ . La complexité de  $B$  a été définie au § 2, n° 1 ; on définit la complexité de  $A$  comme suit : c'est celle d'un "bon arrondi"  $\tilde{A}$  de  $A$  ( $\tilde{A}$  est un élément de  $(\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0)_\alpha^1$ ). On a donc encore la notion de décomposition simplifiante de  $F$  ; il existe une telle décomposition dès que  $i \geq 2$ .

Si  $F$  est tel que  $i = 1$ , la continuité de  $\sigma$  en  $F$  a lieu par hypothèse : c'est la condition (\*\*). Soient  $i \geq 2$  et  $j \geq 0$  ; supposons établie la continuité de  $\sigma$  en tout point de  $(\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0)_\alpha^1$  de complexité strictement plus petite que  $(i, j)$  ; soit  $F \in (\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0)_\alpha^1$ , de complexité  $(i, j)$  ; on va démontrer la continuité de  $\sigma$  en  $F$ . On considère une décomposition simplifiante de  $F$  en deux éléments  $A$  et  $B$  ; on suppose que  $e \in A$  ; soit  $V$  un petit voisinage de  $e$  ; soit  $t \rightarrow F_t$  un chemin traversant  $(\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0)_\alpha^1$  en  $F$  pour  $t = 1/2$ , tel que  $F_t \cap (\mathbb{R}^3 - V)$  soit indépendant de  $t$ . Supposons par exemple la décomposition  $(A, B)$  additive ;  $\widehat{F}_t$  est alors de la forme suivante :

$$\widehat{F}_t = \widehat{B} + \widehat{A}_t \quad \text{avec} \quad \widehat{A}_t \subset V \quad \text{et} \quad A_{1/2} = A \quad .$$

Soit  $\widetilde{A}$  un bon arrondi de  $A$ , tel que  $\widetilde{A}$  soit de la forme  $\widehat{A} \pm \widehat{A}'$ , avec  $\widehat{A}' \cap V = \emptyset$ ; posons  $\widehat{A}_t \pm \widehat{A}' = \widehat{K}_t$ ; ceci définit dans  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$  un chemin  $t \rightarrow \widetilde{K}_t$ , qui traverse  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)_\alpha^1$  au point  $\widetilde{K}$ , dont la complexité est strictement plus petite que  $(i, j)$ . Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, la fonction  $t \rightarrow \sigma(\widetilde{K}_t)$ , définie pour  $t \neq 1/2$ , peut se prolonger en une fonction continue au voisinage de  $t = 1/2$ ; il en est donc de même, d'après l'additivité de  $\sigma$  et la continuité de l'addition dans  $\mathfrak{R}$ , des fonctions  $t \rightarrow \sigma(A_t)$  et  $t \rightarrow \sigma(F_t)$ ; ceci achève la démonstration.

3. Troisième cas. - F est un point de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)_\beta^1$  où se croisent deux cols.

La démonstration se fait par récurrence sur la complexité de  $F$ , notion dont la définition est, dans ce cas, exactement celle donnée en [3] (§ 2, n° 2). Soit  $F$  un élément de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)_\beta^1$  tel que deux cols  $c$  et  $c'$  de  $F$  soient au même niveau; soit  $(A, B)$  une décomposition d'Alexander de  $F$ . Deux cas peuvent se produire: ou bien la décomposition est "séparante", c'est-à-dire telle que  $c$  et  $c'$  appartiennent l'un à  $A$ , l'autre à  $B$ , dans ce cas  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)_\alpha^0$  dont la complexité a été définie au § 2, n° 1; ou bien  $c$  et  $c'$  appartiennent tous deux à l'un des éléments, par exemple  $A$ ; on définit alors la complexité de  $A$  à l'aide d'un "bon arrondi"  $\widetilde{A}$  (qui est un élément de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)_\beta^1$  où se croisent deux cols). On a donc encore la notion de décomposition simplifiante de  $F$ ; mais cette fois on ne peut affirmer l'existence d'une telle décomposition que pour  $i \geq 3$ . C'est pourquoi le cas  $i = 2$  nécessite une étude particulière (de laquelle il résulte d'ailleurs qu'il n'existe pas de décomposition simplifiante dans ce cas).

Cas  $i = 2$ .

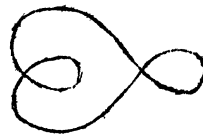
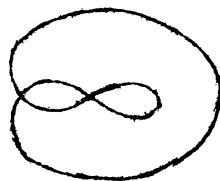
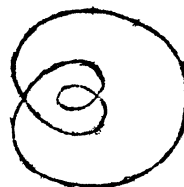
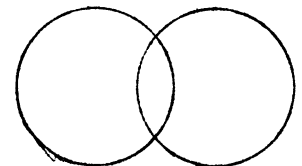
Le lemme suivant permet de classifier les configurations possibles :

LEMME 8. - Soit  $F \in \mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$ . Soit  $P$  un plan horizontal, tangent ou non à  $F$ . Si  $P \cap F$  n'est pas connexe,  $F$  possède un dehors de  $P$  au moins une singularité autre qu'un sommet.

Démonstration du lemme 8. - Soit  $(a, b)$  un intervalle contenant à son intérieur la cote de  $P$ . Si  $(a, b)$  est assez petit,  $(\mathbb{R}^2 \times (a, b)) \cap F$  n'est pas connexe. On choisit  $a$  et  $b$  pour qu'il en soit ainsi et que, en plus, les plans horizontaux de cote  $a$  et  $b$  ne soient pas tangents à  $F$ ; l'intersection

de chacun de ces plans avec  $F$  se compose alors d'un nombre fini de cercles. Si tous les points singuliers de  $F$  situés en dehors de  $\mathbb{R}^2 \times (a, b)$  étaient des sommets,  $(\mathbb{R}^2 \times (a, b)) \cap F$  s'obtiendrait en enlevant de  $F$  un nombre fini de disques ouverts disjoints, et par conséquent serait connexe, contrairement à l'hypothèse.

Application du lemme 8. - Soit  $F$  un élément de  $(\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0)_\beta^1$ ; on suppose que  $F$  a en tout deux cols, et que ces cols sont tous deux situés dans un plan horizontal  $P$ . D'après le lemme 8,  $P \cap F$  est connexe;  $P \cap F$  est donc une courbe différentiable connexe, avec deux points de self-intersection transversale. La classification de ces courbes relativement aux difféomorphismes du plan, est la suivante :

Type I<sub>a</sub>Type I<sub>b</sub>Type I<sub>c</sub>Type I<sub>d</sub>Type I<sub>e</sub>

Type II

Cas où  $P \cap F$  est de l'un des types I. - Il existe alors sur  $P \cap F$  une boucle  $L$  qui est minimale, c'est-à-dire telle que l'intérieur du disque  $D_P$ , que  $L$  borde dans  $P$ , ne rencontre pas  $F$ . L'un des disques que  $L$  borde sur  $F$  a pour unique singularité un sommet  $s$ ; on note ce disque  $D_F$ . Soit  $c$  le point anguleux de  $L$ ; le couple  $(c, s)$  est primitif (cf. § 1, n° 2). Soit  $c'$  le second col de  $F$ . Soient  $V$  un voisinage de  $\widehat{D_P \cup D_F}$  et  $W$  un voisinage de  $c'$  tels que  $V \cap W$  soit vide; on note :

$$F \cap V = A; \quad F \cap W = B; \quad F - (A \cup B) = H \quad .$$

Soit  $t \rightarrow F'_t$  un chemin dans  $\mathfrak{F}_0/\mathcal{K}_0$ , de la forme :

$$F'_t = H \cup A \cup B_t \quad \text{avec} \quad B_t \subset W \quad \text{et} \quad B_{1/2} = B \quad ;$$

tel que, pour  $t \neq 1/2$ ,  $F'_t \in (\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^0$  et que la cote du col  $c'_t$  de  $F'_t$  situé dans  $W$  soit fonction strictement croissante de  $t$ ; ce chemin traverse  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$  en  $F$  pour  $t = 1/2$ .

Soit  $t \rightarrow F_t$  un chemin dans  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$  donné par le lemme 4, de la forme :

$$F_t = H \cup A_t \cup B \quad \text{avec} \quad A_t \subset V \quad \text{et} \quad A_0 = A \quad ,$$

traversant  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1_\alpha$  en un point, et tel que  $F_1$  n'ait aucune singularité dans  $V$ ; d'après la condition 3° du lemme 4, on peut supposer que le col  $c_t$  de  $F_t$  situé dans  $V$  varie dans un intervalle strictement compris entre la cote de  $c'_0$  et celle de  $c'_1$ .

Considérons l'application :

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, u) \rightarrow H \cup A_t \cup B_u \quad .$$

La restriction de cette application au bord du carré définit un lacet  $\ell$  de point de base  $F$ , homotope à 0 dans  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$ . Le lacet  $\ell$  est à valeurs dans  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^0 \cup (\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$ , et sauf en  $F$ , ne passe en aucun point de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$  où se croisent deux cols. Il en résulte (d'après l'étude faite ci-dessus des deux premiers cas) que le relèvement du lacet  $\ell$  qui, au départ de  $F$ , est dans l'image de la section  $\sigma$ , est encore dans cette image au voisinage de l'extrémité. Puisque le lacet  $\ell$  est homotope à 0 dans  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$ , après avoir décrit  $\ell$  on revient au-dessus de  $F$  dans le feuillet de départ; donc la section  $\sigma$  est continue en  $F$ .

Cas où  $P \cap F$  est du type II. - On note  $\mathcal{Z}$  le sous-espace de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$  formé des éléments  $F$  (à deux cols, tous deux situés dans le plan horizontal  $P$ ) tels que  $P \cap F$  soit du type II. Soit  $F \in \mathcal{Z}$ ; les demi-normales à  $F$  en ses deux cols, sortantes par rapport à  $\hat{F}$ , sont toutes deux dirigées dans le même sens (sans quoi  $F$  serait difféomorphe au tore  $S^1 \times S^1$ ). On en déduit, en procédant comme au n° 3 du § 1, que  $\mathcal{Z}$  a deux composantes connexes, qui se déduisent l'une de l'autre à l'aide de la symétrie autour d'un plan horizontal. Il résulte donc du 3° du lemme 7 qu'il suffit de vérifier la continuité de  $\sigma$  en un point particulier de  $\mathcal{Z}$ .

Considérons la surface  $F_0$  d'équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) - 9y^2 z + z = 0 \quad .$$

$F_0$  est un élément de  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$ , ayant en tout deux cols  $c$  et  $c'$ , tous deux situés dans le plan  $\{z = 1/4\}$ ; l'intersection de  $F_0$  avec ce plan se compose



de deux cercles ;  $F_0$  est stable pour la symétrie d'axe  $Oz$ , qui échange  $c$  et  $c'$ , ainsi que deux sommets  $s$  et  $s'$  et  $F_0$ . Soient  $V$  un voisinage de  $s$ ,  $W$  un voisinage de  $c$ ; on note  $V'$  et  $W'$  les symétriques respectifs de  $V$  et  $W$  par rapport à  $Oz$ . On choisit  $V$  et  $W$  assez petits pour que  $V, V', W$  et  $W'$  soient disjoints, et pour que les projections de  $V$  et  $W$  sur  $Oz$  soient disjointes. On note :

$$\begin{aligned} F_0 \cap V &= A ; & F_0 \cap V' &= A' & ; \\ F_0 \cap W &= B ; & F_0 \cap W' &= B' & ; \\ F_0 - (A \cup A' \cup B \cup B') &= H & . \end{aligned}$$

On considère deux chemins dans  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$  :

$$t \rightarrow F_t = H \cup A_t \cup A' \cup B \cup B' \quad \text{avec } A_t \subset V \text{ et } A_0 = A \quad ;$$

et

$$t \rightarrow \tilde{F}_t = H \cup A \cup A' \cup B_t \cup B' \quad \text{avec } B_t \subset W \text{ et } B_0 = B \quad .$$

On suppose que  $F_t$  a, dans  $V$ , pour singularité unique un sommet  $s_t$ , dont la cote soit fonction strictement croissante de  $t$ ;  $F_1$  est alors un élément de  $\mathfrak{Z}$ . On suppose que  $\tilde{F}_t$  a, dans  $W$ , pour unique singularité un col  $c_t$ , dont la cote soit fonction strictement croissante de  $t$ . On note  $A'_t$  le symétrique de  $A_t$  par rapport à  $Oz$ ,  $B'_t$  celui de  $B_t$ . On considère les chemins suivants dans  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$  :

$$t \rightarrow H \cup A_1 \cup A' \cup B_t \cup B' \quad ;$$

$$t \rightarrow \rho_t(H \cup A_1 \cup A' \cup B_1 \cup B') \quad (\text{où } \rho_t \text{ désigne la rotation d'angle } t\pi \text{ autour de } Oz) ;$$

$$t \rightarrow H \cup A_t \cup A'_{1-t} \cup B \cup B'_1 \quad ;$$

$$t \rightarrow H \cup A_1 \cup A' \cup B \cup B'_{1-t} \quad .$$

L'origine de chacun de ces chemins est l'extrémité du précédent ; leur composé est un lacet  $\ell$  de point de base  $F_1$  dans  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$ . Le lacet  $\ell$  prend ses valeurs dans  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^0 \cup (\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$ , et sauf en  $F_1$  ne passe en aucun point de  $(\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0)^1$  où se croisent deux cols. Tout revient donc (comme on l'a vu pour le type I) à montrer que  $\ell$  est homotope à 0 dans  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$ . Or  $\ell$  est homotope au lacet  $\ell'$ , de point de base  $F_0$ , défini par  $t \rightarrow \rho_t(F_0)$ . Soit, pour  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $F'_\lambda$  la surface d'équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) - 9\lambda y^2 z + z = 0 \quad ;$$

il est facile de voir que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $F'_\lambda$  est un élément de  $\mathfrak{F}/\mathcal{K}_0$ . Soit  $\ell'_\lambda$  le chemin  $t \rightarrow \rho_t(F'_\lambda)$ ; c'est un lacet de point de base  $F'_\lambda$ , car  $F'_\lambda$

est symétrique par rapport à  $Oz$ . Or, d'une part  $l'_1 = l'$ ; et d'autre part  $l'_0$  est un lacet ponctuel, car  $F'_0$  est de révolution par rapport à  $Oz$ ; donc  $l'$  est homotope à 0 dans  $\mathfrak{S}_0/\mathfrak{K}_0$ ; il en est donc de même de  $l$ .

Cas  $i \geq 3$ . - Soient  $i \geq 3$  et  $j \geq 0$ ; supposons établie la continuité de  $\bullet$  en tout point de  $(\mathfrak{S}_0/\mathfrak{K}_0)_\beta^1$  où se croisent deux cols, et où la complexité est strictement plus petite que  $(i, j)$ . Soit  $F$  un point de complexité  $(i, j)$  où se croisent deux cols; il existe une décomposition d'Alexander simplifiante de  $F$ ; s'il en existe une qui soit séparante, on raisonne comme dans le premier cas ci-dessus (cf. n° 1); sinon, on raisonne comme dans le deuxième cas (cf. n° 2).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-380.
  - [2] CERF (Jean). - La nullité de  $\pi(\text{Diff } S^3)$ , 1 : Position du problème, Séminaire Cartan : Topologie différentielle, t. 15, 1962/63, n° 9, 27 p.
  - [3] CERF (Jean). - La nullité de  $\pi(\text{Diff } S^3)$ , 2 : Opération d'addition sur des espaces fonctionnels liés aux décompositions des sphères plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , Séminaire Cartan, Topologie différentielle, t. 15, 1962/63, n° 20, 29 p.
-