

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

BERNARD MALGRANGE

**Le théorème de préparation en géométrie différentiable. II.
Rappels sur les fonctions différentiables**

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. n° 12, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A5_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME DE PRÉPARATION EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIABLE

par Bernard MALGRANGE

II. Rappels sur les fonctions différentiables.

1. Fonctions différentiables au sens de WHITNEY.

Soit X un sous-ensemble localement fermé de \mathbb{R}^n ; prenons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel qu'on ait $X \subset \Omega$ et que X soit fermé dans Ω ; désignons par $\mathcal{E}^m(\Omega)$ l'espace des fonctions m fois continûment dérivables dans Ω et à valeurs réelles (m entier ≥ 0 ou $+\infty$) muni de sa topologie habituelle, i. e. la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m ; désignons encore par $\mathcal{S}^m(X ; \Omega)$ l'idéal, évidemment fermé, de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ formé des fonctions nulles ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m sur X . Nous poserons, par définition,

$$\mathcal{E}^m(X) = \mathcal{E}^m(\Omega) / \mathcal{S}^m(X ; \Omega)$$

et nous munirons cet espace de la topologie quotient de celle de $\mathcal{E}^m(\Omega)$. Il est immédiat de vérifier que l'espace vectoriel topologique $\mathcal{E}^m(X)$ ne dépend pas de l'ouvert Ω choisi, à un isomorphisme canonique près. Nous appellerons ses éléments "fonctions m fois continûment différentiables sur X " (en toute rigueur, il vaudrait mieux dire "sur le voisinage infinitésimal d'ordre m de X ", mais cela n'amènera dans la suite aucune confusion) ; lorsque $m = +\infty$, on dira, comme d'habitude, "fonctions différentiables sur X " et l'on écrira $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{S}(X ; \Omega)$, etc., au lieu de $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{S}^\infty(X ; \Omega)$, etc.

Rappelons quelques résultats relatifs à ces espaces :

a. Le dual de $\mathcal{E}^m(X)$ est (canoniquement) isomorphe à $\mathcal{E}'^m(X)$, espace des distributions d'ordre m sur \mathbb{R}^n , à support compact et contenu dans X .

Soit en effet f une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^m(X)$; f définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^m(\Omega)$, i. e. un élément de $\mathcal{E}'^m(\Omega)$. Pour établir le résultat, il suffit de prouver que les éléments de $\mathcal{E}'^m(\Omega)$ qui s'annulent sur $\mathcal{S}^m(X ; \Omega)$ sont exactement ceux dont le support est contenu dans X . Or cela résulte immédiatement du lemme suivant (cf. [5], chap. 3, théorème XXVIII) :

LEMME 1. - Les fonctions de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ qui s'annulent au voisinage de X sont denses dans $\mathcal{S}(X; \Omega)$.

b. Lorsque $k = (k_1, \dots, k_n) \in \underline{\mathbb{N}}^n$, posons comme d'habitude

$$|k| = k_1 + \dots + k_n, \quad k! = k_1! \dots k_n!,$$

$$x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Soit $T^m(X)$ (espace des "champs de Taylor d'ordre m sur X ") l'ensemble des familles

$$f = (f^k)_{k \in \underline{\mathbb{N}}^n, |k| \leq m}$$

de fonctions continues sur X à valeurs réelles, indexées par les n -entiers d'ordre $\leq m$. On obtient une application $\mathcal{E}^m(\Omega) \rightarrow T^m(X)$ en associant à tout $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ la famille des fonctions sur X

$$x \rightsquigarrow D^k f(x) \quad (|k| \leq m).$$

Le noyau de cette application est évidemment $\mathcal{S}^m(X; \Omega)$, d'où une injection $w^m : \mathcal{E}^m(X) \rightarrow T^m(X)$. Nous allons rappeler la caractérisation de l'image de w^m . Pour cela, remarquons qu'en vertu de la formule de Taylor, tout $f \in \text{im}(w^m)$ possède la propriété suivante, que nous désignerons par (W_m) :

(i) Lorsque $m < +\infty$: pour tout $k \in \underline{\mathbb{N}}^n$, avec $|k| \leq m$, et tout $a \in X$, on a

$$\lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow a, y \neq x} \frac{1}{\|x - y\|^{m-|k|}} \left| f^k(x) - \sum_{|k+l| \leq m} f^{k+l}(y) \frac{(x-y)^l}{l!} \right| = 0.$$

(ii) Lorsque $m = +\infty$: f vérifie $(W_{m'})$ pour tout m' fini.

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1 (WHITNEY). - L'image de $\mathcal{E}^m(X)$ par w^m est le sous-espace $W^m(X)$ de $T^m(X)$ formé des éléments qui vérifient (W_m) .

Pour le cas " m fini ", nous nous contenterons de renvoyer à [6] (voir aussi [1], ou [2]), et nous indiquerons rapidement comment passer de là au cas $m = +\infty$. Pour cela, remarquons que pour $m \leq m'$, on a une application évidente $W^{m'}(X) \rightarrow W^m(X)$ et que $W(X)$ est la limite projective des $W^m(X)$ munies de ces applications. D'autre part, on a évidemment

$$\varprojlim \mathcal{E}^m(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega) , \quad \varprojlim \mathcal{S}^m(X ; \Omega) = \mathcal{S}(X ; \Omega) .$$

Tout revient donc à montrer que l'on a

$$\varprojlim \mathcal{E}^m(X) = \mathcal{E}(X) ,$$

i. e. que la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{S}^m(X ; \Omega) \rightarrow \mathcal{E}^m(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^m(X) \rightarrow 0$$

reste exacte par passage à la limite projective. Or cela se fait par le procédé classique de Mittag-Leffler (il suffit, pour pouvoir l'appliquer, de savoir que $\mathcal{S}^{m+1}(X ; \Omega)$ est dense dans $\mathcal{S}^m(X ; \Omega)$, ce qui résulte aussitôt, par régularisation, du lemme 1).

Naturellement, ce raisonnement redonne en particulier le théorème de Borel rappelé dans le précédent exposé.

Pour m fini, munissons $W^m(X)$ de la topologie définie par les semi-normes suivantes (on laisse le lecteur vérifier qu'elles sont bien finies sur $W^m(X)$) :

$$\sup_{x \in K} |f^k(x)| \quad \text{et} \quad \sup_{x \in K, y \in K, x \neq y} \frac{1}{\|x - y\|^{m-|k|}} \left| f^k(x) - \sum_{|k+l| \leq m} f^{k+l}(y) \frac{(x-y)^l}{l!} \right|$$

($|k| \leq m$, K un compact quelconque de X) ; nous obtenons un espace métrisable (et même normé si X est compact) dont on vérifie aussitôt qu'il est complet. Il résulte alors du théorème du graphe fermé, ou directement de l'analyse de la démonstration du théorème 1, que w^m est un isomorphisme topologique de $\mathcal{E}^m(X)$ sur $W^m(X)$. Pour $m = +\infty$, ces résultats restent vrais si l'on munit $W(X)$ de la topologie définie par les semi-normes ci-dessus, avec m remplacé par n'importe quel entier naturel m' ⁽¹⁾.

On remarquera que, en général, la topologie de $W^m(X)$ n'est pas induite par la topologie naturelle de $T^m(X)$, définie par les semi-normes $\sup_{x \in K} |f^k(x)|$. La propriété en question n'est vraie que si X est "suffisamment régulier".

2. Ensembles régulièrement séparés.

Soit Z un sous-ensemble localement fermé de \mathbb{R}^n , et soient $X \subset Z$, $Y \subset Z$, avec $Z = X \cup Y$, X et Y étant fermés dans Z . Considérons la suite

$$(L) \quad 0 \rightarrow \mathcal{E}(X \cup Y) \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}(X) \oplus \mathcal{E}(Y) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{E}(X \cap Y) \rightarrow 0$$

⁽¹⁾ Notons d'ailleurs que $W(X)$ est exactement le sous-espace de $T(X)$ pour lequel toutes ces semi-normes sont finies, et que la propriété analogue est fautive pour $m < +\infty$ (démonstration laissée au lecteur).

où δ est l'application diagonale $f \rightsquigarrow (f', f'')$, f' (resp. f'') étant la restriction de f à X (resp. Y), définie de la manière évidente, et où σ est l'application $(f, g) \rightsquigarrow f' - g'$, f' (resp. g') désignant la restriction de f (resp. g) à $X \cap Y$.

Evidemment, $\sigma\delta = 0$, σ est surjectif (donc est un homomorphisme), et δ est injectif. De plus, $\text{im}(\delta)$ est dense dans $\ker(\sigma)$: soit en effet $(f, g) \in \ker(\sigma)$; en prolongeant g en $\tilde{g} \in \mathcal{E}(X \cup Y)$, on a

$$(f, g) = \delta(\tilde{g}) + (f', 0) \quad ,$$

avec $f' = f - \tilde{g}$, et la restriction de f' à $X \cap Y$ est nulle ; il résulte alors du lemme 1 que f' est adhérent à l'ensemble des $h \in \mathcal{E}(X)$ nuls au voisinage de $X \cap Y$; en prolongeant h par 0, on obtient un élément de $\mathcal{E}(X \cup Y)$, donc $(f', 0)$ est adhérent à $\text{im}(\delta)$.

Considérons aussi, quoique nous n'en n'ayons pas absolument besoin, la suite transposée :

$$(L') \quad 0 \leftarrow \mathcal{E}'(X \cup Y) \xleftarrow{\delta'} \mathcal{E}'(X) \oplus \mathcal{E}'(Y) \xleftarrow{\sigma'} \mathcal{E}'(X \cap Y) \leftarrow 0 \quad .$$

On déduit des propriétés précédentes que $\delta'\sigma' = 0$, que σ' est injectif et a une image fermée ; que $\text{im}(\sigma')$ est dense dans $\ker(\delta')$, donc égal à $\ker(\delta')$ (ce qu'on pourrait d'ailleurs établir directement par les propriétés du support des distributions) ; et enfin que $\text{im}(\delta')$ est dense dans $\mathcal{E}'(X \cup Y)$.

Il résulte de tout cela que les propriétés " $\ker(\sigma) = \text{im}(\delta)$ " et " δ' est surjectif" sont équivalentes ; cela revient à dire que (L) est exacte si et seulement si (L') est exacte. Par définition nous dirons avec ŁOJASIEWICZ que "X et Y sont régulièrement séparés" si ces propriétés sont vraies.

THÉORÈME 2 (ŁOJASIEWICZ). - Pour que X et Y soient régulièrement séparés, il faut et il suffit que $X \cap Y = \emptyset$ ou que la condition suivante soit vérifiée :

(A) Pour tout compact $K \subset X$ et tout compact $L \subset Y$, il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $x \in K$, on ait $d(x, L) \geq C d(x, X \cap Y)^\alpha$, (d désignant la distance euclidienne dans \mathbb{R}^n).

On laisse au lecteur le soin de vérifier directement que cette condition est bien symétrique par rapport à X et Y .

La démonstration de ŁOJASIEWICZ consiste à montrer l'équivalence de (A) avec la surjectivité de δ' (cf. [3], ou [4], exposé 21). Pour rester dans le cadre des fonctions différentiables, nous allons en donner une autre, fondée sur le théorème 1.

a. $(\wedge) \implies \text{"ker}(\sigma) = \text{im}(\delta)\text{"}$. Soit $f = (f^k)$ (resp. $g = (g^k)$) un élément de $W(X)$ (resp. $W(Y)$) ; supposons qu'on ait $f = g$ sur $X \cap Y$. On définit $h = (h^k) \in T(X \cup Y)$ par $h^k = f^k$ sur X , $h^k = g^k$ sur Y , et il faut montrer que l'on a $h \in W(X \cup Y)$. En prolongeant g en $\tilde{g} \in W(X \cup Y)$, et en remplaçant f par $f - \tilde{g}$, on se ramène aussitôt au cas où $g = 0$ (et par conséquent $f = 0$ sur $X \cap Y$).

Soit alors M un compact de $X \cup Y$, et posons $X \cap M = K$, $Y \cap M = L$. Nous devons vérifier que, pour tout $m \in \underline{\mathbb{N}}$ et tout $k \in \underline{\mathbb{N}}^n$, il existe $c' > 0$ tel qu'on ait, pour tout $x \in M$ et tout $y \in M$:

$$|h^k(x) - \sum_{|\ell| \leq m} h^{k+\ell}(y) \frac{(x-y)^\ell}{\ell!}| \leq c' \|x - y\|^m$$

(cela entraînera bien $h \in W(X \cup Y)$: cf. note (1)).

Le cas où x et y appartiennent tous les deux à X , ou tous les deux à Y , est immédiat. Supposons donc $x \in X$, $y \in Y$ (le cas où $x \in Y$, $y \in X$ se traiterait de manière analogue) ; dans ce cas, notre inégalité s'écrit simplement

$$|f^k(x)| \leq c' \|x - y\|^m .$$

Par hypothèse, on peut trouver $z \in X \cap Y$ tel qu'on ait $\|x - y\| \geq \frac{c}{2} \|x - z\|^\alpha$; on peut supposer que, lorsque x varie dans K et y dans L , z varie dans un compact de $X \cap Y$. Soit m' un entier tel qu'on ait $\alpha m \leq m'$; comme $\|x - z\|$ est borné, on aura $\|x - z\|^{m'} \leq c'' \|x - y\|^m$, avec $c'' \geq 0$. En appliquant (W) à f , on trouve

$$|f^k(x) - \sum_{|\ell| \leq m'} f^{k+\ell}(z) \frac{(x-z)^\ell}{\ell!}| \leq c''' \|x - z\|^{m'}$$

ou, puisque $f = 0$ sur $X \cap Y$:

$$|f^k(x)| \leq c''' \|x - z\|^{m'} \leq c'' c''' \|x - y\|^m ,$$

d'où le résultat.

b. $\text{"ker} \sigma = \text{im} \delta" \implies (\wedge)$.

Par hypothèse, l'image de δ est fermée, donc δ est un homomorphisme ; soit alors M un compact $\subset X \cup Y$. Pour tout $f \in W(X \cup Y)$, il existera en particulier une semi-norme p sur $W(X)$ et une semi-norme q sur $W(Y)$ telles qu'on ait, pour tout $x \in M$ et tout $y \in M$:

$$|f^0(x) - f^0(y) - \sum (x_i - y_i) f^1(y)| \leq [p(f) + q(f)] \|x - y\| .$$

En particulier, si f est nul sur Y , il vient, en posant $X \cap M = K$, $Y \cap M = L$:

pour tout $x \in K$, $|f(x)| \leq p(f) d(x, L)$.

Soit enfin Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , tel que $X \cup Y$ soit un fermé de Ω . En "remontant" à $\mathcal{E}(\Omega)$ l'inégalité précédente, on trouve ceci : il existe un compact $N \subset \Omega$, un entier $m \geq 0$ et un $C > 0$ tels que, pour tout $F \in \mathcal{E}(\Omega)$, nul à l'ordre infini sur Y , et tout $x \in K$, on ait

$$|F(x)| \leq C \|F\|_{m,N} d(x, L)$$

avec

$$\|F\|_{m,N} = \sup_{x \in N} \sum_{|\ell| \leq m} |D^\ell F(x)| .$$

Cela étant, soit φ une fonction indéfiniment dérivable dans \mathbb{R}^n , à support dans la boule unité, avec $\varphi(0) = 1$; posons

$$\|\varphi\|_m = \sup_x \sum_{|\ell| \leq m} |D^\ell \varphi(x)| .$$

Pour $x_0 \in K$, appliquons l'inégalité précédente à la fonction $x \rightsquigarrow \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)$, avec $\varepsilon = \inf(1, d(x, X \cap Y))$, et $x = x_0$; il vient $1 \leq \frac{C}{\varepsilon^m} d(x, L) \|\varphi\|_m$, d'où immédiatement le résultat.

Remarque 1. - On peut se proposer une étude analogue à la précédente, dans les espaces \mathcal{E}^m avec m fini au lieu de $m = +\infty$. Les résultats sont les suivants :

a. Pour $m = 0$, la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^0(X \cup Y) \rightarrow \mathcal{E}^0(X) \oplus \mathcal{E}^0(Y) \rightarrow \mathcal{E}^0(X \cap Y) \rightarrow 0$$

est toujours exacte, i. e. X et Y sont toujours "0-régulièrement séparés" (évident!);

b. pour $0 < m < +\infty$, X et Y sont " m -régulièrement séparés" si et seulement si la condition (Λ) est vérifiée avec $\alpha = 1$, ce qui est une condition considérablement plus restrictive que la condition (Λ) elle-même!

Remarque 2. - En fait, la notion de régulière séparation est de caractère local. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et X, Y deux fermés de Ω . Si X et Y sont régulièrement séparés, pour tout ouvert $\Theta \subset \Omega$, $\Theta \cap X$ et $\Theta \cap Y$ sont régulièrement séparés. Inversement, si (Θ_i) est un recouvrement de Ω tel que, $\forall i$, $X \cap \Theta_i$ et $Y \cap \Theta_i$ soient régulièrement séparés, X et Y sont régulièrement séparés. Ces faits s'établissent immédiatement en utilisant une partition différentiable de l'unité (et sont d'ailleurs tout aussi évidents à vérifier sur la condition (Λ)).

Exemple : Ensembles analytiques. - Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , un sous-ensemble fermé X de Ω est dit "analytique" si, au voisinage de tout point de X (ou de Ω , cela revient au même), il est défini par un nombre fini d'équations analytiques-réelles $f_i(x) = 0$; il suffit même de prendre une seule équation $\sum f_i^2(x) = 0$. Rappelons le résultat suivant [3] :

PROPOSITION 1. - Deux sous-ensembles analytiques quelconques X et Y de Ω sont régulièrement séparés.

En vertu de la remarque précédente, on peut supposer X (resp. Y) défini par une équation $f(x) = 0$ (resp. $g(x) = 0$). La proposition résulte alors du théorème suivant ([3], ou [4], exposé 22. Nous rappellerons aussi la démonstration dans le prochain exposé) :

THÉORÈME 3 (ŁOJASIEWICZ). - Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et X l'ensemble des zéros de f . Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $x \in K$, on ait $|f(x)| \geq Cd(x, X)^\alpha$.

Pour démontrer la proposition 1, on applique ce théorème à $f^2 + g^2$; quel que soit M compact de Ω , on aura donc, pour tout $x \in M$

$$f^2(x) + g^2(x) \geq Cd(x, X \cap Y)^\alpha \quad ;$$

en particulier, si $x \in M \cap X$ on aura :

$$g^2(x) \geq Cd(x, X \cap Y)^\alpha \quad .$$

Mais la formule des accroissements finis montre qu'il existe $c' \geq 0$ tel qu'on ait, $\forall x \in M \cap X$, $\forall y \in M \cap Y$: $|g(x)| \leq c' \|x - y\|$. Il en résulte aussitôt que la condition (A) est vérifiée, d'où le résultat.

3. Multiplicateurs.

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et X un fermé de Ω .

Définition. - On note $\mathfrak{M}(X; \Omega)$ la sous-espace de $\mathcal{E}(\Omega - X)$ formé des fonctions f possédant la propriété suivante :

Pour tout K compact de Ω , et tout $k \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ et α réel tels qu'on ait, $\forall x \in K - X$

$$|D^k f(x)| \leq Cd(x, X)^\alpha \quad .$$

Exemple. - Soient f une fonction analytique dans Ω , et X l'ensemble de ses zéros ; on a $1/f \in \mathcal{M}(X ; \Omega)$ (résulte du théorème 3 et de la formule de Leibniz).

THÉOREME 4. - Si $f \in \mathcal{M}(X ; \Omega)$, la multiplication par f opère continûment dans $\mathcal{S}(X ; \Omega)$.

Autrement dit : pour tout $g \in \mathcal{S}(X ; \Omega)$, la fonction fg , définie dans $\Omega - X$, se prolonge (d'une manière évidemment unique) en une fonction de $\mathcal{S}(X ; \Omega)$, et l'application ainsi définie est continue.

Démonstration. - Soit $\mathcal{S}'(X ; \Omega)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$ nulles au voisinage de X . La multiplication par f définit une application $\mathcal{S}'(X ; \Omega) \rightarrow \mathcal{S}'(X ; \Omega)$; grâce au lemme 1, il suffit d'établir que cette application est continue pour la topologie induite sur $\mathcal{S}'(X ; \Omega)$ par $\mathcal{E}(\Omega)$. Or, soit $g \in \mathcal{S}'(X ; \Omega)$, et $k \in \mathbb{N}^n$. Par Leibniz, on a (avec des notations évidentes) :

$$D^k(fg) = \sum_{\ell < k} \binom{k}{\ell} (D^\ell f) (D^{k-\ell} g) ;$$

il suffit donc d'établir que lorsque k et ℓ sont fixés, et que x varie dans un compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega$, un entier $m > 0$ et un $C > 0$, tels qu'on ait $\forall g \in \mathcal{S}'(X ; \Omega), \forall x \in K$

$$|D^k f(x) D^{k-\ell} g(x)| \leq C \|g\|_{m, \ell} \quad (\text{cf. notations du paragraphe 2}) .$$

Comme g est nul au voisinage de X , la formule de Taylor montre qu'on pourra trouver un compact $L \subset \Omega$, tel qu'on ait, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$|D^{k-\ell} g(x)| \leq C_m \|g\|_m d(x, X)^{m-|k|+|\ell|} \quad (C_m \geq 0) ;$$

en choisissant m assez grand, et en tenant compte de l'hypothèse $f \in \mathcal{M}(X ; \Omega)$, on trouve le résultat cherché.

Soient maintenant Y et Z deux sous-ensembles fermés de Ω , avec $Z \subset Y$. Nous désignerons par $\mathcal{S}(Z ; Y)$ l'espace des $f \in \mathcal{E}(Y)$ dont la restriction à $\mathcal{E}(Z)$ est nulle (i. e. qui sont "plates sur Z "). Le théorème 4 a le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Soient X et Y deux sous-ensembles fermés de Ω , régulièrement séparés ; et soit $f \in \mathcal{M}(\Omega ; X)$. Alors la multiplication par f opère dans $(X \cap Y ; Y)$.

En effet, comme X et Y sont régulièrement séparés, la projection $\mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ envoie $\mathcal{S}(X; \Omega)$ sur $\mathcal{S}(X \cap Y; Y)$. D'où le résultat.

Remarque. - Il serait possible de définir un espace de multiplicateurs $\mathcal{M}(Z; Y) \subset \mathcal{E}(Y - Z)$ lorsque Y et Z sont des fermés de Ω , avec $Z \subset Y$, et de démontrer dans ce cas un analogue du théorème 4. Comme nous n'aurons pas à utiliser de tels espaces, nous laisserons au lecteur le soin d'examiner cette question.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GLAESER (Georges). - Etude de quelques algèbres tayloriennes, J. Anal. math., Jérusalem, t. 6, 1958, p. 1-124 (Thèse Sc. math. Nancy, 1957).
 - [2] HÖRMANDER (Lars). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv för Math., t. 3, 1958, p. 555-568.
 - [3] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, t. 18, 1959, p. 87-136 ; et Rozprawy Matematyczne, 1961, n° 22, 57 p.
 - [4] MALGRANGE (Bernard). - Division des distributions, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60, n° 21-25, 29 p.
 - [5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tome 1, 2e édition. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1245 ; Publ. Inst. Math. Strasbourg, 9).
 - [6] WHITNEY (H.). - Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 63-89.
-