Jean Cerf

La nullité de $\pi_0(\mathrm{Diff}\, S^3)$. 1. Position du problème

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. nº 9-10, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A3_0>

LA NULLITÉ DE $\pi_0(\mathrm{Diff}\ S^3)$.
1. POSITION DU PROBLÈME

par Jean CERF

Introduction. - Rappelons d'abord la définition des groupes Γ_n, et quelques propriétés élémentaires et classiques relatives à ces groupes.

On désigne par $\mathrm{Diff}\ S^n$ (resp. $\mathrm{Diff}\ D^{n+1}$) le groupe des difféomorphismes de S^n (resp. D^{n+1}) qui conservent l'orientation. On munit ces groupes de la topologie C^∞. On rappelle (cf. [2], proposition 2, p. 287) que, pour toute variété à bord compacte V, le groupe des difféomorphismes de V est ouvert dans l'espace de toutes les applications de classe C^∞ de V dans V qui conservent les relations d'incidence, muni de la topologie C^∞ ; ce groupe est donc en particulier localement connexe par arcs, et même par arcs différentiables ; la composante connexe de l'élément neutre dans ce groupe coïncide donc avec sa composante connexe par arcs, ainsi qu'avec sa composante connexe par arcs différentiables.

LEMME 1 (MILNOR ; cf. [2], p. 336). - *Quels que soient les éléments g et g' du groupe $\mathrm{Diff}\ S^n$, leur commutateur $gg'g^{-1}g'^{-1}$ est dans la composante connexe de l'élément neutre.*

Démonstration. - D'après le théorème d'isotopie pour les plongements des disques (cf. [2], proposition 7, p. 335), il existe g^* (resp. g'^*) isotope à g (resp. g') et induisant l'identité sur l'hémisphère nord (resp. sud) de S^n. Alors $g^* g'^* = g'^* g^*$; donc gg' est isotope à $g'g$.

Conséquence du lemme 1. - *Le groupe $\pi_0(\mathrm{Diff}\ S^n)$ est abélien* (c'est en effet le groupe quotient de $\mathrm{Diff}\ S^n$ par la composante connexe de l'élément neutre).

LEMME 2. - *L'image de l'application canonique $\alpha_n : \mathrm{Diff}\ D^{n+1} \to \mathrm{Diff}\ S^n$ contient la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathrm{Diff}\ S^n$.*

Démonstration du lemme 2. - Soit h un élément de cette composante connexe. D'après la propriété générale rappelee au début de cette introduction, h peut être joint à l'élément neutre e par un chemin différentiable, c'est-à-dire tel que l'application :

(1) $$S^n \times [0\ ,\ 1] \ni (x\ ,\ t) \to h_t . x \in S^n$$

soit différentiable ; par un changement de paramètre, on peut en plus faire en sorte que l'application (1) soit tangente le long de $S^n \times \{1\}$ à l'application $(x, t) \to x$. Soit T un voisinage tubulaire de S^n dans D^{n+1} ; on identifie T à $S^n \times [0, 1]$; on définit une application g de D^{n+1} sur lui-même en posant

$$\begin{cases} g(x, t) = (h_t(x), t) \quad \text{pour} \quad (x, t) \in S^n \times [0, 1] ; \\ g = \text{identité sur} \quad (D^{n+1} - T) \quad . \end{cases}$$

g est un élément de $\mathrm{Diff}\, D^{n+1}$ qui prolonge h ; donc h est dans l'image de α_n.

Conséquences des lemmes 1 et 2.

1° L'image de l'application α_n est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}\, D^n$, et le conoyau de α_n est un groupe abélien.

Par définition, le conoyau de α_n est le groupe Γ_{n+1}.

2° (MUNKRES ; cf. [7], p. 522). Le groupe Γ_{n+1} est canoniquement isomorphe au conoyau de l'application $\pi_0(\mathrm{Diff}\, D^{n+1}) \to \pi_0(\mathrm{Diff}\, S^n)$.

Ceci posé, notre but est de démontrer, dans cet exposé et les suivants, le théorème :

THÉORÈME 1. - *Le groupe* $\pi_0(\mathrm{Diff}\, S^3)$ *est nul.*

Il résulte de la conséquence 2° ci-dessus que le théorème 1 a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. - *Le groupe* Γ_4 *est nul.*

Dans un autre ordre d'idées, le théorème 1, compte tenu de [3], a la conséquence suivante :

COROLLAIRE 2. - *Le groupe* π_3(*groupe des homéomorphismes de* S^3 *sur* S^3) *est canoniquement isomorphe à* $\pi_3(SO(4))$.

1. Le théorème 1 ramené à un théorème d'existence de section d'un certain revêtement.

D'après la proposition 4 de [4], le théorème 1 équivaut à

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; S^2)) = 0 \tag{2}$$

(où $\mathrm{Diff}(D^3 ; S^2)$ désigne le groupe des difféomorphismes de D^3 qui induisent l'identité sur S^2).

Notons $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) le groupe $\mathrm{Diff}\, D^3$ (resp. $\mathrm{Diff}\, S^2$). D'après le théorème 1 de [4], l'application canonique $\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est une fibration localement triviale, de sorte qu'on a une suite exacte :

(3) $$\cdots \pi_1(\mathcal{G}) \to \pi_1(\mathcal{H}) \to \pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; S^2)) \to \pi_0(\mathcal{G}) \to \pi_0(\mathcal{H}) \to \cdots$$

Du théorème 4 de [4] (théorème de Smale), il résulte que l'application composée

$$\pi_i(SO(3)) \to \pi_i(\mathcal{G}) \to \pi_i(\mathcal{H})$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$; donc :

1° $\pi_0(\mathcal{H}) = 0$;

2° l'application : $\pi_i(\mathcal{G}) \to \pi_i(\mathcal{H})$ est surjective pour tout $i \geqslant 1$. Il résulte donc de la suite exacte (3) que (2) équivaut à

(4) $$\pi_0(\mathcal{G}) = 0 \quad .$$

On est donc ramené à montrer que le groupe $\mathcal{G}$ est connexe. Notons $\mathcal{E}$ l'espace des plongements d'orientation positive de D^3 dans $\underset{\sim}{R}^3$; le groupe $\mathcal{G}$ opère à droite dans $\mathcal{E}$, et y définit une structure d'espace fibré principal de fibre $\mathcal{G}$, de base notée $\mathcal{E}/\mathcal{G}$; cette fibration est localement triviale d'après le théorème 3 de [4]. Soit $\mathcal{G}_e$ la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathcal{G}$; on note $\mathcal{E}/\mathcal{G}_e = \mathcal{R}$; il résulte du théorème d'existence de sections locales utilisé en [4], n° 1, pour démontrer le théorème 3, que l'application canonique $\mathcal{R} \to \mathcal{E}/\mathcal{G}$ est une fibration localement triviale ; sa fibre $\mathcal{G}/\mathcal{G}_e$ est discrète parce que $\mathcal{G}$ est localement connexe par arcs ; $\mathcal{R}$ est donc un <u>revêtement surjectif</u> de $\mathcal{E}/\mathcal{G}$. L'espace $\mathcal{E}$ est connexe d'après la proposition 3 de [4] ; donc $\mathcal{R}$ est connexe aussi ; or, d'une façon générale, <u>pour qu'un revêtement connexe soit trivial, il faut et il suffit qu'il admette une section continue</u>. Dans le cas présent, la trivialité de $\mathcal{R}$ équivaut à $\mathcal{G} = \mathcal{G}_e$, donc à (4) ; par conséquent le théorème 1 équivaut au suivant :

THÉORÈME 1'. - <u>Le revêtement</u> $\mathcal{R} = \mathcal{E}/\mathcal{G}_e$ <u>de</u> $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ <u>admet une section continue</u>.

<u>Remarque</u>. - Soit plus généralement $\mathcal{G}_n$ le groupe $\mathrm{Diff}\, D^n$, et soit $\mathcal{G}_{n;e}$ la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathcal{G}_n$. Soit $\mathcal{E}_n$ l'espace des plongements d'orientation positive de D^n dans $\underset{\sim}{R}^n$; soit $\mathcal{R}_n = \mathcal{E}_n/\mathcal{G}_{n;e}$. L'application canonique $\mathcal{E}_n \to \mathcal{R}_n$ est une fibration localement triviale d'après le théorème 3 de [4] ; on a donc une suite exacte :

(5) $$\cdots \pi_1(\mathcal{G}_{n;e}) \to \pi_1(\mathcal{E}_n) \to \pi_1(\mathcal{R}_n) \to 0 \quad .$$

D'après la proposition 3 de [4], l'application composée des applications canoniques :

$$\pi_i(SO(n+1)) \to \pi_i(\mathcal{G}_{n;e}) \to \pi_i(\mathcal{E}_n)$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$; donc l'application $\pi_i(\mathcal{G}_{n;e}) \to \pi_i(\mathcal{E}_n)$ est surjective ; donc, d'après la suite exacte (5), $\pi_1(\mathcal{R}_n) = 0$. En particulier (pour $n = 3$), $\pi_1(\mathcal{R}) = 0$; or le théorème 1, sous la forme 1', affirme que $\mathcal{R}$ s'identifie à $\mathcal{E}/\mathcal{G}$; le théorème 1 a donc le corollaire suivant :

<u>L'espace</u> $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ (<u>espace des sous-variétés de</u> $\underset{\sim}{R}^3$ <u>difféomorphes à</u> D^3) <u>est simplement connexe</u>.

2. Espace des $(n+1)$-disques et espace des n-sphères de $\underset{\sim}{R}^{n+1}$.

Le but de ce numéro est de donner une interprétation nouvelle de l'espace $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ qui intervient dans le théorème 1'.

<u>Notations</u>. - On note $\mathcal{G}_{n+1}$ (resp. $\mathcal{H}_n$) le groupe Diff D^{n+1} (resp. Diff S^n) ; on note α_n l'application canonique $\mathcal{G}_{n+1} \to \mathcal{H}_n$; on note $\mathcal{H}'_n$ l'image de α_n ; on rappelle (cf. Introduction) que $\mathcal{H}_n/\mathcal{H}'_n \simeq \Gamma_{n+1}$. On note $\mathcal{E}_{n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_n$) l'espace des plongements de D^{n+1} (resp. S^n) dans $\underset{\sim}{R}^{n+1}$ qui conservent l'orientation ; on note β_n l'application canonique $\mathcal{E}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$; $\mathcal{G}_{n+1}$ et $\mathcal{H}_n$ opèrent à droite dans $\mathcal{E}_{n+1}$ et $\mathcal{F}_n$ respectivement, de façon compatible avec α_n et β_n. On convient de noter e les éléments distingués respectifs de $\mathcal{G}_{n+1}$ (élément neutre), $\mathcal{E}_{n+1}$ (plongement naturel de D^{n+1} dans R^{n+1}) $\mathcal{E}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1}$, $\mathcal{H}_n$, etc. On note γ_n l'application canoniquement définie par la condition de rendre commutatif le diagramme suivant, où les deux suites horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r] & \mathcal{G}_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \mathcal{E}_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "\beta_n"] & \mathcal{E}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_n"] & e \\
e \arrow[r] & \mathcal{H}_n \arrow[r] & \mathcal{F}_n \arrow[r, "q_n"] & \mathcal{F}_n/\mathcal{H}_n \arrow[r] & e
\end{tikzcd} \quad .$$

Si l'application β_n (resp. γ_n) est <u>surjective</u>, on dit que la <u>conjecture de Schönflies différentiable forte (resp. faible) est vraie pour la sphère</u> S^n.

Soient f et f' deux éléments de $\mathcal{E}_{n+1}$ tels que $\gamma \circ p_{n+1}.f = \gamma \circ p_{n+1}.f'$. D'après l'invariance du bord par plongement, les images $f(D^{n+1})$ et $f'(D^{n+1})$

de f et f' coïncident ; f' est donc de la forme $f \circ g$, où g est un difféomorphisme de D^{n+1}, qui conserve nécessairement l'orientation, puisque sa restriction à S^n la conserve ; on peut donc énoncer :

LEMME 3. - *Si deux éléments de* $\mathcal{E}_{n+1}$ *ont même image par* $\gamma_n \circ p_{n+1}$, *ils ont même image par* p_{n+1} ; *en particulier,* $\gamma_n \circ p_{n+1}$ *et* p_{n+1} *ont même noyau.*

La commutativité du diagramme ci-dessus a alors les conséquences suivantes :

1° L'application γ_n est *injective*.

2° La surjectivité de β_n entraîne trivialement celle de γ_n ; compte tenu du lemme 3, elle entraîne aussi celle de α_n. Réciproquement, la surjectivité de α_n et γ_n entraîne celle de β_n (car l'image de β_n est saturée pour les opérations de $\mathcal{H}'_n$, donc, si α_n est surjectif, pour celles de $\mathcal{H}_n$). On peut donc énoncer :

Pour que la conjecture de Schönflies différentiable forte soit vraie pour S^n, *il faut et il suffit que la conjecture faible correspondante soit vraie, et que* $\Gamma_{n+1} = 0$ (1).

3° D'après les théorèmes 1 et 3 de [4], les applications β_n et q_n sont des fibrations localement triviales ; donc *l'application* γ_n *est ouverte.*

4° L'image de γ_n est celle de $q_n \circ \beta_n$; or, l'image de β_n est un fermé de $\mathcal{F}_n$, saturé pour les opérations de $\mathcal{H}'_n$, donc son image dans $\mathcal{F}_n/\mathcal{H}'_n$ est fermée ; $\mathcal{F}_n/\mathcal{H}'_n$ est fibré sur $\mathcal{F}_n/\mathcal{H}_n$, de fibre Γ_{n+1} ; donc si Γ_{n+1} est fini, l'image de γ_n est fermée. Comme en plus $\mathcal{E}_{n+1}$ est connexe, on peut énoncer :

Si Γ_{n+1} *est fini, l'image de* γ_n *est la composante connexe de* e *dans* $\mathcal{F}_n/\mathcal{H}_n$.

La dimension qui nous intéresse ici est $n = 2$; or, S. SMALE a démontré que Γ_3 est nul (cf. [4], corollaire 3 du théorème 4). Reprenant les notations du n° 1 (c'est-à-dire $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ pour $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{H}_2$), on déduit des propriétés ci-dessus le lemme suivant :

LEMME 4.

1° γ_2 *est un homéomorphisme de* $\mathcal{E}/\mathcal{S}$ *sur la composante connexe de* e *dans* $\mathcal{F}/\mathcal{H}$; $\mathcal{R} = \mathcal{E}/\mathcal{S}_e$ *s'identifie à un revêtement connexe (a priori non surjectif) de* $\mathcal{F}/\mathcal{H}$.

2° *Il y a équivalence entre les quatre propriétés suivantes* :

---

(1) Rappelons que S. SMALE (cf. [8]) a démontré l'exactitude de la conjecture de Schönflies différentiable *faible* pour toute sphère S^n telle que $n \geq 4$.

(i) La conjecture de Schönflies différentiable faible est vraie pour S^2 ;

(ii) la conjecture de Schönflies différentiable forte est vraie pour S^2 ;

(iii) γ_2 est un homéomorphisme de $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}/\mathcal{H}$;

(iiii) $\mathcal{R}$ s'identifie à un revêtement surjectif de $\mathcal{F}/\mathcal{H}$.

Toute la suite de cette série d'exposés est consacrée à démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1". - Le revêtement $\mathcal{R} = \mathcal{E}/\mathcal{G}_e$ de $\mathcal{F}/\mathcal{H}$ admet une section continue au-dessus de $\mathcal{F}/\mathcal{H}$ entier.

Il résulte du lemme 4 que le théorème 1" entraîne d'une part le théorème 1', et par conséquent le théorème 1 ; et d'autre part, qu'il entraîne l'exactitude de la conjecture de Schönflies différentiable forte pour S^2 . Ce dernier résultat est classique : la conjecture combinatoire a été démontrée par ALEXANDER [1], et la conjecture différentiable faible par MORSE et BAÏADA [6]. La démonstration que nous donnons du théorème 1" est une généralisation de la démonstration classique du théorème d'Alexander-Morse ; elle ne fournit donc pas à proprement parler une démonstration nouvelle de ce dernier théorème.

3. Généralités sur le prolongement des sections d'un revêtement.

Le but de ce numéro est de démontrer deux lemmes de prolongement : le lemme 6, grâce auquel, pour démontrer le théorème 1", on pourra se borner à construire une section continue σ au-dessus d'une partie convenable de $\mathcal{F}/\mathcal{H}$; et le lemme 5 qui, d'une part, sert à établir le lemme 6, et, d'autre part, sera utilisé à nouveau à la fin de cet exposé (corollaire 2 de la proposition 7).

Définition. - Soient $\mathcal{A}$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$. Soit $x \in \mathcal{A}$; on dit que $\mathcal{B}$ est localement connexe par arcs dans $\mathcal{A}$ en x si, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de x dans $\mathcal{A}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x dans $\mathcal{A}$ tel que tout couple de points de $\mathcal{V} \cap \mathcal{B}$ puisse être joint par un chemin continu de $\mathcal{U} \cap \mathcal{B}$.

Si cette propriété a lieu pour tout $x \in \mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{B}$ est localement connexe par arcs dans $\mathcal{A}$.

LEMME 5. - Soient $\mathcal{A}$ un espace topologique, et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$. On suppose que :

1) $\mathfrak{A}$ est localement connexe ;

2) $\mathfrak{B}$ est localement connexe par arcs dans $\mathfrak{A}$.

Alors, si $\mathfrak{R}$ est un revêtement et $\mathfrak{A}$, toute section continue de $\mathfrak{R}$ au-dessus de $\mathfrak{B}$ se prolonge en une section continue de $\mathfrak{R}$ au-dessus de l'adhérence $\overline{\mathfrak{B}}$.

Démonstration. - Soit $x \in \overline{\mathfrak{B}}$; d'après (1), il existe un voisinage ouvert connexe $\mathfrak{U}$ de x dans $\mathfrak{A}$, assez petit pour que le revêtement $\mathfrak{R}$ soit trivial au-dessus de $\mathfrak{U}$. D'après (2), il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{V}$ de x dans $\mathfrak{A}$, contenu dans $\mathfrak{U}$, et tel que deux points quelconques de $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{B}$ puissent être joints par un chemin contenu dans $\mathfrak{U}$. Donc, si $\sigma : \mathfrak{B} \to \mathfrak{R}$ est une section continue, σ applique $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{B}$ dans l'un des feuillets (connexes) de $\mathfrak{R}$ au-dessus de $\mathfrak{U}$; il existe donc une section continue, et une seule, de $\mathfrak{R}$ au-dessus de $\mathfrak{U}$, qui prolonge la restriction de σ à $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{B}$, et par suite σ se prolonge par continuité à $\mathfrak{V} \cap \overline{\mathfrak{B}}$. Ce résultat étant valable au voisinage de chaque point de $\overline{\mathfrak{B}}$, le lemme est démontré.

LEMME 6. - Soient $\mathfrak{A}$ un espace topologique, et $\mathfrak{B}$ une partie de $\mathfrak{A}$. On suppose que :

1') $\mathfrak{A}$ est localement connexe par arcs ;

2') $\mathfrak{B}$ est ouvert et dense dans $\mathfrak{A}$;

3') l'espace $\Sigma^1(\mathfrak{B})$ des chemins continus de $\mathfrak{B}$ est dense dans l'espace $\Sigma^1(\mathfrak{A})$ des chemins continus de $\mathfrak{A}$, pour la topologie de la convergence uniforme.

Alors, si $\mathfrak{R}$ est un revêtement de $\mathfrak{A}$, toute section continue de $\mathfrak{R}$ au-dessus de $\mathfrak{B}$ se prolonge en une section continue de $\mathfrak{R}$ au-dessus de $\mathfrak{A}$.

Démonstration. - On se ramène au lemme 5 : puisque $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}$ d'après (2'), il suffira de montrer que la condition (2) du lemme 5 est remplie. Or, d'après (1'), tout $x \in \mathfrak{A}$ possède un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$, connexe par arcs ; on va montrer que $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}$ est connexe par arcs. Soient x' , $x'' \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}$; d'après (1'), il existe un voisinage $\mathfrak{V}'$ de x' et un voisinage $\mathfrak{V}''$ de x'' , tous deux connexes par arcs, et contenus dans $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}$ (qui est ouvert à cause de (2')). Puisque $\mathfrak{U}$ est connexe par arcs, il existe un chemin continu f , contenu dans $\mathfrak{U}$, d'origine x' et d'extrémité x'' . D'après (3') il existe un chemin continu g , contenu dans $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}$, dont l'origine y' est dans $\mathfrak{V}'$ et dont l'extrémité y'' est dans $\mathfrak{V}''$. Comme y' peut être joint à x' par un chemin contenu dans $\mathfrak{V}'$, et y'' à x'' par un chemin contenu dans $\mathfrak{V}''$, on voit qu'il existe un chemin contenu dans $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}$ d'origine x' et d'extrémité x'' .

C. Q. F. D.

4. Etude le l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions différentiables $S^2 \to \mathbb{R}$, et de certains sous-espaces de $\mathcal{K}$.

Le but de ce numéro et du suivant est de définir et d'étudier un sous-espace de $\mathcal{F}/\mathcal{K}$ ayant les propriétés (2') et (3') du lemme 6 ; il faut pour cela commencer par faire un travail analogue sur un espace auxiliaire, l'espace $\mathrm{Hom}(S^2, \mathbb{R})$; c'est le but du présent numéro. On note : $\mathrm{Hom}(S^2, \mathbb{R}) = \mathcal{K}$.

Rappel : les théorèmes de transversalité de Thom (cf. [5], théorèmes 5 et 6). – Dans tout ce qui suit, la variété V est supposée compacte.

THÉORÈME de transversalité local. – Soient V et M deux variétés de classe C^∞ ; soit r un entier $\geqslant 0$; soit N une sous-variété stratifiée de $J^r(V, M)$. L'ensemble des applications f, de classe C^∞, de V dans M, dont la r-ième dérivée $f^{(r)}$ est transversale sur N, est un ouvert partout dense dans $\mathrm{Hom}(V, M)$.

THÉORÈME de transversalité au but. – Soient V et M deux variétés de classe C^∞ ; soit r un entier $\geqslant 0$; soit n un entier $\geqslant 2$; soit Q une sous-variété stratifiée de $(J^r(V, M))^n$; on note Σ_n la partie de $(J^r(V, M))^n$ formée des points dont les n composantes sont toutes distinctes (par exemple, Σ_2 est le complémentaire de la diagonale de $(J^r(V, M))^2$). L'ensemble des applications f, de classe C^∞, de V dans M, telles que la restriction de $(f^{(r)})^n$ à Σ_n soit transversale sur Q, est partout dense dans $\mathrm{Hom}(V, M)$.

Une application classique de ces théorèmes est la démonstration du théorème de Morse sur l'approximation des fonctions réelles. Soit V une variété compacte, et soit $M = \mathbb{R}$; on applique le théorème de transversalité local avec $r = 1$, en prenant pour N le sous-espace de $J^1(V, \mathbb{R})$ formé des jets correspondant à une dérivée nulle ; on trouve ainsi que l'ensemble des fonctions n'ayant qu'un nombre fini de singularités, toutes du type de Morse (i. e., la dérivée seconde est de rang maximum) est un ouvert partout dense de $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$; conformément à la terminologie de Thom, de telles fonctions seront appelées correctes. On applique ensuite le théorème de transversalité au but, avec $r = 1$ et $n = 2$, en prenant pour Q l'intersection de $N \times N$ avec l'image réciproque de la diagonale de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; on trouve ainsi que l'ensemble des fonctions excellentes (au sens de Thom) est dense dans $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$; une fonction excellente est par définition une fonction correcte dont toutes les valeurs critiques sont distinctes. Par ailleurs, il est clair que l'ensemble des fonctions excellentes est ouvert dans l'ensemble des fonctions correctes ; c'est donc un ouvert partout dense de $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.

Dans le cas particulier où $V = S^2$, on notera $\mathcal{K}^0$ le sous-espace de $\mathcal{K}$ formé des fonctions excellentes ; d'après ce qui précède, $\mathcal{K}^0$ est un ouvert partout dense de $\mathcal{K}$; mais l'espace des chemins $\Sigma^1(\mathcal{K}^0)$ n'est certainement pas dense dans $\Sigma^1(\mathcal{K})$, car, en raison de la stabilité des singularités de Morse, tout chemin continu γ dans $\mathcal{K}^0$ est tel que pour toute valeur du paramètre λ, γ_λ a le même nombre de singularités. On est donc amené à se poser la question suivante : quelles singularités un sous-ensemble partout dense de $\Sigma^1(\mathcal{K})$ doit-il nécessairement rencontrer ? L'ensemble des chemins différentiables dans $\mathcal{K}$ étant dense dans $\Sigma^1(\mathcal{K})$, on est conduit à chercher la "forme générique" d'un chemin différentiable dans $\mathcal{K}$, et, pour cela, à appliquer les théorèmes de Thom dans les conditions suivantes : on prend $V = S^2 \times I$ (tout ce qui suit serait d'ailleurs valable en remplaçant S^2 par n'importe quelle variété compacte, de dimension 2), $M = \underset{\sim}{R}$, $r = 2$. Comme dans l'exemple précédent, on applique successivement les deux théorèmes de Thom.

Premier temps. - Application du théorème de transversalité local à la correction d'un chemin différentiable dans $\mathcal{K}$.

On prend pour N le sous-espace de $J^2(S^2 \times I , \underset{\sim}{R})$ formé des jets qui vérifient les deux conditions suivantes : nullité de la dérivée partielle première par rapport à S^2, abaissement du rang de la dérivée partielle seconde par rapport à $S^2 \times S^2$. Considérons une carte locale, définissant des coordonnées (x , y) dans un ouvert $\mathcal{U}$ de S^2, difféomorphe à $\underset{\sim}{R}^2$. L'application qui à tout point $((x , y) , \lambda) \in \mathcal{U} \times I$ et à tout chemin différentiable f dans $\mathcal{K}$ associe le point

$$(x , y , \lambda , z , p , q , \mu , r , s , t , \nu , \xi , \rho) \in \underset{\sim}{R}^2 \times I \times \underset{\sim}{R}^{10}$$

défini par les équations :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = f(x , y , \lambda) \\ p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x , y , \lambda) \; ; \quad q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x , y , \lambda) \; ; \quad \mu = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(x , y , \lambda) \\ r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x , y , \lambda) \; ; \quad s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(x , y , \lambda) \; ; \quad t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x , y , \lambda) \\ \nu = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial \lambda}(x , y , \lambda) \; ; \quad \xi = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial \lambda}(x , y , \lambda) \; ; \quad \rho = \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(x , y , \lambda) \end{array} \right. \; ;$$

définit un difféomorphisme de la partie de $J^2(S^2 \times I , \underset{\sim}{R})$ située au-dessus de $\mathcal{U}$, sur $\underset{\sim}{R}^2 \times I \times \underset{\sim}{R}^{10}$. Pour ce système de coordonnées locales de $J^2(S^2 \times I , \underset{\sim}{R})$, la restriction de l'application $f^{(2)}$ à $\mathcal{U} \times I$ est définie par :

$$f^{(2)}(x\,,\,y\,,\,\lambda) = (x\,,\,y,\lambda\,,\,z\,,\,p\,,\,q\,,\,\mu\,,\,r\,,\,s\,,\,t\,,\,\nu\,,\,\xi\,,\,\rho)$$

où z, p, q, etc. sont définis par les équations (6). Notons d'autre part $N_{\mathcal{U}}$ la partie de N située au-dessus de $\mathcal{U}$; les équations de $N_{\mathcal{U}}$ dans le système ci-dessus sont :

$$(7) \qquad \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \\ rt - s^2 = 0 \end{cases} ;$$

autrement dit, $N_{\mathcal{U}} = \psi^{-1}(0)$, où ψ est l'application :

$$\underset{\sim}{R}^2 \times I \times \underset{\sim}{R}^{10} \ni (x\,,\,y\,,\,\lambda\,,\,z\,,\,p\,;\,q\,;\,\ldots) \to (p\,;\,q\,,\,rt - s^2) \in \underset{\sim}{R}^3 \quad .$$

La stratification de $N_{\mathcal{U}}$ est la suivante : les singularités de $N_{\mathcal{U}}$ sont les points où l'application ψ est de rang < 3, c'est-à-dire ceux où l'on a :

$$r = s = t = 0 \quad ;$$

elles forment une sous-variété de codimension 5 de $\underset{\sim}{R}^2 \times I \times \underset{\sim}{R}^{10}$; d'après le théorème de transversalité local, l'ensemble des fonctions f, telles que l'image de $f^{(2)}$ ne rencontre pas cette sous-variété, est un ouvert partout dense de $\mathcal{K}$. On peut donc se borner à écrire la condition de transversalité de $f^{(2)}$ sur $N_{\mathcal{U}}$ aux points <u>non singuliers</u> de $N_{\mathcal{U}}$. En ces points, ψ est de rang 3, de sorte que la condition de transversalité n'est autre que : $\psi \circ f^{(2)}$ <u>est de rang maximum en tout point</u> $((x\,,\,y)\,,\,\lambda) \in \mathcal{U} \times I$ <u>tel que</u> $p = q = rt - s^2 = 0$ [p, q, r, s et t étant définis par les équations (6), de sorte que ce sont des fonctions de $(x\,,\,y\,,\,\lambda)$]. Cette condition peut encore d'exprimer comme suit : <u>le déterminant fonctionnel</u> $\dfrac{D(p,\,q\,,\,rt - s^2)}{D(x\,,\,y\,,\,\lambda)}$ <u>est</u> $\neq 0$ <u>en tout point où</u> $p = q = rt - s^2 = 0$. On notera que l'expression ci-dessus de la condition de transversalité a été obtenue dans une carte locale arbitraire ; ceci justifie la définition suivante :

<u>Définition 1</u>. - Soit f un chemin dans $\mathcal{K}$; on identifie f à l'application de $S^2 \times I$ dans $\underset{\sim}{R}$ qui lui est associée. On dit que f est <u>correct</u> s'il est différentiable, et si pour un système de coordonnées locales $(x\,,\,y)$ de S^2 (pour lesquelles on pose : $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = q$) les fonctions

$$p\,,\,q\,,\,\frac{D(p\,,\,q)}{D(x\,,\,y)}\,,\,\frac{D\left(p\,,\,q\,,\,\frac{D(p\,,\,q)}{D(x\,,\,y)}\right)}{D(x\,,\,y\,,\,\lambda)}$$

ne s'annulent jamais simultanément.

De ce qui précède et du théorème de transversalité local résulte la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - <u>Les chemins corrects forment un ouvert partout dense dans l'espace des chemins différentiables à valeurs dans</u> $\mathcal{K}$, <u>muni de la topologie</u> C^∞ <u>des applications de</u> $S^2 \times I$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{R}$.

<u>Etude d'un chemin correct</u>. - Soit $f : \lambda \to f_\lambda$ un chemin correct dans $\mathcal{K}$; on lui associe les deux courbes suivantes :

- <u>l'indicatrice</u> $\mathfrak{J}$ de f : c'est la partie de $S^2 \times I$ formée des (v , λ) tels que v soit un point singulier de f_λ .

- le <u>graphique</u> de f : c'est l'image de l'indicatrice par l'application γ : $(v , \lambda) \to (\lambda , f_\lambda(v))$; c'est la partie de $I \times \underset{\sim}{R}$ formée des (λ , z) tels que z soit valeur singulière de f_λ .

L'étude se fait à l'aide de coordonnées locales (x , y) de S^2 ; les notations p , q , r , s , t sont celles définies par les équations (6) ; on pose en plus :

$$\frac{D(p , q)}{D(x , y)} = rt - s^2 = \delta ; \qquad \frac{D(p , q , \delta)}{D(x , y , \lambda)} = \omega \qquad .$$

Les équations locales de l'indicatrice sont :

$$(8) \qquad \begin{cases} p(x , y , \lambda) = 0 \\ q(x , y , \lambda) = 0 \end{cases} \qquad .$$

1° Sur l'indicatrice, δ et ω ne s'annulent jamais simultanément ; donc la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$$

est toujours de rang 2 . Donc <u>l'indicatrice est une courbe sans singularité</u> ; <u>dans chaque système de coordonnées locales, les surfaces</u> $p(x , y , \lambda) = 0$ <u>et</u> $q(x , y , \lambda) = 0$ <u>se coupent transversalement le long de l'indicatrice</u>.

2° La surface $\delta(x , y , \lambda) = 0$ est transversale à l'indicatrice ; elle la coupe donc en un nombre <u>fini</u> de points ; ce sont les points à tangente horizontale de l'indicatrice. En un tel point, ω est non nul ; donc l'un au moins des déterminants $\frac{D(p , q)}{D(y , \lambda)}$ et $\frac{D(p , q)}{D(\lambda , x)}$ est non nul ; supposons que ce soit $\frac{D(p , q)}{D(\lambda , x)}$; on peut alors résoudre les équations (8) au voisinage de ce point, et en tirer x et λ en fonction de y ; il sera plus commode de prendre le paramètre u , nul à l'origine, et défini par la condition : $\frac{du}{dy} = \frac{1}{\frac{D(p , q)}{D(\lambda , x)}}$. On a :

(9) $$\frac{d\lambda}{du} = \delta \ ; \qquad \frac{d^2\lambda}{du^2} = \frac{d\delta}{du} = \omega \ .$$

Comme ω ne peut s'annuler en un point à tangente horizontale de l'indicatrice, on en déduit :

<u>L'indicatrice est une courbe correcte relativement à la projection de</u> $S^2 \times I$ <u>sur</u> I. <u>En particulier, au voisinage d'un point à tangente horizontale, l'indicatrice est d'un seul côté du plan tangent horizontal.</u>

3° <u>Etude de la singularité présentée par la fonction</u> f_λ <u>en un point</u> (x , y) <u>tel que</u> (x , y , λ) <u>soit un point à tangente horizontale de l'indicatrice.</u> ω étant non nul en un tel point, l'un au moins des déterminants $\frac{D(p , \delta)}{D(x , y)}$ et $\frac{D(q , \delta)}{D(x , y)}$ est non nul ; il en résulte qu'au point (x , y) la fonction f_λ vérifie les conditions suivantes :

(i) la dérivée première est nulle ;

(ii) la forme quadratique des dérivées secondes est de rang 1 ;

(iii) la forme quadratique des dérivées secondes et la forme des dérivées troisièmes sont premières entre elles.

<u>Mise sous forme canonique de cette singularité</u> (à l'aide d'un difféomorphisme local de la source S^2). - On suppose $\lambda = 0$ et $(x , y) = (0 , 0)$. D'après (i) et (ii), on peut supposer :

$$\frac{\partial f_o}{\partial x}(0 , 0) = \frac{\partial f_o}{\partial y}(0 , 0) = \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \, \partial y}(0 , 0) = \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2}(0 , 0) = 0 \ ; \qquad \frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2}(0 , 0) = 2 \ .$$

La formule de Taylor donne alors :

$$f_o(x , y) = x^2 + \int_0^1 \left[y^3 \frac{\partial^3 f_o}{\partial y^3}(tx, ty) + 3y^2 x \frac{\partial^3 f_o}{\partial y^2 \partial x}(tx, ty) + 3yx^2 \frac{\partial^3 f_o}{\partial y \partial x^2}(tx, ty) + x^3 \frac{\partial^3 f_o}{\partial x^3}(tx, ty) \right] \frac{(1-t)^2}{2} dt .$$

Donc f_o peut s'écrire :

$$f_o(x , y) = x^2 + a_o(x , y)\, y^3 + 3a_1(x , y)\, y^2 x + 3a_2(x , y)\, yx^2 + a_3(x , y)\, x^3$$

où a_o, a_1, a_2 et a_3 sont des fonctions de classe C^∞ ; en particulier :

$$a_o(x , y) = \int_0^1 \frac{\partial^3 f_o}{\partial y^3}(tx , ty) \frac{(1 - t)^2}{2} dt$$

de sorte que $a_o(0 , 0) = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^3}(0 , 0)$; donc, d'après (iii), $a_o(0 , 0)$ est non nul ; de sorte que les équations :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = (a_o(x\,,\,y))^{1/3}\ (y + \dfrac{a_1(x\,,\,y)}{a_o(x\,,\,y)}\,x) \end{cases}$$

définissent un difféomorphisme local qui ramène f à la forme :

$$f_o(X\,,Y) = X^2 + Y^3 + b(x\,,\,y)\ YX^2 + c(x\,,\,y)\ X^3 \quad .$$

Par le difféomorphisme local défini par les équations :

$$\begin{cases} \xi = X\sqrt{1 + b(x\,,\,y)\ Y + c(x\,,\,y)\ X} \\ \eta = Y \end{cases}$$

f_o prend alors la forme

$$f_o(\xi\,,\,\eta) = \xi^2 + \eta^3 \quad .$$

En résumé : <u>en un point</u> $(x\,,\,y)$ <u>tel que</u> $(x\,,\,y\,,\,\lambda)$ <u>soit un point à tangente horizontale de l'indicatrice,</u> f_λ <u>présente une singularité du type</u> $f_\lambda(x\,,\,y) = x^2 + y^3$.

4° <u>Etude locale (à la source) de l'application</u> γ <u>de l'indicatrice sur le graphique</u>. – Soit $(x_o\,,\,y_o\,,\,\lambda_o)$ un point de l'indicatrice, il lui correspond le point $(\lambda_o\,,\,f_{\lambda_o}(x_o\,,\,y_o))$ du graphique ; deux cas sont à distinguer :

a. <u>La tangente à l'indicatrice au point</u> $(x_o\,,\,y_o\,,\,\lambda_o)$ <u>n'est pas horizontale</u>; on peut alors prendre λ comme paramètre local sur l'indicatrice ; par conséquent <u>l'application</u> γ <u>est au voisinage d'un tel point un plongement, dont l'image dans le plan des</u> $(\lambda\,,\,z)$ <u>est un arc de courbe dont la tangente n'est jamais parallèle à l'axe des</u> z . (Rappelons que ce cas correspond à celui où $(x_o\,,\,y_o)$ est une singularité de Morse pour f_{λ_o} .)

b. <u>La tangente à l'indicatrice au point</u> $(x_o\,,\,y_o\,,\,\lambda_o)$ <u>est horizontale</u>. (D'après le 2°, ceci correspond au cas où $(x_o\,,\,y_o)$ est une singularité non de Morse pour f_{λ_o} , et n'a lieu que pour un nombre <u>fini</u> de points.) On suppose que $x_o = y_o = \lambda_o = 0$, et on note $(x_o\,,\,y_o\,,\,\lambda_o) = 0$. On note :

$$\frac{D(p\,,\,q)}{D(y\,,\,\lambda)} = D_1\ ; \qquad \frac{D(p\,,\,q)}{D(\lambda\,,\,x)} = D_2 \quad .$$

Comme au 2°, on suppose $D_2(0) \neq 0$, ce qui entraîne $r(0) \neq 0$; le graphique est défini localement en fonction du paramètre u du 2°, par les équations :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(u) \\ z = f(x(u)\,,\,y(u)\,,\,\lambda(u)) \end{cases} \quad .$$

Les notations $r\,,\,s\,,\,t\,,\,\mu\,,\,\nu\,,\,\xi\,,\,\rho$ qu'on va utiliser sont celles définies par les équations (6) ; on notera qu'on a identiquement $\frac{dp}{du} = \frac{dq}{du} = 0$. On a :

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{du} = \dfrac{D(f\,,\,p\,,\,q)}{D(x\,,\,y\,,\,\lambda)} = pD_1 + qD_2 + \mu\delta & ; \\[2ex] \dfrac{d^2 z}{du^2} = \dfrac{d\mu}{du}\,\delta + p\,\dfrac{dD_1}{du} + q\,\dfrac{dD_2}{du} + \mu\,\dfrac{d\delta}{du} & ; \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{du}(0) = 0 & ; \\[2ex] \dfrac{d^2 z}{du^2}(0) = \mu(0)\,\dfrac{d\delta}{du}(0) & ; \\[2ex] \dfrac{d^3 z}{du^3}(0) = 2\,\dfrac{d\mu}{du}(0)\,\dfrac{d\delta}{du}(0) + \mu(0)\,\dfrac{d^2\delta}{du^2}(0) & ; \end{cases}$$

Donc, compte tenu de (9) :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2\lambda}{du^2}(0) & \dfrac{d^3\lambda}{du^3}(0) \\[2ex] \dfrac{d^2 z}{du^2}(0) & \dfrac{d^3 z}{du^3}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{d\delta}{du}(0) & \dfrac{d^2\delta}{du^2}(0) \\[2ex] \mu(0)\,\dfrac{d\delta}{du}(0) & \dfrac{2d\mu}{du}(0)\,\dfrac{d\delta}{du}(0) + \mu(0)\,\dfrac{d^2\delta}{du^2}(0) \end{vmatrix}$$

$$= 2\omega^2(0)\,\frac{d\mu}{du}(0) \quad .$$

Or :

$$\frac{d\mu}{du} = \frac{D(\mu\,,\,p\,,\,q)}{D(x\,,\,y\,,\,\lambda)} = -\begin{vmatrix} \nu & \xi & \rho \\ s & t & \xi \\ r & s & \nu \end{vmatrix}$$

donc

$$\frac{d\mu}{du}(0) = -\frac{D_2^2(0)}{r(0)} \neq 0 \quad .$$

On peut énoncer : si $(x_o\,,\,y_o\,,\,\lambda_o)$ est un point à tangente horizontale de l'indicatrice, l'application γ a en ce point un rebroussement de première espèce ; et la tangente au graphique au point $\gamma(x_o\,,\,y_o\,,\,\lambda_o)$ n'est pas parallèle à l'axe des z .

En rassemblant les résultats de (a) et (b), on obtient le lemme suivant :

LEMME 7. – Soit f un chemin correct dans $\mathcal{K}$.

1° Le graphique de f est une courbe différentiable de $I \times \mathbb{R}$ (où les coordonnées sont λ et z) ayant des singularités de deux sortes :

- des points de rebroussement de première espèce, en nombre fini ;
- des points multiples d'ordre fini (c'est-à-dire qu'en chacun de ces points se croisent un nombre fini de branches ; mais le nombre de ces points peut être infini).

En outre, la tangente à une branche du graphique n'est jamais parallèle à l'axe des z.

2° Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de la diagonale $\Delta_{\mathfrak{I}^2}$ de l'indicatrice tel que $\gamma^2(\mathcal{V} - \Delta_{\mathfrak{I}^2})$ ne rencontre pas la diagonale de $(I \times \mathbb{R})^2$.

Etude du voisinage d'un chemin correct.

LEMME 8. — Soit $\mathfrak{I}$ une variété compacte de dimension 1 ; on note $\mathfrak{L}$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}^2$, qui sont de rang 1 sauf en un nombre fini de points, en lesquels il y a rebroussement de première espèce, et soit $\gamma \in \mathfrak{L}$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage compact de la diagonale $\Delta_{\mathfrak{I}^2}$; soit $\mathfrak{X}$ un voisinage (dans $(\mathbb{R}^2)^2$) de $\gamma^2(\mathcal{V} - \Delta_{\mathfrak{I}^2}) \cap \Delta_{(\mathbb{R}^2)^2}$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de γ dans $\mathfrak{L}$ tel que, pour tout $\gamma'' \in \mathfrak{L}$,

$$\gamma''^2(\mathcal{V} - \Delta_{\mathfrak{I}^2}) \cap \Delta_{(\mathbb{R}^2)^2} \subset \mathfrak{X} \quad .$$

Démonstration. — On se ramène immédiatement à une propriété locale de la singularité "point de rebroussement de première espèce" : soit φ une injection de classe C^∞ : $[0 , 1] \to \mathbb{R}^2$, ayant un rebroussement de première espèce au point 1/2, de rang 1 ailleurs; toute application φ' suffisamment voisine de φ, et ayant un point de rebroussement, est injective. [Pour montrer ceci, on peut soit étudier un voisinage de φ dans $\mathrm{Hom}([0 , 1] , \mathbb{R}^2)$; soit faire une démonstration directe à l'aide de la formule de Taylor.]

PROPOSITION 2. — Soit f un chemin correct dans $\mathcal{K}$; soit $\mathcal{U}$ un voisinage suffisamment petit de f dans $\mathrm{Hom}(S^2 \times I , \mathbb{R})$.

1° L'application qui à $f' \in \mathcal{U}$ associe son indicatrice $\mathfrak{I}'$ est une application continue de $\mathcal{U}$ dans l'espace (muni de la topologie définie en [4], théorème 3) des sous-variétés de $S^2 \times I$ difféomorphes à $\mathfrak{I}$. De même l'ensemble des points à tangente horizontale de $\mathfrak{I}'$ (en tant que sous-variété de dimension zéro) varie continuement en fonction de f'.

2° Pour tout voisinage $\mathfrak{X}_\alpha$ de l'ensemble des points de rebroussement du graphique de f, on peut choisir $\mathcal{U}$ de façon que pour tout $f' \in \mathcal{U}$ l'ensemble des points de rebroussement du graphique de f' soit contenu dans $\mathfrak{X}_\alpha$.

3° Il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de la diagonale Δ de $(S^2 \times I)^2$ tel que pour tout $(f' , \lambda) \in \mathcal{U} \times I$, f'_λ n'ait pas de couple de points singuliers, distincts, voisins d'ordre $\mathcal{W}$, ayant même valeur singulière.

4° Pour tout voisinage $\mathfrak{X}_\beta$ de l'ensemble des points doubles du graphique de f, on peut choisir $\mathcal{U}$ de façon que pour tout $f' \in \mathcal{U}$, l'ensemble des points doubles du graphique de f' soit contenu dans $\mathfrak{X}_\beta$.

Démonstration. — On supposera que $\mathcal{U}$ est contenu dans l'ensemble des chemins corrects, ce qui est possible d'après la proposition 1.

1° D'après la propriété 1° (resp. 2°) des chemins corrects, l'indicatrice d'un chemin correct f' (resp. l'ensemble de ses points à tangente horizontale) est définie comme l'intersection de deux (resp. trois) surfaces transversales, qui varient continuement en fonction de f'. D'où le 1°.

2° D'après le théorème 3 de [4], et le 1° ci-dessus, il existe, si $\mathcal{U}$ est assez petit, une application continue qui à $f' \in \mathcal{U}$ associe $g_{f'} \in \mathrm{Diff}(S^2 \times I)$, telle que

$$\begin{cases} g_f = \text{identité} ; \\ g_{f'}(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}' ; \\ g_{f'} \text{ met en correspondance les points à tangente horizontale de } \mathfrak{J} \text{ et de } \mathfrak{J}' . \end{cases}$$

L'application γ de $\mathfrak{J}$ sur le graphique de f est la restriction à $\mathfrak{J}$ de l'application $\tilde{\gamma}$ de $S^2 \times I$ dans $I \times \underset{\sim}{R}$ définie par :

$$\tilde{\gamma}(x , y , \lambda) = (\lambda , f(x , y , \lambda) \qquad ;$$

de même γ' est la restriction à $\mathfrak{J}'$ de l'application $\tilde{\gamma}'$, voisine de $\tilde{\gamma}$. Donc l'application $\gamma'' = \gamma' \circ g_{f'} \mid \mathfrak{J}$ est voisine de γ ; or les points de rebroussement du graphique de f (resp. f') sont les images par γ (resp. γ'') des points à tangente horizontale de $\mathfrak{J}$. D'où le 2°.

3° Il existe d'après le 2° du lemme 7 un voisinage $\mathcal{V}$ de la diagonale $\Delta_{\mathfrak{J}^2}$ de $\mathfrak{J}^2$ tel que $\gamma^2(\mathcal{V} - \Delta_{\mathfrak{J}^2})$ ne rencontre pas $\Delta_{(I \times R)^2}$; on choisit un tel $\mathcal{V}$ qui soit en plus compact. D'après le lemme 8, on peut choisir $\mathcal{U}$ de façon que pour tout $f' \in \mathcal{U}$, $(\gamma' \circ g_{f'} \mid \mathfrak{J})^2 (\mathcal{V} - \Delta_{\mathfrak{J}^2})$ ne rencontre pas non plus $\Delta_{(I \times R)^2}$. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de la diagonale Δ de $(S^2 \times I)^2$ tel que, pour tout $f' \in \mathcal{U}$, on ait :

$$\mathcal{W} \cap \mathfrak{J}'^2 = (g_{f'})^2 (\mathcal{V}) \qquad ;$$

(un tel $\mathcal{W}$ existe si $\mathcal{U}$ est assez petit ; car si d désigne une distance sur $S^2 \times I$, et si $\varepsilon > 0$ est tel que $\mathcal{V}$ contienne tous les couples de points (u_1 , u_2) tels que $d(u_1 , u_2) \leq \varepsilon$, alors dès que $g_{f'}$ est assez petit au sens C^0, $(g_{f'})^2 (\mathcal{V})$ contient tous les couples (u'_1 , u'_2) tels que $d(u'_1 , u'_2) \leq \varepsilon/2$. On a alors :

$$\mathfrak{W} \cap (\mathfrak{J}'^2 - \Delta_{\mathfrak{J}'^2}) = (\mathfrak{W} \cap \mathfrak{J}'^2) - \Delta_{\mathfrak{J}'^2} = (g_{f'})^2 \, (\mathfrak{V} - \Delta_{\mathfrak{J}^2}) \quad ;$$

de sorte que :

$$\gamma(\mathfrak{W} \cap (\mathfrak{J}'^2 - \Delta_{\mathfrak{J}'^2})) = (\gamma' \circ g_{f'} \mid \mathfrak{J})^2 \, (\mathfrak{V} - \Delta_{\mathfrak{J}^2}) \quad ;$$

par conséquent $\gamma(\mathfrak{W} \cap (\mathfrak{J}'^2 - \Delta_{\mathfrak{J}'^2}))$ ne rencontre pas $\Delta_{(I \times \underset{\sim}{R})^2}$. D'où le 3°.

4° On applique le lemme 8, avec $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{X}_\beta$ et $\gamma' \circ g_{f'} \mid \mathfrak{J}^{\sim}$ dans les rôles respectifs de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{X}$ et γ''.

<u>Deuxième temps</u>. – <u>Application du théorème de transversalité au but : chemins excellents</u>. On note N_o la partie de $J^2(S^2 \times I, \underset{\sim}{R})$ définie en coordonnées locales par les équations

(11)
$$p = q = 0 \quad .$$

On a : $N \subset N_o$, puisque N est défini par (7).

On désigne par π (resp. χ) la projection de $J^2(S^2 \times I, \underset{\sim}{R})$ sur la composante I de l'espace-source (resp. sur l'espace-but $\underset{\sim}{R}$). On note Δ_{I^n} la diagonale de I^n (ensemble des points ayant toutes leurs coordonnées égales) ; π^n est la projection de $(J^2(S^2 \times I, \underset{\sim}{R}))^n$ sur I^n canoniquement définie par π ; notations analogues : $\Delta_{\underset{\sim}{R}^n}$, χ^n. La notation Σ_n est celle définie dans l'énoncé du théorème de transversalité au but (avec $r = 2$). On pose :

$$(N_o \times N_o) \cap \overset{-1}{\pi^2}(\Delta_{I^2}) \cap \overset{-1}{\chi^2}(\Delta_{\underset{\sim}{R}^2}) = P \quad .$$

<u>Définition 2</u>. – On dit qu'un chemin dans $\mathcal{K}$ est <u>excellent</u> s'il est correct, et si en plus, les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

1) La restriction de $f^{(2)} \times f^{(2)}$ à Σ_2 est transversale sur P ;

2) La restriction de $f^{(2)} \times f^{(2)}$ à Σ_2 est transversale sur $(N \times N) \cap \overset{-1}{\pi^2}(\Delta_{I^2})$;

3) La restriction de $f^{(2)} \times f^{(2)} \times f^{(2)}$ à Σ_3 est transversale sur

$$(N_o \times N_o \times N_o) \cap \overset{-1}{\pi^3}(\Delta_{I^3}) \cap \overset{-1}{\chi^3}(\Delta_{\underset{\sim}{R}^3}) \quad ;$$

4) La restriction de $f^{(2)} \times f^{(2)} \times f^{(2)}$ à Σ_3 est transversale sur $(P \times N) \cap \overset{-1}{\pi^3}(\Delta_{I^3})$;

5) La restriction de $f^{(2)} \times f^{(2)} \times f^{(2)} \times f^{(2)}$ à Σ_4 est transversale sur $(P \times P) \cap \overset{-1}{\pi^4}(\Delta_{I^4})$.

Description d'un chemin excellent. - On note C_1 (resp. C_2, etc.) l'ensemble des chemins corrects vérifiant la condition (1) (resp. (2), etc.) de la définition 2.

Description de C_1. - La source de $f^{(2)} \times f^{(2)}$ est de dimension 6 ; P est défini par les six équations indépendantes :

$$(12) \qquad \begin{cases} p = p' = 0 \\ q = q' = 0 \\ \lambda = \lambda' \\ z = z' \end{cases} .$$

Supposons $f \in C_1$; il résulte en particulier du théorème de transversalité au but que pour tout voisinage W de la diagonale Δ de $(S^2 \times I)^2$, l'image de la restriction de $f^{(2)} \times f^{(2)}$ au complémentaire de W rencontre P en un nombre fini de points. Or, d'après le 3° de la proposition 2 (qu'on utilise dans un cas particulier simple qui est une conséquence immédiate du 2° du lemme 7), on peut choisir W de façon que l'image de la restriction de $f^{(2)} \times f^{(2)}$ à $W - \Delta$ ne rencontre pas P ; l'image de la restriction de $f^{(2)} \times f^{(2)}$ au complémentaire de Δ ne rencontre alors P qu'en un nombre fini de points. La condition de transversalité en ces points s'écrit :

$$\frac{D(p , q , p' , q' , \lambda - \lambda' , z - z')}{D(x , y , \lambda , x' , y' , \lambda')} \neq 0 ,$$

c'est-à-dire :

$$\delta(x , y , \lambda) \frac{D(z' , p' , q')}{D(x' , y' , \lambda')} - \delta(x' , y' , \lambda') \frac{D(z , p , q)}{D(x , y , \lambda)} \neq 0 .$$

Il résulte donc de (9) et (10) :

Les éléments de C_1 sont les chemins corrects vérifiant les conditions suivantes : le graphique n'a qu'un nombre fini de points multiples ; il sont distincts des points de rebroussement ; et en un point multiple, deux branches quelconques se croisent transversalement.

Description de C_2. - Les équations locales de $(N \times N) \cap \overset{-1}{\pi}{}^2(\Delta_{I^2})$ sont :

$$\begin{cases} p = q = \delta = p' = q' = \delta' = 0 \\ \lambda = \lambda' \end{cases} .$$

Elles sont au nombre de 7 ; elles sont évidemment indépendantes ; la condition de transversalité se réduit donc à la condition d'intersection vide ; par conséquent :

Les éléments de C_2 sont les chemins corrects tels que, quelle que soit la valeur de λ, f_λ ait au plus une singularité non de Morse.

Description de C_3. – La source de $f^{(2)} \times f^{(2)} \times f^{(2)}$ est de dimension 9. Les équations locales de la variété sur laquelle on transversalise s'obtiennent en ajoutant au système (12) les équations

$$\begin{cases} p'' = q'' = 0 \\ \lambda = \lambda'' \\ z = z'' \end{cases}.$$

Cette variété est de codimension 10 ; la condition de transversalité se réduit donc à la condition d'intersection vide ; par conséquent :

Les éléments de C_3 sont les chemins corrects dont le graphique n'a pas de point multiple où se croisent plus de deux branches (autrement dit tous les points multiples sont des points doubles).

Description de C_4. – Les équations locales de la variété sur laquelle on transversalise s'obtiennent en ajoutant au système (12) les équations

$$\begin{cases} p'' = q'' = \delta'' = 0 \\ \lambda = \lambda'' \end{cases}.$$

Cette variété est de codimension 10 ; la condition de transversalité se réduit donc à la condition d'intersection vide ; par conséquent :

Les éléments de C_4 sont les chemins corrects tels que, pour aucune valeur de λ, f_λ n'ait trois points singuliers distincts, tels que l'un soit non de Morse, et que les deux autres aient des valeurs singulières égales.

Description de C_5. – La source de $f^{(2)} \times f^{(2)} \times f^{(2)} \times f^{(2)}$ est de dimension 12. Les équations de la variété sur laquelle on transversalise s'obtiennent en ajoutant au système (12) les équations

$$\begin{cases} p'' = p''' = q'' = q''' = 0 \\ \lambda = \lambda'' = \lambda''' \\ z'' = z''' \end{cases}.$$

Cette variété est de codimension 13 ; la condition de transversalité se réduit donc à la condition d'intersection vide ; par conséquent :

Les éléments de C_5 sont les chemins corrects dont le graphique n'a aucun couple de points multiples distincts correspondant à la même valeur de λ.

En rassemblant ces résultats, on obtient une caractérisation nouvelle des chemins excellents :

PROPOSITION 3. - Pour qu'un chemin dans $\mathcal{K}$ soit excellent, il faut et il suffit qu'il soit correct, et que son graphique n'ait qu'un nombre fini de singularités, qui soient toutes de l'un des deux types suivants :

- points de rebroussement de première espèce ;
- points doubles, en lesquels les deux branches se croisent transversalement.

Notations. - On rappelle qu'on a noté $\mathcal{K}^o$ le sous-espace de $\mathcal{K}$ formé des fonctions excellentes.

On note $\mathcal{K}^1_\alpha$ le sous-espace de $\mathcal{K}$ formé des fonctions qui

a. ont un nombre fini de singularités, toutes du type de Morse, à l'exception d'une seule, qui est du type $f = x^2 + y^3$; et

b. ont toutes leurs valeurs singulières distinctes.

On note $\mathcal{K}^1_\beta$ le sous-espace de $\mathcal{K}$ formé des fonctions correctes qui ont exactement deux valeurs critiques égales.

On a :

$$\mathcal{K}^1_\alpha \cap \mathcal{K}^1_\beta = \emptyset \quad .$$

On note

$$\mathcal{K}^1_\alpha \cup \mathcal{K}^1_\beta = \mathcal{K}^1 \quad .$$

Avec ces notations, la proposition 3 s'interprète comme suit :

PROPOSITION 3'. - Pour qu'un chemin dans $\mathcal{K}$ soit excellent, il faut et il suffit qu'il soit correct, à valeurs dans $\mathcal{K}^o \cup \mathcal{K}^1$, qu'il ne rencontre $\mathcal{K}^1_\beta$ que pour un nombre fini de valeurs de λ, et que, pour chacune de ces valeurs, les deux branches du graphique de croisent transversalement.

Remarque. - Un chemin correct rencontre $\mathcal{K}^1_\alpha$ en un nombre fini de points ; donc un chemin excellent rencontre $\mathcal{K}^1$ en un nombre fini de points.

PROPOSITION 4.

1° Les chemins excellents forment un ouvert partout dense dans $\mathrm{Hom}(S^2 \times I , \underset{\sim}{R})$.

2° Soit f un chemin excellent ; soit f' un chemin voisin de f ; l'ensemble des points de rebroussement du graphique de f' , ainsi que l'ensemble des points singuliers correspondants, varient continuement en fonction de f' . Même résultat pour l'ensemble des points doubles du graphique de f' , ainsi que pour l'ensemble des couples de points singuliers correspondants.

<u>Démonstration</u>. — Le théorème de transversalité au but entraîne que les ensembles C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 des chemins corrects vérifiant respectivement les conditions (1), (2), (3), (4), (5) de la définition 2, sont des sous-ensembles <u>partout denses</u> de $\mathrm{Hom}(S^2 \times I, \underset{\sim}{R})$; donc si l'on montre que C_1, C_2, C_3, C_4 et $C_1 \cap C_5$ sont <u>ouverts</u>, on aura établi le 1°. D'après la proposition 1, il suffit de montrer que C_1, C_2, C_3, C_4 et $C_1 \cap C_5$ sont ouverts dans le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(S^2 \times I, \underset{\sim}{R})$ formé des chemins corrects ; c'est ce qu'on va faire ci-dessous; en plus, on démontrera au passage le 2°.

C_1 <u>et</u> $C_1 \cap C_5$ <u>sont ouverts dans l'ensemble des chemins corrects</u>. — Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de la diagonale Δ de $(S^2 \times I)^2$; tout f' suffisamment voisin de f est tel que la restriction de $f'^{(2)} \times f'^{(2)}$ à $(S^2 \times I)^2 - \mathcal{W}$ soit transversale sur P. Or le 3° de la proposition 2 peut s'interpréter comme suit : on peut choisir $\mathcal{W}$ de façon que, pour f' assez voisin de f, la restriction de $f'^{(2)} \times f'^{(2)}$ à $\mathcal{W} - \Delta$ ne rencontre pas P. Donc, pour f' assez voisin de f, l'image de la restriction de $f'^{(2)} \times f'^{(2)}$ à $\Sigma_2 = (S^2 \times I)^2 - \Delta$ rencontre P transversalement, donc suivant un ensemble fini de points, qui est voisin (en tant que sous-variété de dimension zéro) de celui relatif à f. Outre le fait que C_1 est ouvert, on a donc démontré que la partie du 2° qui concerne les points doubles du graphique est vraie dès que $f \in C_1$; et ceci entraîne que $C_1 \cap C_5$ est ouvert.

C_2 <u>est ouvert dans l'ensemble des chemins corrects</u>. — En effet, les éléments de C_2 sont les chemins corrects tels que les plans tangents horizontaux à l'indicatrice soient tous distincts. D'après le 1° de la proposition 2, si cette propriété à lieu pour f, elle a lieu aussi pour f' assez voisin de f, et les points à tangente horizontale des indicatrices sont en nombre égal et deux à deux voisins. Ceci montre que C_2 est ouvert, et, en plus, achève la démonstration du 2°.

C_3 <u>est ouvert dans l'ensemble des chemins corrects</u>. — On procède comme pour C_1. Soit $\mathcal{W}$ le voisinage de Δ fourni par le 3° de la proposition 2 ; soient ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 les projections de $(S^2 \times I)^3$ sur $(S^2 \times I)^2$ qui, à (u_1, u_2, u_3) associent respectivement (u_2, u_3), (u_3, u_1), (u_1, u_2). Posons :

$$\bigcup_{i=1,2,3} \overset{-1}{\varpi}_i(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_3 \qquad ;$$

$\mathcal{W}_3$ est un voisinage de $(S^2 \times I)^3 - \Sigma_3$ tel que, pour f' assez voisin de f, la restriction de $(f'^{(2)})^3$ à $\mathcal{W}_3 \cap \Sigma_3$ ne rencontre pas

$$N_0^3 \cap \overset{-1}{\pi}{}^3(\Delta_{I^3}) \cap \overset{-1}{\chi}{}^3(\Delta_{\underset{\sim}{R}^3}) \qquad .$$

Or il en est de même, pour f' assez voisin de f, de la restriction de $(f'^{(2)})^3$ à $(S^2 \times I)^3 - \mathcal{W}_3$.

C_4 <u>est ouvert dans l'ensemble des chemins corrects</u>. - C'est une conséquence immédiate du 2° et du 4° de la proposition 2.

La proposition 4 est ainsi démontrée.

COROLLAIRE. - $\Sigma^1(\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1)$ <u>est dense dans</u> $\Sigma^1(\mathcal{K})$ (muni, conformément aux notations du n° 3, de la topologie de la convergence uniforme des applications de I dans $\mathcal{K}$).

<u>Démonstration</u>. - En effet, l'ensemble des chemins excellents dans $\mathcal{K}$ est contenu dans $\Sigma^1(\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1)$ d'après la proposition 3', et d'après la <u>proposition 4</u>, il est dense pour la topologie C^∞ de $\mathrm{Hom}(S^2 \times I, \underset{\sim}{R})$, qui est <u>plus fine</u> que celle de $\Sigma^1(\mathcal{K})$.

PROPOSITION 5. - $\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1$ <u>est la réunion des images des chemins excellents à valeurs dans</u> $\mathcal{K}$.

<u>Démonstration</u>. - D'après la proposition 3', il suffit de montrer que, par tout $f_0 \in \mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1$, il passe un chemin excellent. C'est clair si $f_0 \in \mathcal{K}^0$ ou $f_0 \in \mathcal{K}^1_\beta$. Si $f_0 \in \mathcal{K}^1_\alpha$, on choisit une carte locale $\mathcal{U}$ d'origine le point singulier non de Morse de f, et un difféomorphisme de $\underset{\sim}{R}$, tels que f_0 prenne la forme : $f_0(x, y) = x^2 + y^3$ (cf. ci-dessus, 1er temps, 3°). Soit $\mathcal{V}$ le disque de rayon 1 de $\mathcal{U}$; soit ϖ une fonction de classe C^∞, à support compact, égale à 1 sur $\mathcal{V}$. On pose pour $\lambda \in \underset{\sim}{R}$:

$$(13) \qquad \begin{cases} f_\lambda(x, y) = x^2 + y^3 + \lambda y\, \varpi(x, y) & \text{pour } (x, y) \in \mathcal{U} \\ f_\lambda = f_0 & \text{sur } S^2 - \mathcal{U} \end{cases}$$

En particulier, pour $(x, y) \in \mathcal{V}$, on a :

$$(13') \qquad f_\lambda(x, y) = x^2 + y^3 + \lambda y$$

donc, avec les notations utilisées précédemment, $\mathcal{D} = -24$; d'autre part, sur le complémentaire d'un voisinage quelconque de l'origine, f_0 est excellente ; il suffit donc de se restreindre à un intervalle de variation assez petit de λ pour obtenir, après changement de paramètre, un chemin excellent.

COROLLAIRE 1.

1° $\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1$ <u>est ouvert dans</u> $\mathcal{K}$;

2° $\mathcal{K}^1_\alpha$ et $\mathcal{K}^1_\beta$ sont tous deux ouverts (et par conséquent fermés) dans $\mathcal{K}^1$.

Démonstration.

1° Soit $f_o \in \mathcal{K}^o \cup \mathcal{K}^1$; il passe par f_o un chemin excellent f. Soit f'_o voisin de f_o dans $\mathcal{K}$; le chemin f' défini par : pour tout $\lambda \in I$, $f'_\lambda = f_\lambda + f'_o - f_o$ (au sens de la structure vectorielle naturelle de $\mathcal{K}$) est excellent d'après le 1° de la proposition 4 ; donc $f'_o \in \mathcal{K}^o \cup \mathcal{K}^1$.

2° Il est clair que $\mathcal{K}^1_\beta$ est ouvert dans $\mathcal{K}^1$: car les éléments de $\mathcal{K}^1_\beta$ sont corrects et ceux de $\mathcal{K}^1_\alpha$ ne le sont pas (et les éléments corrects de $\mathcal{K}$ forment un ouvert). Supposons $f_o \in \mathcal{K}^1_\alpha$; soit f'_o voisin de f_o dans $\mathcal{K}^1$, et soit f' comme au 1° ci-dessus ; d'après le 2° de la proposition 4, un point de l'image de f', qui est dans $\mathcal{K}^1$, et qui est voisin de f_o, est nécessairement dans $\mathcal{K}^1_\alpha$; donc $f'_o \in \mathcal{K}^1_\alpha$.

COROLLAIRE 2. – $\mathcal{K}^o$, $\mathcal{K}^1$, $\mathcal{K}^1_\alpha$ et $\mathcal{K}^1_\beta$ sont stables pour les opérations dans $\mathcal{K}$ du groupe $\mathcal{H}$ des difféomorphismes de S^2.

Démonstration. – En effet, l'ensemble des chemins excellents est stable pour les opérations de $\mathcal{H}$; donc $\mathcal{K}^o \cup \mathcal{K}^1$ est stable ; or $\mathcal{K}^o$ est stable, donc $\mathcal{K}^1$ l'est aussi ; $\mathcal{K}^1_\beta$ est stable, donc $\mathcal{K}^1_\alpha$ l'est aussi.

PROPOSITION 6. – Soit $f_o \in \mathcal{K}^1$. Il existe un voisinage $\mathfrak{X}$ de f dans $\mathcal{K}^1$ et un homéomorphisme φ de $\mathfrak{X} \times [0, 1]$ sur un voisinage de f_o dans $\mathcal{K}$, tels que pour tout $f'_o \in \mathfrak{X}$:

a. $\varphi(f'_o, \frac{1}{2}) = f'_o$;

b. le chemin $\lambda \to \varphi(f'_o, \lambda)$ soit excellent.

En plus, on peut choisir $\mathfrak{X}$ et φ pour que :

– si $f_o \in \mathcal{K}^1_\alpha$: $\mathfrak{X} \subset \mathcal{K}^1_\alpha$; $\varphi(f'_o, \lambda)$ ait deux singularités du type de Morse voisines du point singulier non de Morse de f_o (qu'on note 0) pour $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$, et n'ait aucune singularité au voisinage de 0 pour $\lambda \in]\frac{1}{2}, 1]$.

– si $f_o \in \mathcal{K}^1_\beta$: $\mathfrak{X} \subset \mathcal{K}^1_\beta$; si on désigne par $\gamma_1(f'_o, \lambda)$ et $\gamma_2(f'_o, \lambda)$ les valeurs singulières de $\varphi(f'_o, \lambda)$ qui correspondent respectivement (par continuité) aux valeurs singulières égales de f_o, alors $\gamma_1(f'_o, \lambda) - \gamma_2(f'_o, \lambda)$ change de signe en même temps que $(\lambda - \frac{1}{2})$.

Remarque. – On peut interpréter la proposition 6 en disant que $\mathcal{K}^o$ et $\mathcal{K}^1$ définissent une "subdivision cocellulaire" de $\mathcal{K}^o \cup \mathcal{K}^1$, pour laquelle $\mathcal{K}^o$ est de codimension 0 et $\mathcal{K}^1$ de codimension 1.

<u>Démonstration de la proposition 6</u>. — On se borne au cas où $f_o \in \mathcal{K}^1_\alpha$ (le cas où $f_o \in \mathcal{K}^1_\beta$ est plus simple). D'après le corollaire 2 de la proposition 5, on peut choisir $\mathfrak{X} \in \mathcal{K}^1_\alpha$. Comme pour la proposition 5, on met f_o sous la forme $f_o(x , y) = x^2 + y^3$; on définit f_λ par les formules (13) ; on fait varier λ dans un intervalle J de centre 0, assez petit pour que l'arc ainsi défini soit excellent (i. e., le chemin défini par changement linéaire du paramètre est excellent). On pose, pour $(f'_o , \lambda) \in \mathfrak{X} \times J$:

$$\psi(f'_o , \lambda) = f_\lambda + f'_o - f_o \quad .$$

On a : $\psi(f'_o , 0) = f'_o$. On va montrer que ψ est un homéomorphisme local, et pour cela montrer qu'il existe, au voisinage de f dans $\mathcal{K}$, une application continue réciproque de ψ. Soit $f''_o \in \mathcal{K}$, suffisamment voisin de f_o ; on cherche $f'_o \in \mathcal{K}^1$ et $\lambda \in J$ tels que :

$$f_\lambda + f'_o - f_o = f''_o \quad .$$

On cherche donc $\lambda \in J$ tel que, en posant $f_o + f''_o - f_\lambda = h''_\lambda$, on ait : $h''_\lambda \in \mathcal{K}^1$. Or (h''_λ) est un arc dépendant continuement de f''_o ; l'arc (h_λ) qui correspond à $f''_o = f_o$, est tel, <u>d'après la linéarité en</u> λ <u>de l'équation (13')</u>, que, pour $(x , y) \in \mathcal{V}$, on ait :

$$h_\lambda(x , y) = x^2 + y^3 - \lambda y$$

c'est l'arc opposé de (f_λ), il est excellent ; donc, pour f''_o assez voisin de f_o, le chemin correspondant à (h''_λ) est excellent ; il existe donc une valeur et une seule de λ, voisine de 0, telle que $h''_\lambda \in \mathcal{K}^1$, et cette valeur dépend continuement de λ.

Ainsi ψ est un homéomorphisme local ; l'application φ de l'énoncé s'obtient à partir de ψ par un changement linéaire du paramètre.

5. <u>Application à l'étude de</u> $(\mathcal{F}/\mathcal{H})$; <u>subdivision de</u> $(\mathcal{F}/\mathcal{H})$ <u>définie par</u> $\mathcal{K}^0$ <u>et</u> $\mathcal{K}^1$.

Comme au n° 2, on note q la projection $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{H}$. On note j l'injection $\mathcal{F} \to \mathrm{Hom}(S^2 , \underset{\sim}{R}^3)$. On fait choix d'une projection ϖ de $\mathrm{Hom}(S^2 , \underset{\sim}{R}^3)$ (qui s'identifie à $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K}$) sur $\mathcal{K} = \mathrm{Hom}(S^2 , \underset{\sim}{R})$, par exemple celle définie par la projection $(x , y , z) \to z$ de $\underset{\sim}{R}^3$ sur $\underset{\sim}{R}$. On a le diagramme suivant :

$$\mathcal{F}/\mathcal{H} \xleftarrow{q} \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}(S^2 , \underset{\sim}{R}^3) \xrightarrow{\varpi} \mathcal{K} \qquad ;$$

on rappelle les propriétés suivantes des applications q, j, et ϖ :

a. q est une fibration surjective et localement triviale ;

b. j identifie $\mathcal{F}$ à un ouvert de $\mathrm{Hom}(S^2, \underset{\sim}{R}^3)$;

c. ϖ est la projection d'un espace produit sur l'un de ses facteurs.

On note $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^1_\alpha$, $\mathcal{F}^1_\beta$ les images réciproques respectives de $\mathcal{K}^0$, $\mathcal{K}^1$, $\mathcal{K}^1_\alpha$, $\mathcal{K}^1_\beta$ par $\varpi \circ j$.

LEMME 9.

1° $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}^1$ et $\mathcal{F}^1_\alpha \cap \mathcal{F}^1_\beta$ sont vides, $\mathcal{F}^0$ et $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$ sont des ouverts partout denses de $\mathcal{F}$; $\mathcal{F}^1_\alpha$ et $\mathcal{F}^1_\beta$ sont ouverts (et par conséquent fermés) dans $\mathcal{F}^1$.

2° L'espace $\Sigma^1(\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1)$ est dense dans l'espace $\Sigma^1(\mathcal{F})$ de tous les chemins continus dans $\mathcal{F}$ (muni de la topologie C^0).

3° Pour tout $f_0 \in \mathcal{F}^1$, il existe un voisinage $\mathcal{X}$ de f_0 dans $\mathcal{F}^1$ et un homomorphisme φ de $\mathcal{X} \times [0, 1]$ sur un voisinage $\mathcal{Y}$ de f_0 dans $\mathcal{F}$, tels que pour tout $f'_0 \in \mathcal{X}$:

(i) $\varphi(f'_0, \frac{1}{2}) = f'_0$; $\varphi(f'_0, \lambda) \in \mathcal{F}^0$ pour $\lambda \neq \frac{1}{2}$;

(ii) le chemin $\lambda \to \varpi \circ j \circ \varphi(f'_0, \lambda)$ soit excellent.

4° $\mathcal{F}^1$ est localement connexe par arcs.

5° $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^1_\alpha$ et $\mathcal{F}^1_\beta$ sont stables pour les opérations de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{F}$.

Démonstration. - Toutes ces propriétés se déduisent (à l'aide de (b) et (c)) des propriétés de $\mathcal{K}^0$, $\mathcal{K}^1$, $\mathcal{K}^1_\alpha$ et $\mathcal{K}^1_\beta$ démontrées au n° 4. En particulier :

- le 1° utilise le théorème de Morse ($\mathcal{K}^0$ est un ouvert partout dense de $\mathcal{K}$) et le corollaire 1 de la proposition 5 ;
- le 2° utilise le fait que $\Sigma^1(\mathrm{Hom}(S^2, \underset{\sim}{R}^3))$ s'identifie à $(\Sigma^1(\mathcal{K}))^3$ et le corollaire de la proposition 4 ;
- le 3° résulte immédiatement de (c) et de la proposition 6 ;
- le 4° résulte immédiatement du 3° et du fait que $\mathcal{F}$ est localement connexe par arcs.
- le 5° résulte immédiatement du corollaire 2 de la proposition 5.

On note $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0$, $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^1$, etc., les images respectives de $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^1$, etc. par q.

PROPOSITION 7.

1° $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0 \cap (\mathcal{F}/\mathcal{H})^1$ et $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^1_\alpha \cap (\mathcal{F}/\mathcal{H})^1_\beta$ sont vides ; $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0$ et $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0 \cup (\mathcal{F}/\mathcal{H})^1$ sont des ouverts partout denses de $\mathcal{F}/\mathcal{H}$; $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^1_\alpha$ et $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^1_\beta$ sont ouverts (et par conséquent fermés) dans $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^1$.

2° L'espace $\Sigma^1((\mathfrak{F}/\mathcal{H})^o \cup (\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1)$ est dense dans $\Sigma^1(\mathfrak{F}/\mathcal{H})$.

3° Tout point $F_o \in (\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1$ admet un système fondamental de voisinages Y dans $(\mathfrak{F}/\mathcal{H})^o \cup (\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1$ ayant les propriétés suivantes :

- Y et $Y \cap (\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1$ sont tous deux connexes par arcs ;

- $Y \cap (\mathfrak{F}/\mathcal{H})^o$ a exactement deux composantes connexes par arcs, Y_1 et Y_2, qui (dans chacun des cas $F_o \in (\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1_\alpha$ et $F_o \in (\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1_\beta$) peuvent être caractérisées comme dans la proposition 6.

4° $(\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1$ est localement connexe par arcs ; pour tout voisinage Y du type ci-dessus, si X désigne l'intersection de Y et de $(\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1$, Y_1 est localement connexe par arcs dans $Y_1 \cup X$ en F_o (cf. n° 3 pour cette notion) ; même résultat pour Y_2.

5° Par tout point $F_o \in (\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1$ passe un chemin qui "traverse" $(\mathfrak{F}/\mathcal{H})^1$ en F^o (ceci a un sens d'après le 3°).

Démonstration. - Le 1° résulte de la condition (a) ci-dessus, du 1° et du 5° du lemme 9. Le 2° résulte de la condition (a) et du 2° du lemme 9.

Démonstration du 3°. - Soit $f_o \in q^{-1}(F_o)$; f_o possède dans $\mathfrak{F}^o$ un voisinage du type du 3° du lemme 9 ; par conséquent, à tout système fondamental de voisinages $\mathcal{X}$ suffisamment petits de f_o dans $\mathfrak{F}^1$, on peut associer un système fondamental de voisinages $\mathcal{Y}$ de f_o dans $\mathfrak{F}^o$, du type du 3° du lemme 9, tels que $\mathcal{Y} \cap \mathfrak{F}^1 = \mathcal{X}$. D'après le 4° du lemme 9, on peut choisir tous les $\mathcal{X}$ connexes par arcs. Soient $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ les deux composantes de $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$; on note X, Y, Y_1, Y_2 les images respectives de $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ par q ; Y_1 et Y_2 sont connexes par arcs, et d'après (a) ils sont ouverts dans Y ; d'après le 5° du lemme 9, $Y_1 \cup Y_2 = Y - X$; il reste à montrer que Y_1 et Y_2 ne se coupent pas, autrement dit, que, pour $\mathcal{Y}$ assez petit, un point y_1 de $\mathcal{Y}_1$ ne peut être équivalent, pour les opérations de $\mathcal{H}$, à un point y_2 de $\mathcal{Y}_2$; cela résulte des caractérisations données à la proposition 6 pour chacun des cas $f_o \in \mathfrak{F}^1_\alpha$ et $f_o \in \mathfrak{F}^1_\beta$; (cela résulte d'ailleurs aussi de la stabilité de $\mathfrak{F}^1$ et du fait que $\mathcal{H}$ est localement connexe par arcs).

Le 4° est une conséquence immédiate du 3°. Pour le 5°, il suffit de projeter sur $\mathfrak{F}/\mathcal{H}$ un chemin de $\mathfrak{F}$ traversant $\mathfrak{F}^1$ en f_o.

COROLLAIRE 1. - Le théorème 1''' ci-dessous entraîne le théorème 1'' (cf. n° 2) (et, par conséquent, le théorème 1 et la conjecture de Schönflies différentiable pour S^2) :

"THÉORÈME 1"". — Le revêtement $\mathcal{R} = \mathcal{E}/\mathcal{G}_0$ de $\mathcal{F}/\mathcal{H}$ admet une section continue au-dessus de $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0 \cup (\mathcal{F}/\mathcal{H})^1$ ".

Démonstration du corollaire 1. — $\mathcal{F}/\mathcal{H}$ est localement connexe par arcs d'après (a), puisque $\mathcal{F}$ est localement connexe par arcs ; et d'après le 1° et le 2° de la proposition 7, $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0 \cup (\mathcal{F}/\mathcal{H})^1$ vérifie les conditions du lemme 6.

COROLLAIRE 2. — Soit Q une composante connexe de $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0$, et soit $\overline{Q}$ son adhérence dans $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0 \cup (\mathcal{F}/\mathcal{H})^1$. Supposons que, pour tout $F_0 \in \overline{Q} \cap (\mathcal{F}/\mathcal{H})^1$, Q ne rencontre qu'une des deux composantes connexes locales de $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^0$ au voisinage de F_0. Alors, pour tout revêtement $\mathcal{R}$ de $\mathcal{F}/\mathcal{H}$, toute section continue σ de $\mathcal{R}$ au-dessus de Q se prolonge à $\overline{Q}$.

Démonstration du corollaire 2. — Il résulte du 4° de la proposition 7 que les hypothèses du lemme 5 sont vérifiées si l'on prend

$$\mathcal{A} = (\mathcal{F}/\mathcal{H})^0 \cup (\mathcal{F}/\mathcal{H})^1 , \qquad \mathcal{B} = Q \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER (J. W.). — On the subdivision of 3-space by a polyhedron, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 10, 1924, p. 6-8.

[2] CERF (Jean). — Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-380 (Thèse Sc. math. Paris. 1960).

[3] CERF (Jean). — Groupes d'homotopie locaux et groupes d'homotopie mixtes des espaces bitopologiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 4093-4095 et t. 253, 1961, p. 363-365.

[4] CERF (Jean). — Théorèmes de fibration des espaces de plongements, Applications, Séminaire Cartan : Topologie différentielle, t. 15, 1962/63, n° 8, 13 p.

[5] MORLET (Claude). — Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney, III : Les théorèmes d'existence d'applications transverses, Séminaire Cartan : Topologie différentielle, t. 15, 1961/62, n° 6, 8 p.

[6] MORSE (M.) and BAIADA (E.). — Homotopy and homology related to the Schoenflies problem, Annals of Math., Series 2, t. 58, 1953, p. 142-165.

[7] MUNKRES (James). — Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms, Annals of Math., Series 2, t. 73, 1960, p. 521-554.

[8] SMALE (Stephen). — On the structure of manifolds, Amer J. of Math., t. 84, 1962, p. 387-399.