Jean Cerf

La théorie de Smale sur le h-cobordisme des variétés

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. nº 11-13, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A8_0>

Séminaire Henri CARTAN
(Topologie différentielle)
14e année, 1961/62, n° 11 à 13

LA THÉORIE DE SMALE SUR LE h-COBORDISME DES VARIÉTÉS

par Jean CERF

I. Enoncé et applications du théorème fondamental de Smale dans le cas absolu.

1. La notion de h-cobordisme et le théorème de Smale.

La notion de h-cobordisme a été introduite par R. THOM dans [7] (sous le nom de J-équivalence). C'est un affaiblissement de la notion de difféomorphisme.

Définition 1. - Soient V et V' deux variétés connexes, compactes, sans bord, orientées. On dit que V et V' sont h-cobordantes s'il existe une variété W compacte, orientée, telle que :

1° Le bord ∂W de W (muni de l'orientation induite) a deux composantes connexes dont l'une s'identifie à V et l'autre à $-V'$ (i. e. V' munie de l'orientation opposée).

2° Les applications d'inclusion $V \to W$ et $V' \to W$ sont des homotopie-équivalences. [Rappelons que si X et Y sont deux espaces topologiques, une application $f : X \to Y$ est dite une homotopie-équivalence s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes respectivement à l'application identique de Y et à l'application identique de X ; s'il existe une homotopie-équivalence de X dans Y, on dit que X et Y ont même type d'homotopie. Si X et Y sont des variétés, ou plus généralement des espaces topologiques homéomorphes à des CW-complexes, simplement connexes, on a un critère simple pour que f soit une homotopie-équivalence : il suffit que f induise un isomorphisme des groupes d'homologie (à coefficients entiers) de X dans ceux de Y (cf. par exemple P. J. HILTON [4]).]

SMALE démontre dans [6] le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit n un entier ≥ 5 ; soient V et V' deux variétés de dimension n, compactes, sans bord, orientées. Si V et V' sont simplement connexes et h-cobordantes, alors il existe un difféomorphisme de V sur V' conservant l'orientation ; d'une façon plus précise, soit W une variété réalisant le h-cobordisme de V et V' (comme dans la définition 1) ; alors W est difféomorphe à $V \times I$.

Le théorème 1 sera démontré au IV, à l'aide du "handlebody theorem" de Smale, qui sera démontré au III.

2. Principales applications du théorème 1.

COROLLAIRE 1. ("Conjecture de Poincaré différentiable pour $n \geqslant 6$"). - Soit n un entier $\geqslant 6$. Toute variété différentiable M, de dimension n, qui a le type d'homotopie de la sphère S^n, est homéomorphe à S^n ; de façon plus précise, la structure différentiable de M peut être définie par recollement de deux sous-variétés difféomorphes à la n-boule fermée D^n.

Démonstration. - Soient φ et φ' deux plongements de D^n dans M, dont les images soient disjointes ; soit V (resp. V') l'image de S^{n-1} par φ (resp. φ') ; W est une variété à bord de dimension n, compacte, orientable, de bord $V \cup V'$. Je dis que l'injection $V \to W$ est une homotopie-équivalence ; en effet, V et W sont simplement connexes, et l'injection de V dans W induit un isomorphisme entre les groupes d'homologie de ces espaces, car

$$H_i(W , V) \approx H_i(M - \varphi'(\mathring{D}^n) , \varphi(D^n))$$

(par excision), et ce dernier groupe est nul pour tout i car $M - \varphi'(\mathring{D}^n)$ a le type d'homotopie d'un point. Donc W réalise le h-cobordisme de V et V', donc d'après le théorème 1, W est difféomorphe à $V' \times I$; donc $M - \varphi(\mathring{D}^n)$ est difféomorphe à D^n ; d'où le résultat.

Le corollaire 1 entraîne en particulier que, pour $n \geqslant 6$, toute structure différentiable sur la sphère S^n peut être obtenue par recollement de deux boules. Pour tout entier n, on désigne par Γ_n l'ensemble de toutes les structures différentiables sur S^n qui peuvent être obtenues par recollement de deux boules ; (il est d'ailleurs facile de montrer que l'opération "somme connexe" (cf. DOUADY, exposé 2, p. 11) munit Γ_n d'une structure de groupe abélien). D'autre part MILNOR a introduit un ensemble Θ_n, qui est celui des variétés ayant le type d'homotopie de S^n, deux telles variétés étant identifiées si elles sont h-cobordantes. La relation de difféomorphisme étant plus forte que celle de h-cobordisme, il y a, pour toute valeur de n, une application naturelle $\Gamma_n \to \Theta_n$. Il résulte du théorème 1 que cette application est injective pour $n \geqslant 5$; et il résulte du corollaire 1 qu'elle est surjective pour $n \geqslant 6$. D'où :

COROLLAIRE 2. - Pour $n \geqslant 6$, l'ensemble Γ_n s'identifie à celui de toutes les structures différentiables sur S^n, et l'application naturelle $\Gamma_n \to \Theta_n$ est bijective. L'application naturelle $\Gamma_5 \to \Theta_5$ est injective.

Le corollaire 2 est très important, car KERVAIRE et MILNOR ont montré que Θ_n est fini pour tout $n \geqslant 5$; en particulier $\Theta_5 = 0$. Donc il n'y a qu'un nombre fini de structures différentiables sur S^n, $n \geqslant 5$; elles sont toutes obtenues par recollement de deux boules ; en particulier, il n'y a qu'une structure différentiable sur S^5. KERVAIRE et MILNOR ont calculé l'ordre de Θ_n, donc le nombre de structures différentiables sur S^n, pour $5 \leqslant n \leqslant 15$.

Remarque. - Pour $n \leqslant 3$, on sait démontrer directement qu'il n'y a pas de structure différentiable non triviale sur S^n ; on ne connait pas le nombre de structures différentiables de S^4.

COROLLAIRE 3 ("Caractérisation des tubes"). - *Soit* (V, M) *une paire de variétés compactes connexes, telle que* :

(a) M est sans bord ;

(b) $\pi_1(\partial V) = \pi_1(M) = 0$;

(c) (dimension V) $\geqslant 6$; (dimension V)-(dimension M) $\geqslant 3$.

(d) l'inclusion de M dans V est une homotopie-équivalence.

Alors V *est difféomorphe à un fibré en boules fermées sur* M. *Si en plus* $M \subset V - \partial V$, V *est difféomorphe à un voisinage tubulaire de* M *dans* V.

Démonstration. - On se ramène au cas où $M \subset V - \partial V$ (en plongeant au besoin V dans elle-même à l'aide d'un voisinage tubulaire de ∂V). Soit alors T un voisinage tubulaire de M dans $V - \partial V$. On note $V - \mathring{T} = Q$; Q est une variété à bord compacte, dont le bord est la réunion disjointe de ∂T et de ∂V. Je dis que Q *réalise le h-cobordisme de* ∂T *et* ∂V. En effet, $\pi_1(V) = 0$ d'après (b) et (d) ; donc, d'après (c) et le théorème de séparation de Whitney (cf. MORLET, exposé 7, corollaire 10), $\pi_1(Q) = 0$; d'autre part, ∂T est un fibré, dont la base M est simplement connexe, et dont la fibre est, d'après (c), une sphère de dimension $\geqslant 2$; donc, d'après la suite exacte d'homotopie de ce fibré, $\pi_1(\partial T) = 0$; quant à $\pi_1(\partial V)$, il est nul par l'hypothèse (b). Par ailleurs, pour tout $i \geqslant 0$, on a par excision :

$$H_i(Q, \partial T) \approx H_i(V, T) \quad ,$$

et puisque M est un rétracte par déformation de T :

$$H_i(V, T) \approx H_i(V, M) \quad ;$$

ce dernier groupe est nul d'après (d) ; donc $H_i(Q, \partial T) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$; donc l'inclusion de ∂T dans Q est une homotopie-équivalence. On montre comme ci-dessus que le groupe de cohomologie $H^i(Q\,,\,\partial T)$ est nul pour tout $i \geqslant 0$; or, d'après le théorème de dualité de Poincaré, on a pour tout $i \geqslant 0$ un isomorphisme $H_i(Q\,,\,\partial V) \approx H^{\dim V - i}(Q\,,\,\partial T)$. Donc l'inclusion de ∂V dans Q est aussi une homotopie-équivalence. D'où l'assertion annoncée.

Donc d'après le théorème 1, Q est difféomorphe à $\partial T \times I$; donc V est difféomorphe au recollement de T et $\partial T \times I$ suivant ∂T , c'est-à-dire à T .

Cas particulier du corollaire 3 ("Caractérisation des disques"). - Soit C une variété à bord, compacte, de dimension $n \geqslant 6$; si C a le type d'homotopie d'un point, et si $\pi_1(\partial C) = 0$, alors C est difféomorphe au disque fermé D^n .

Complément. - Soit C une variété à bord compacte de dimension 5 ; si C a le type d'homotopie d'un point, et si ∂C est difféomorphe à S^4 , alors C est difféomorphe au disque fermé D^5 .

Démonstration du complément. - On recolle C le long de son bord à la boule D^5 ; puisque $\Theta_5 = 0$, la variété obtenue est h-cobordante à S^5 ; d'après le théorème 1, elle est donc difféomorphe à S^5 ; or, sur toute sphère S^n , l'adhérence du complémentaire d'une n-boule différentiable fermée est une n-boule différentiable.

COROLLAIRE 4 "Conjecture de Schönflies différentiable pour $n \geqslant 4$ ". - Soit f un plongement différentiable de la sphère S^n dans R^{n+1} ; l'adhérence de la composante bornée de $R^{n+1} - f(S^n)$ est difféomorphe à la boule fermée D^{n+1} . (Autrement dit, il existe un plongement f' ayant même image que f , tel que f' puisse se prolonger en un plongement de D^{n+1} .)

Démonstration. - Rappelons le théorème de Mazur (cf. par exemple DOUADY, [2]) : "Soit n un entier $\geqslant 0$, soit f une injection topologique de S^n dans R^{n+1} ; si f vérifie la "condition de la couronne" (c'est-à-dire si f peut se prolonger en une injection topologique de la couronne $S^n \times [-1\,,\,+1]$ dans R^{n+1}), alors f peut se prolonger en une injection topologique de D^{n+1} dans R^{n+1} ." Or tout plongement différentiable vérifie la condition de la couronne ; donc, sous l'hypothèse de l'énoncé, l'adhérence de la composante bornée de $R^{n+1} - f(S^n)$ est homéomorphe à D^{n+1} ; donc (d'après le cas particulier du corollaire 3 pour $n \geqslant 5$, et d'après le complément pour $n = 4$) elle est difféomorphe à D^{n+1} .

Remarque. - Pour $n \leqslant 2$, on sait que tout plongement différentiable de S^n dans R^{n+1} peut se prolonger en un plongement différentiable de D^{n+1} .

COROLLAIRE 5 "Hauptvermutung pour les boules et les sphères de dimension $\geqslant 6$ ".- Pour $n \geqslant 6$, il y a une seule structure de variété combinatoire sur la boule D^n ; même résultat pour la sphère S^n .

Démonstration. - Soit $\mathcal{T}$ une triangulation définissant une certaine structure de variété combinatoire de D^n ; on sait (cf. par exemple MILNOR [5], p. 16) qu'il existe sur D^n une structure différentiable compatible avec $\mathcal{T}$. Cette structure est triviale d'après le cas particulier du corollaire 3 ; or J. H. C. WHITEHEAD a démontré dans [8] que deux triangulations compatibles avec une même structure différentiable, sont combinatoirement équivalentes ; donc la structure combinatoire définie par $\mathcal{T}$ est triviale.

Cas de la sphère S^n . - Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux triangulations définissant chacune une structure de variété combinatoire de S^n ; soit V (resp. V') un n-simplexe de $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}'$) ; soit W (resp. W') le complémentaire de $\overset{\circ}{V}$ (resp. $\overset{\circ}{V}'$). D'après la Hauptvermutung pour la n-boule, il existe un raffinement $\mathcal{W}$ de la triangulation induite par $\mathcal{T}$ sur W , un raffinement $\mathcal{W}'$ de la triangulation induite par $\mathcal{T}'$ sur W' , et un homéomorphisme f de W sur W' tel que $\mathcal{W}'$ soit le transporté de $\mathcal{W}$ par f . On choisit un point $x \in \overset{\circ}{V}$, et on prend le cône (de sommet x) de la triangulation induite par $\mathcal{W}$ sur ∂V ; on définit ainsi une triangulation $\widetilde{\mathcal{T}}$ de S^n qui est un raffinement de $\mathcal{T}$. On définit de même un raffinement $\widetilde{\mathcal{T}}'$ de $\mathcal{T}'$. L'homéomorphisme f peut se prolonger coniquement en un homéomorphisme g de S^n sur S^n , qui transporte $\widetilde{\mathcal{T}}$ sur $\widetilde{\mathcal{T}}'$. Donc les structures définies par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont combinatoirement équivalentes.

II. Rappels sur les présentations par anses.

Dans ce paragraphe se trouvent rassemblés tous les résultats sur les présentations par anses que nous utiliserons dans la suite et qui ont été exposés par Bernard MORIN.

1. Anses.

Soit M une variété différentiable, à bord lisse, de dimension n ; soit p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, et soit f un plongement :

$$S^{p-1} \times D^{n-p} \to \partial M \quad .$$

Soit V la variété obtenue en recollant $M \cup (D^p \times D^{n-p})$ à l'aide de f (cf. DOUADY, exposé 3, p. 8, et exposé 2, définition 9, p. 7) ; on dit que l'image h^p de $D^p \times D^{n-p}$ dans V est une <u>anse d'indice</u> p <u>de</u> V, et que V (qu'on note $M \cup_f h^p$) est obtenue à partir de M par attachement de l'anse h^p à l'aide de f.

<u>Quelques définitions relatives aux anses.</u> - Soit $V = M \cup_f h^p$.

a. f s'appelle l'<u>application d'attachement</u> de h^p.

b. l'image par f de $S^{p-1} \times D^{n-p}$ s'appelle <u>la surface d'attachement</u> de h^p.

c. l'image par f de $S^{p-1} \times \{0\}$ s'appelle la <u>sphère d'attachement</u> de h^p.

d. le disque $\{0\} \times D^{n-p}$ s'identifie à un disque de V qu'on appelle <u>disque transverse</u> de h^p ; le bord du disque transverse est appelé <u>sphère transverse</u> de h^p, c'est une sous-variété de ∂V.

<u>Modifications de l'application d'attachement.</u> - Soit toujours $V = M \cup_f h^p$. Soit f' un autre plongement de $S^{p-1} \times D^{n-p}$ dans ∂M, définissant une anse h'^p ; dans deux cas on peut affirmer que $M \cup_{f'} h'^p$ est difféomorphe à V :

<u>1er cas. - Il existe un difféomorphisme</u> g <u>de</u> $D^p \times D^{n-p}$ <u>tel que</u> $f' = f \circ (g \mid S^{p-1} \times D^{n-p})$. Par exemple, on peut prendre g de la forme $s \times$ identité, ou identité $\times\, s$, s étant une symétrie; ceci permet, dans le cas où V est orientée, de changer l'orientation de f, V restant difféomorphe à elle-même.

<u>2e cas. - Il existe un difféomorphisme</u> g <u>de</u> M <u>tel que</u> $f' = g \circ f$. Par exemple, ceci a lieu lorsque f' est <u>isotope</u> à f sur ∂M. En particulier, soit φ' un plongement de S^{p-1} dans ∂M qui soit isotope au plongement φ de S^{p-1} dans ∂M défini par restriction de f à $S^{p-1} \times \{0\}$; il existe une isotopie γ de ∂M telle que $\gamma\varphi = \varphi'$, et que l'image de $\gamma . f$ soit contenue dans un voisinage arbitrairement petit de celle de φ ; <u>on peut donc attacher à</u> M <u>une anse</u> h'^p, <u>de manière que</u> $M \cup h'^p$ <u>soit difféomorphe à</u> V, <u>et que la surface d'attachement de</u> h'^p <u>soit contenue dans un voisinage arbitrairement petit de</u> $\varphi'(S^{p-1})$.

<u>Anses indépendantes.</u> - Soit $V = M \cup_f h^p$ et $W = V \cup_{f'} h^{p'}$; si la surface d'attachement de $h^{p'}$ est contenue dans la partie de ∂V qui s'identifie canoniquement à (∂M-surface d'attachement de h^p), $h^{p'}$ s'identifie à une anse de M ; h^p et $h^{p'}$ sont dites <u>indépendantes</u> ; elles sont alors permutables, ce qui signifie :

$$(M \cup_{f'} h^{p'}) \cup_f h^p \approx W \quad .$$

2. Présentations par anses.

Définition 1. - Une variété d'anses de dimension n est un système $(H , V , f_1 , \ldots , f_r , n , h_1 , \ldots , h_r)$ où V est une variété sans bord de dimension $(n - 1)$, et où :

$$H = (\ldots (((V \times I) \cup_{f_1} h_1) \cup_{f_2} h_2) \ldots) \cup_{f_r} h_r \quad ,$$

chacune des applications d'attachement $f_1 , \ldots , f_r$ devant en plus éviter l'image canonique de $V \times \{0\}$.

Définition 2. - Soit W une variété à bord lisse de dimension n ; une présentation par anses de W est le couple formé par une variété d'anses $(H , V , \ldots)$ de dimension n , et par un difféomorphisme de W sur H .

On convient d'écrire simplement :

(1) $$W \approx (V \times I) \cup h_1 \cup \ldots \cup h_r \quad .$$

Présentation duale d'une présentation. - Pour toute présentation (1), il existe une présentation dite duale :

(1') $$W \approx (V' \times I) \cup h'_1 \cup \ldots \cup h'_r$$

ayant les propriétés suivantes :

(1) V' est difféomorphe à $\partial W - V$

(2) pour tout $i \leq r$, on a :

$$(\text{indice } h_i) + (\text{indice } h'_{r-i}) = \text{dimension } W \quad .$$

Présentations ordonnées. - On démontre sans difficulté à l'aide du théorème de séparation de Whitney (cf. MORLET, exposé 7, corollaire 10) la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit W une variété compacte de dimension n , à bord lisse ; soit V une sous-variété ouverte et fermée de ∂W ; il existe une présentation :

(2) $$W \approx (V \times I) \cup h^0_1 \cup \ldots \cup h^0_{r_0} \cup h^1_1 \cup \ldots \cup h^1_{r_1} \cup \ldots \cup h^n_1 \cup \ldots \cup h^n_{r_n} \quad .$$

En plus pour toute présentation du type (2), il existe une présentation telle que pour tout p $(0 \leq p \leq n)$ les anses d'indice p soient attachées indépendemment les unes des autres, et soient un nombre égal à celui des anses d'indice p de (2).

Une présentation du type (2) est dite ordonnée. Toute présentation duale de la présentation (2) est elle-même ordonnée ; elle est de la forme

(2') $$W \approx (V' \times I) \cup h'^{o}_{1} \cup \dots \cup h'^{o}_{r'_o} \cup h'^{1}_{1} \cup \dots \cup h'^{n}_{r'_n}$$

avec $V' = \partial W - V$ et $r'_i = r_{n-i}$.

3. Relations homologiques dans les présentations ordonnées.

On déduit immédiatement du théorème d'excision :

(i) Si une variété V est obtenue en attachant, à la variété M, r anses, toutes d'indice p, alors $H_p(V, M)$ est somme directe de r sous-groupes isomorphes à $\underset{\sim}{Z}$; et $H_i(V, M)$ est nul pour $i \neq p$.

Soit maintenant W une variété compacte de dimension n, à bord lisse, munie de la présentation ordonnée (2) ; pour tout $p \leqslant n$, on note W^p la réunion de $V \times I$ et des anses d'indice $\leqslant p$ de (2). On déduit de (i) :

(ii) Soient m et p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant m \leqslant n$; on a

$$H_i(W^m, W^p) = 0 \qquad \text{dès que} \quad i \leqslant p \quad \text{ou} \quad i > m \quad .$$

Soit maintenant (avec les notations de (ii)) M une sous-variété compacte de W^p ; de (ii) et de la suite exacte d'homologie du triple (W^m, W^p, M), on déduit :

(iii) L'application canonique :

$$H_i(W^p, M) \to H_i(W^m, M)$$

est un isomorphisme dès que $i < p$ ou $i > m$.

Supposons que la présentation (2) n'ait aucune anse d'indice $(p+1)$; alors d'après (iii) on a :

$$H_p(W^p, V \times I) \approx H_p(W, V \times I) \quad .$$

Supposons qu'il n'y ait pas non plus d'anse d'indice $(p-1)$; alors d'après (ii),

$$H_{p-1}(W^{p-1}, V \times I) = 0 \quad ;$$

donc, d'après (ii) et la suite exacte du triple $(W^p, W^{p-1}, V \times I)$, on a :

$$H_p(W^p, V \times I) \approx H_p(W^p, W^{p-1}) \quad ;$$

d'où finalement :

(iiii) Si la présentation (2) n'a aucune anse d'indice $(p-1)$ ou $(p+1)$ alors l'application naturelle :

$$H_p(W^p , W^{p-1}) \to H_p(W , V \times I)$$

est un isomorphisme.

Il en résulte en particulier, compte tenu de (i), que si $H_p(W , V \times I) = 0$, il n'y a aucune anse d'indice p.

4. Relations homotopiques.

Soit V une variété obtenue en attachant à la variété M (de dimension n) une anse h^p d'indice p. Le disque transverse de H^p est de dimension $(n-p)$; il résulte donc du théorème de séparation de Whitney (cf. MORLET, exposé 7, corollaire 10) que l'image de toute variété de dimension i peut être séparée de ce disque transverse pourvu que $i + (n-p) \leq n - 1$, c'est-à-dire $i < p$. Comme le complémentaire dans V du disque transverse de h^p peut se rétracter par déformation sur $V - h^p$, on a :

(j) Si une variété V est obtenue en attachant à la variété M des anses toutes d'indice p, alors $\pi_i(V , M) = 0$ pour $i < p$.

On en déduit immédiatement (avec les notations ci-dessus) :

(jj) $\pi_i(W^m , W^p) = 0$ pour $i \leq p$.

(jjj) L'application naturelle :

$$\pi_i(W^p) \to \pi_i(W^m)$$

est un isomorphisme pour $i < p$.

Variation des groupes d'homotopie du bord. - Soient M, V et h^p comme ci-dessus ; on suppose $1 \leq p \leq n-1$; on note Q la composante connexe de ∂M qui contient la surface d'attachement A de h^p, et on note $\tilde{Q}$ la composante connexe de ∂V qui rencontre Q. Puisque A peut se rétracter par déformation sur la sphère d'attachement de h^p, qui est de dimension $(p-1)$, il résulte du théorème de séparation de Whitney que l'application naturelle.

$$\pi_i(Q - \mathring{A}) \to \pi_i(Q) \quad ,$$

est un isomorphisme dès que $(p-1) + (i+1) \leq (n-1) - 1$, c'est-à-dire $i \leq n - p - 2$. D'autre part, le complémentaire dans $\tilde{Q}$ de la sphère transverse de h^p peut se rétracter par déformation sur $Q - \mathring{A}$; cette sphère transverse étant de dimension $(n-p-1)$, il résulte encore du théorème de séparation de Whitney que l'application naturelle : $\pi_i(Q - \mathring{A}) \to \pi_i(\widetilde{Q})$ est un isomorphisme pour $i \leqslant p - 2$, et est surjective pour $i \leqslant p - 1$. D'où

(jjjj) Soit M une variété compacte, à bord lisse, de dimension n ; soit Q une composante connexe de ∂M ; soit V une variété obtenue en attachant à M des anses toutes d'indice p, indépendantes les unes des autres ; on suppose $1 \leqslant p \leqslant n - 1$, et on note $\widetilde{Q}$ la composante connexe de ∂V qui rencontre Q. Alors $\pi_i(\widetilde{Q})$ est isomorphe à un quotient de $\pi_i(Q)$ si on a simultanément $i \leqslant n - p - 2$ et $i \leqslant p - 1$. (Si on remplace cette dernière condition par $i \leqslant p - 2$, alors $\pi_i(\widetilde{Q})$ est isomorphe à $\pi_i(Q)$.)

III. Démonstration du lemme fondamental.

LEMME fondamental ("Handlebody theorem"). - Soient n et p deux entiers tels que $2 \leqslant p \leqslant n - 4$. Soit M une variété compacte, à bord lisse, de dimension n ; soit Q une composante connexe de ∂M, soit h une anse d'indice p dont la surface d'attachement soit contenue dans Q ; soit $V = M \cup h$; soit W la variété obtenue en attachant, à V, r anses d'indice $p + 1$ (avec $r \geqslant 0$). Si :

a. $\pi_1(Q) = 0$

b. la composée des applications canoniques

$$H_p(D^p , S^{p-1}) \to H_p(V , M) \to H_p(W , M)$$

est zéro.

Alors r est $\geqslant 1$, et W peut être obtenue en attachant $(r - 1)$ anses d'indice $(p + 1)$ à M.

La démonstration utilise deux lemmes ; le lemme 1 est un théorème de réduction d'anses dans un cas simple (pour lequel les restrictions de dimension et la condition (a) sont inutiles) ; il a été, pour l'essentiel, démontré dans DOUADY (exposé 3, théorème 8, p. 21). Le lemme 2 joue un rôle auxiliaire dans le passage du lemme 1 au lemme fondamental.

LEMME 1. - Soit M une variété à bord lisse ; soient V et W deux variétés de la forme :

$V = M \cup h_1$, où h_1 est une ase d'indice p ;

$W = V \cup h_2$, où h_2 est une anse d'indice $(p + 1)$.

Si :

(a) <u>La sphère transverse de</u> h_1 <u>coupe transversalement et en un seul point la sphère d'attachement de</u> h_2 .

<u>Alors</u> W <u>est difféomorphe à</u> M .

<u>Démonstration du lemme 1</u>. - On pose : dimension $M = n$, $n - p - 1 = q$; on note f_1 l'application d'attachement de h_1 , elle se prolonge canoniquement en un difféomorphisme, qu'on note encore f_1 , de $D^p \times D^{q+1}$ sur h_1 ; on note f_2 l'application d'attachement de h_2 (c'est un plongement de $S^p \times D^q$ dans ∂V). On note Γ_1 la sphère <u>transverse</u> de h_1 , Σ_2 la sphère d'<u>attachement</u> de h_2 . On note x_+ le pôle nord de S^p , y_+ celui de S^q ; on note $f_1(D^p \times \{y_+\}) = \Pi_1$; Γ_1 et Π_1 se coupent au point $\omega = f_1(0 , y_+)$. On pose :

$$f_1 \circ ((\text{identité de } D^p) \times \sigma_q^{-1}) = g_1 \; ; \qquad f_2 \circ (\sigma_p^{-1} \times (\text{identité de } D^q)) = g_2 .$$

(On rappelle que σ_p désigne la projection stéréographique $S_+^p \to D^p$, de sorte que, en particulier, $\sigma_p(x_+) = 0$ et $\sigma_q(y_+) = 0$.)

On va montrer qu'on peut modifier f_2 par une succession d'isotopies de ∂V , de façon que soient finalement vérifiées les conditions du théorème 8 de DOUADY, exposé 3, c'est-à-dire

(b) g_1 et g_2 coïncident sur $D^p \times D^q$;

(c) f_2 applique $S_-^p \times D^q$ dans $\partial V - f_1(S^{p-1} \times \overset{\circ}{D}{}^{q+1})$.

Par une isotopie de ∂V laissant stable Σ_2 , on amène $f_2(x_+ , 0)$ au point d'intersection de Γ_1 et Σ_2 ; puis, par une isotopie de ∂V laissant stable Γ_1 , on amène $f_2(x_+ , 0)$ en ω . La condition (b) est alors vérifiée au point $(0 , 0)$, la condition (a) restant vérifiée.

D'après (a), Σ_2 coupe transversalement et en un seul point chaque "parallèle" à Γ_1 assez proche de Γ_1 , c'est-à-dire chaque sphère $f_1(\{x\} \times S^q)$ pour x assez voisin de 0 dans D^p . Il en résulte [1] qu'on peut se ramener, par une isotopie de ∂V se réduisant à l'identité en dehors d'un petit voisinage de ω , et laissant stables les parallèles à Γ_1 et en particulier Γ_1 , au cas où f_2

---

[1] On peut par exemple utiliser le lemme 2 de CERF [1], p. 302, d'après lequel on peut à tout $y \in \overset{\circ}{D}{}^q$ associer un difféomorphisme γ_y de R^q , induisant l'identité sur $R^q - D^q$, dépendant différentiablement de y , et tel que $\gamma_y . y = 0$. Le lemme se démontre sans difficulté, par une formule explicite pour $q = 1$, puis par récurrence sur q .

a la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de ω dans ∂V tel que $\Sigma_2 \cap \mathcal{U} = \Pi_1 \cap \mathcal{U}$. En remplaçant au besoin f_2 par sa composée avec une symétrie de S^p (cf. II, 1), on peut supposer que g_2 est d'orientation locale positive à l'origine (Π_1 étant orienté par f_1) ; il existe alors d'après le théorème d'isotopie locale (cf. DOUADY, exposé 2, théorème 1, p. 4) une isotopie γ de Π_1, induisant l'identité en dehors de $\Pi_1 \cap \mathcal{U}$, telle que, sur un voisinage assez petit de $(0, 0)$ dans $D^p \times \{0\}$, $\gamma \cdot g_2$ coïncide avec g_1 ; γ peut se prolonger en une isotopie de ∂V, induisant l'identité sur $\partial V - \mathcal{U}$ (et laissant par conséquent Σ_2 stable), ce qui permet de se ramener au cas où g_1 et g_2 coïncident au voisinage de $(0, 0)$ dans $D^p \times \{0\}$, la condition (a) restant toujours vérifiée.

Par un procédé en tous points analogue au précédent, on se ramène au cas où (la condition (a) restant toujours vérifiée), g_1 et g_2 coïncident au voisinage de $(0, 0)$ dans $(D^p \times \{0\}) \cup (\{0\} \times D^q)$; g_1 et g_2 ont alors en particulier même jet en $(0, 0)$, de sorte qu'on peut modifier g_2 par isotopie, de manière à faire coïncider g_2 et g_1 sur tout un voisinage $\mathcal{V}$ de $(0, 0)$ dans $D^p \times D^q$; cette isotopie peut en plus être choisie arbitrairement petite, on la choisit assez petite pour que (a) reste vérifié.

Soient λ et μ deux nombres > 0 et ≤ 1. On pose, pour $x \in \frac{1}{\lambda} D^p$ (homothétique de D^p dans le rapport $\frac{1}{\lambda}$) et $y \in \frac{1}{\mu} D^q$:

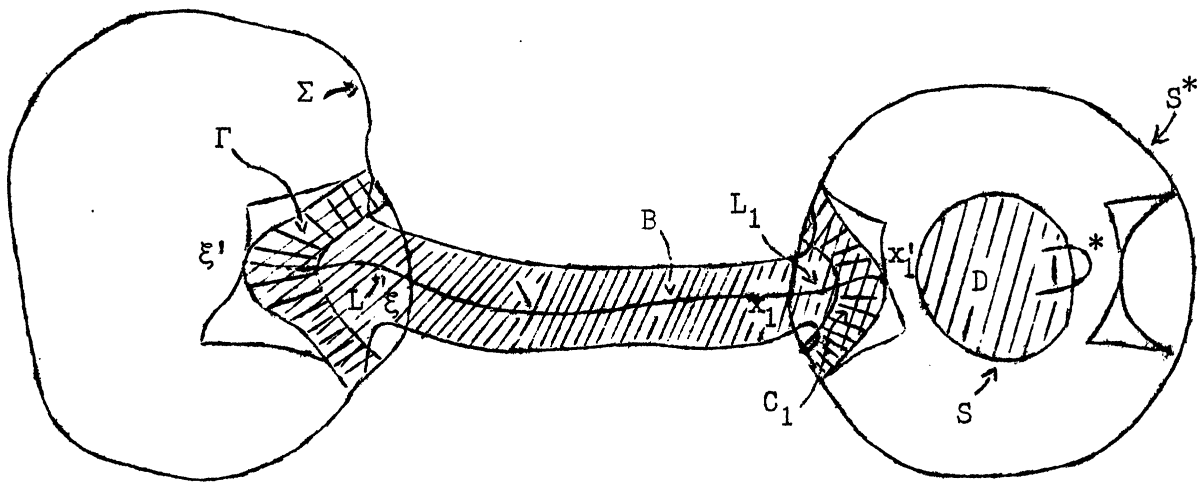
$$\rho_{\lambda,\mu}(x , y) = (\lambda x , \mu y) \quad .$$

Soit γ_2 une isotopie de ∂V qui induise $g_2 \circ \rho_{\lambda,\mu} \circ g_2^{-1}$ sur $g_2(D^p \times D^q)$; et soit γ_1 une isotopie de ∂V qui induise $g_1 \circ \rho^{-1}_{\lambda,\mu} \circ g_1^{-1}$ sur $g_1(\lambda D^p \times \mu D^q)$. Alors $(\gamma_1 \circ \gamma_2) \cdot f_2$ vérifie (b) dès que $\rho_{\lambda,\mu}(D^p \times D^q) \subset \mathcal{V}$.

Supposons en plus que γ_2 applique chaque parallèle à Σ_2 sur un autre tel parallèle ; il résulte alors de la condition (a) vérifiée par f_2 que, pour (λ , μ) assez petit, $\gamma_2 \cdot f_2(S^p_- \times D^q)$ ne coupe pas $f_1(\lambda D^p \times S^q)$; or on peut choisir γ_1 de manière que l'image de $(\lambda D^p \times S^q)$ par $\gamma_1 \cdot f_1$ soit exactement $f_1(D^p \times S^q)$ (il suffit de choisir γ_1 de façon que $f_1^{-1} \circ (\gamma_1 \cdot f_1)$ applique chaque sphère $(\{x\} \times S^q)$ telle que $x \in \lambda D^p$ sur une sphère $(\{x'\} \times S^q)$) ; $(\gamma_1 \circ \gamma_2) \cdot f_2$ vérifie alors aussi la condition (c).

LEMME 2. - Soit V une variété compacte, orientée, à bord lisse, de dimension n ; soit $W = V \cup h$, h étant une anse d'indice $p + 1$, avec $1 \leq p \leq n - 3$. Soit X une sous-variété compacte de l'intérieur de $\partial V \cap \partial W$ difféomorphe à un tube dont l'âme est de dimension $\leq n - 3$. Soit φ un plongement de S^p dans l'intérieur de celle des composantes connexes de $\partial V \cap \partial W$ qui rencontre la surface d'attachement de h ; on suppose que $\varphi(S^p)$ ne rencontre pas X. Il existe alors un autre plongement $\tilde{\varphi}$ de S^p dans l'intérieur de $\partial V \cap \partial W$, isotope à φ sur $\partial W - X$, et tel que le cycle de $\partial V - \mathring{X}$ défini par $\tilde{\varphi}$ soit homologue à la somme des cycles définis respectivement par φ et par la sphère d'attachement de h (orientée par l'application d'attachement).

Démonstration du lemme 2. - On pose $n - p - 1 = q$. L'application d'attachement de h se prolonge canoniquement en un difféomorphisme f de $D^{p+1} \times D^q$ sur h. Soit $x_o \in S^{q-1}$; on note : $f(D^{p+1} \times \{x_o\}) = D$; D est dans ∂W. On note S le bord de D ; S est dans $f(S^p \times S^{q-1})$, c'est-à-dire dans le bord de $\partial V \cap \partial W$. On note d'autre part $\varphi(S^p) = \Sigma$; puisque Σ est dans l'intérieur de $\partial V \cap \partial W$, $\Sigma \cap D$ est vide. On considère un prolongement D^* de D dans ∂W (c'est-à-dire une sous-variété de ∂W telle que $D^* - \mathring{D}$ soit difféomorphe à $S \times [0\ ,\ 1]$), assez petit pour que $D^* \cap (\Sigma \cup X)$ soit vide. On note S^* le bord de D^* ; sur $(\partial V - X)$, S^* est homologue à S, donc à la sphère d'attachement de h.



Soit ψ un plongement : $D^p \times [0\ ,\ 1] \to \partial V$, tel que l'image de ψ ne rencontre ni X ni D^*, et tel que $\psi(x\ ,\ t) \in \Sigma$ si et seulement si $t = 0$. On note L l'arc $\psi(\{0\} \times [0\ ,\ 1])$, ξ l'origine de L, ξ' son extrémité. On note

$$\psi(D_+^{p+1} - \tfrac{1}{2}\,\mathring{D}_+^{p+1}) = \Gamma \qquad ;$$

($\frac{1}{2}\,\mathring{D}_+^{p+1}$ désigne l'homothétique dans le rapport $\frac{1}{2}$, par rapport à l'origine, de $\mathring{D}_+^{p+1}$). On note :

$$(\Sigma - \psi(\mathring{D}^p \times \{0\})) \cup \psi(S^p_+) = \Sigma' \qquad ;$$

on définit un homéomorphisme φ' de S^p sur Σ' en composant φ avec l'identité sur $\Sigma - \psi(\mathring{D}^p \times \{0\})$, et avec $\psi \circ \sigma_p^{-1} \circ \psi^{-1}$ sur $\psi(D^p \times \{0\})$; (on rappelle que σ_p désigne la projection stéréographique : $S^p_+ \to D^p$) .

On considère de même deux plongements g_1 , g_2 : $D^p \times [0 , 1] \to D^* - D$, d'images disjointes, tels que $g_i(x , t) \in S^*$ si et seulement si $t = 0$ (pour $i = 1 , 2$). On note L_1 l'arc $g_1(\{0\} \times [0 , 1])$, x_1 l'origine de L_1 , x_1' son extrémité. On note :

$$g_1(D^{p+1}_+ - \tfrac{1}{2}\mathring{D}^{p+1}_+) = C_1 \ , \quad \text{et} \quad D^* - (g_1(\mathring{D}^{p+1}_+) \cup g_2(\mathring{D}^{p+1}_+)) = D'^* \qquad ;$$

D'^* est difféomorphe (2) à $D^p \times [0 , 1]$; on note S'^* le bord de D'^* .

Par hypothèse, S et Σ sont dans la même composante connexe de ∂W ; donc, puisque d'une part la dimension de l'âme de X est $\leq n - 3$, et d'autre part $p \leq n - 3$, on peut joindre ξ à x_1 par un arc sans point double de $\partial W - X$, qui ne rencontre $D^* \cup \Sigma \cup \psi(D^p \times [0 , 1])$ qu'en ses extrémités ; on modifie (par exemple à l'aide du théorème d'isotopie locale) cet arc au voisinage de ses deux extrémités, de façon que sa réunion avec L et L_1 définisse un arc différentiable sans point double B de $\partial W - X$, tel que

$$B \cap (\Sigma \cup \psi(D^p \times [0 , 1])) = L \ , \quad \text{et} \quad B \cap D^* = L_1 \qquad .$$

L'espace des p-repères de ∂W , d'origine sur B , transverses à B , est un fibré trivial puisque $B \approx [0 , 1]$; sa fibre (espace des p-repères de R^{n-2}) est connexe puisque $p < n - 2$. On peut donc trouver une section ν de ce fibré qui, au-dessus de L (resp. L_1) coïncide avec celle définie par l'homéomorphisme canonique de $D^p \times [0 , 1]$ sur Γ (resp. C_1) . On considère alors un plongement η de $[0 , 1] \times D^p$ dans ∂W , tel que $\eta([0 , 1] \times \{0\}) = B$, et dont le 1-jet le long de B s'identifie à ν . D'après le théorème d'iostopie pour les tubes (qui est une conséquence facile du théorème d'isotopie locale ; cf. CERF, [1], corollaire 4, p. 333), on peut en plus supposer que η coïncide au voisinage de $\{0 , 1\} \times D^p$ avec le plongement canoniquement défini par Γ et C_1 . Soit Y l'image de η ; en rétractant au besoin sur elle-même la partie de Y située au-dessus de $B - (L \cup L_1)$, on peut supposer que Y ne rencontre pas X , et que

---

(2) Cela résulte du théorème d'isotopie pour les tubes, cf. CERF [1], corollaire 4, p. 333 ; on peut d'ailleurs éviter le recours à ce théorème en particularisant g_1 et g_2 de manière que cette propriété soit géométriquement évidente.

$$Y \cap (\Sigma' \cup D'^{*}) = \chi(\{0\ ,\ 1\} \times D^p) \quad ,$$

de sorte que, en particulier, $Y \subset \partial V - X$. Soit :

$$\Sigma'' = (\Sigma' \cup \partial(Y \cup D'^{*})) - \psi(\overset{\circ}{S}{}^p_+) \quad ;$$

$Y \cup D'^{*}$ est difféomorphe à $D^p \times [0\ ,\ 1]$; il existe donc une isotopie γ de ∂W induisant l'identité sur X , telle que $\gamma . \Sigma' = \Sigma''$. Le cycle défini par $\gamma . \varphi'$ est homologue sur $\partial V - \overset{\circ}{X}$ à la somme de ceux définis par Σ et Σ^* , pourvu que l'application de $D^p \times \{0\}$ dans Σ définie par restriction de ψ , et l'application de $D^p \times \{0\}$ dans S^* définie par g_1 , soient d'orientation contraire. Or il existe une isotopie γ' de ∂W , induisant l'identité sur X , telle que $\gamma' . \varphi$ soit arbitrairement voisin de φ' au sens C^0 ; on choisit γ' de façon que $(\gamma \circ \gamma') . \varphi$ soit homologue à $\gamma . \varphi'$ sur $\partial V - \overset{\circ}{X}$; $(\gamma \circ \gamma') . \varphi$ vérifie alors les propriétés requises pour $\widetilde{\varphi}$.

Démonstration du lemme fondamental. - L'application $H_p(D^p\ ,\ S^{p-1}) \to H_p(V\ ,\ M)$ étant un isomorphisme, il résulte de la condition (b) que $r \geqslant 1$, et, de façon plus précise, qu'il existe au moins une anse d'indice $(p + 1)$ dont la surface d'attachement soit contenue dans la composante $\widetilde{Q}$ de ∂V qui rencontre Q ; dans la suite, on pourra donc se borner au cas où toutes ces anses ont leur surface d'attachement contenue dans $\widetilde{Q}$.

On note ces anses $h_1\ , \dots ,\ h_r$; on les suppose attachées indépendemment les unes des autres (cf. II, 2, proposition 1) ; on note $f_1\ , \dots ,\ f_r$ les applications d'attachement.

La condition (b) peut s'interpréter comme suit. Soit $\alpha \in H_p(V\ ,\ M)$ l'image du générateur de $H_p(D^p\ ,\ S^{p-1})$. D'après le diagramme ci-dessous, où les deux suites horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
H_{p+1}(W\ ,\ V) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & H_p(V) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(W) \arrow[d] \\
H_{p+1}(W\ ,\ V) \arrow[r] & H_p(V\ ,\ M) \arrow[r] & H_p(W\ ,\ M)
\end{tikzcd}$$

α est l'image d'un élément du noyau de $H_p(V) \to H_p(W)$, c'est-à-dire d'un élément $\beta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\Sigma_i]$, où les λ_i sont des entiers, et où les $[\Sigma_i]$ sont les classes d'homologie des sphères d'attachement des anses d'indice $(p + 1)$. Puisque la classe α , image de β dans $H_p(V\ ,\ M)$, peut être représentée par une application de (D^p , S^{p-1}) dans (V , M) telle que l'image de D^p coupe la sphère transverse Γ de $\mathbf{h}$ en un seul point, l'intersection (sur ∂V) de β et de la classe d'homologie $[\Gamma]$ de Γ , est ± 1 . Il en résulte que <u>si on note b_i l'intersection (sur ∂V) de $[\Sigma_i]$ et de $[\Gamma]$, alors $(b_1 , \dots , b_r)$ sont premiers entre eux.</u>

Comme il est bien connu, le p. g. c. d. de r nombres peut s'obtenir par des divisions successives de ces nombres deux à deux ; autrement dit, on peut, dans le cas présent, passer de la suite (b_i) à une suite comportant une fois au moins le nombre 1, par un nombre fini d'opérations du type :

(α) $$(b_1 , \dots , b_r) \to (b_1 , \dots , - b_i , \dots , b_r)$$

ou

(β) $$(b_1 , \dots , b_r) \to (b_1 , \dots , b_i + b_j , \dots , b_r) \qquad (i \neq j) \quad .$$

"Réaliser" une opération $(b_i) \to (b'_i)$, ce sera définir une famille (f'_i) de plongements de $S^p \times D^{n-p-1}$ dans ∂V , d'images deux à deux disjointes, attachant à V des anses h'_i de façon que $V \cup h'_1 \cup \dots \cup h'_r$ soit difféomorphe à W , et que l'intersection de $[\Sigma'_i]$ et de $[\Gamma]$ soit égale à b'_i . Il résulte de II, 1, 1er cas, qu'on peut réaliser toute opération du type (α). Pour les opérations du type (β), puisque les anses (h_i) sont indépendantes et par conséquent permutables, on peut se borner au cas où $i = r$ et $j = r - 1$. On applique le lemme 2, avec les correspondances suivantes : $V \cup h_1 \cup \dots \cup h_{r-2}$ dans le rôle de V , h_{r-1} dans celui de h ; pour φ on prend la restriction à S^p de l'application d'attachement f_r de h_r ; pour X on prend

$$\partial W - \overline{\overset{o}{(\partial V \cap \partial (V \cup h_1 \cup \dots \cup h_{r-2}))}} \quad ,$$

autrement dit la réunion des "bords libres" de $h_1 , \dots , h_{r-2}$; X s'identifie bien à un tube dont l'âme est la réunion des sphères transverses de ces anses, qui sont de dimension $n - p - 2 \leqslant n - 4$. Le lemme 2 fournit un plongement $\tilde{\varphi}$ de S^p dans l'intérieur de

$$\partial (V \cup h_1 \cup \dots \cup h_{r-2}) \cap \partial (V \cup h_1 \cup \dots \cup h_{r-1}) \quad ,$$

isotope à φ sur $\partial (V \cup h_1 \cup \dots \cup h_{r-1}) - X$; l'image de $\tilde{\varphi}$ est par conséquent contenue dans ∂V , et ne rencontre aucune des surfaces d'attachement des anses $h_1 , \dots , h_{r-2}$; d'autre part $\tilde{\varphi}$ est homologue sur $\partial (V \cup h_1 \cup \dots \cup h_{r-2}) - \overset{o}{X}$, donc a fortiori sur ∂V , à la somme des cycles définis par les sphères d'attachement de h_{r-1} et h_r (orientées par leurs applications d'attachement). Il existe donc un plongement f'_r de $S^p \times D^{n-p-1}$ dans ∂V, dont la restriction à $S^p \times \{0\}$ s'identifie à $\tilde{\varphi}$, et qui soit tel que le système $(f_1, \dots; f_{r-1}, f'_r)$ réalise l'opération (β) considérée.

Ainsi, on peut réaliser toute opération du type (α) ou du type (β) ; on peut donc se ramener au cas où, les anses $h_1, \dots, h_r$ étant toujours attachées indépendemment les unes des autres, il existe un indice i pour lequel l'intersection de $[\Gamma]$ et de $[\Sigma_i]$ soit égale à 1 ; grâce à l'indépendance des anses, on peut supposer que $i = 1$; en résumé, on est ramené au cas où l'intersection sur ∂V du cycle $[\Gamma]$ défini par la sphère transverse de h, et du cycle $[\Sigma_1]$ défini par la sphère d'attachement de h_1, est égale à 1.

On applique alors le théorème 1 de Whitney (cf. Appendice) avec les correspondances suivantes : la composante $\tilde{Q}$ de ∂V qui rencontre Q dans le rôle de M, la sphère transverse Γ de h dans le rôle de X, la sphère d'attachement Σ_1 de h_1 dans le rôle de X' ; $\tilde{Q}$ est de dimension $n - 1 \geqslant 5$, Γ de dimension $n - p - 1$, Σ_1 de dimension p, de sorte que les conditions de dimension du théorème de Whitney sont remplies. D'après II, (jjjj), $\pi_1(\tilde{Q}) = 0$; enfin, dans le cas où la codimension de Γ dans $\tilde{Q}$ est 2, c'est-à-dire lorsque $p = 2$, on a bien $\pi_1(\tilde{Q} - \Gamma) = 0$ (car $\tilde{Q} - \Gamma$ peut se rétracter par déformation sur $\tilde{Q} - (h \cap \tilde{Q})$, qui est aussi un rétracte par déformation de $Q - \Sigma$, où Σ est la sphère d'attachement de h ; comme $n \geqslant 5$, ce qui peut s'écrire $(n - 1) - (p - 1) > 2$, $\pi_1(Q - \Sigma) = 0$). Il existe donc une isotopie γ de ∂V telle que $\gamma.\Sigma_1$ coupe Γ transversalement et en un seul point. Donc, d'après le lemme 1, $V \cup h_1$ est difféomorphe à M ; donc W, qui est difféomorphe à $(V \cup h_1) \cup h_2 \cup \dots \cup h_r$, peut être obtenue en attachant $(r - 1)$ anses d'indices $(p + 1)$ à M.

IV. Démonstration du théorème 1.

Soit W une variété compacte, à bord lisse, orientée, de dimension n, réalisant le h-cobordisme des variétés connexes orientées V et V'. On munit W d'une présentation par anses (cf. II, 2) de la forme :

$$(2) \quad W \approx (V \times I) \cup h_1^0 \cup \dots \cup h_{r_0}^0 \cup h_1^1 \cup \dots \cup h_{r_1}^1 \cup \dots \cup h_1^n \cup \dots \cup h_{r_n}^n$$

où toutes les anses de même indice sont attachées indépendamment les unes des autres. Comme en II, 3, on note W^i la réunion de $V \times I$ et des anses d'indice $\leqslant i$ de (2).

On suppose $n \geq 6$, $\pi_1(V) = \pi_1(V') = 0$; on va montrer que W est difféomorphe à $V \times I$, et pour cela "supprimer" successivement toutes les anses de la présentation ( ).

a. Suppression des anses d'indice 0 .

W^o est la somme disjointe de $V \times I$ et des r_o anses h_i^o , difféomorphes à D^n . Supposons $r_o \geq 1$, alors $\pi_o(W^o) \neq 0$; d'après II, 4, (jjj), $\pi_o(W_1)$ est isomorphe à $\pi_o(W)$, donc est nul ; il existe donc au moins une anse h_i^1 telle que (si on note $W^o \cup h_1^o \dots \cup h_{i-1}^1 = M$), $\pi_o(M \cup h_i^1)$ soit plus petit que $\pi_o(M)$. Or la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'application $\varpi : \pi_o(S^o \times D^{n-1}) \to \pi_o(\partial M)$ définie par l'attachement de h_i^1 ne soit pas nulle. Les anses d'indice 1 étant permutables entre elles, on peut amener h_i^1 en première position ; on peut donc factoriser l'application ϖ de la manière suivante :

$$\pi_o(S^o \times D^{n-1}) \xrightarrow{\varpi'} \pi_o(\partial W^o) \to \pi_o(\partial M) \qquad ;$$

l'application ϖ' n'est donc pas nulle ; donc, d'après le lemme ci-dessous, $W_o \cup h_i^o$ est difféomorphe à la somme disjointe de $V \times I$ et de $(r_o - 1)$ anses d'indice 0 , autrement dit, on a supprimé une anse d'indice 0 ; on peut donc les supprimer toutes.

LEMME. - Soit M une variété à bord lisse, de dimension n ; on attache à M une anse h d'indice 1 , de manière que l'application $\pi_o(S^o \times D^{n-1}) \to \pi_o(\partial M)$ définie par l'attachement de h soit non nulle. Si l'une des deux composantes connexes de M auxquelles h est attachée est difféomorphe à la boule D^n , alors $M \cup h$ est difféomorphe à M .

(Ce lemme est un cas particulier (celui où $p = 0$) du théorème 8 de DOUADY, exposé 3, p. 21 ; il est d'ailleurs facile de le démontrer directement : soient en effet M_1 et M_2 les deux composantes de M auxquelles h est attachée ; soit F_i $(i = 1 , 2)$ la semi-face de M_i le long de laquelle h est attachée ; on supposera que M_2 est difféomorphe à D^n . La variété obtenue en recollant $D^{n-1} \times [-1 , 1]$ le long de F_1 est difféomorphe à la variété M_1' obtenue en faisant apparaître une arête le long du bord relatif de F_1 ; la variété M_2' obtenue en faisant apparaître une arête le long du bord relatif de F_2 est difféomorphe à la demi-boule (cf. DOUADY, exposé 3, proposition 1, p. 4) ; la variété obtenue en recollant M_1' et M_2' le long de leurs faces respectives difféomorphes à D^{n-1} , est difféomorphe à M_1 d'après DOUADY, loco citato, théorème 6, p. 14.)

b. Suppression des anses d'indice 1 .

Les anses d'indice 0 ayant déjà été supprimées, on a pour W une présentation de la forme :

$$W \approx (V \times I) \cup h_1^1 \cup \ldots \cup h_{r_1}^1 \cup h_1^2 \cup \ldots \cup h_{r_n}^n \quad ,$$

où l'on suppose $r_1 \geqslant 1$. Soit f l'application d'attachement de $h_{r_1}^1$; f se prolonge canoniquement en un difféomorphisme de $D^1 \times D^{n-1}$ sur $h_{r_1}^1$, qu'on note encore f . Soit $q \in S^{n-2}$; on considère l'arc $f(D^1 \times \{q\})$; les extrémités de cet arc, qu'on note x et y , sont des points de $V \times \{1\}$, qui est connexe ; donc on peut les joindre par un arc α de $V \times \{1\}$ ne rencontrant pas (sauf en ses extrémités) les surfaces d'attachement des anses d'indice 1 (car ces surfaces d'attachement sont difféomorphes à $S^0 \times D^{n-1}$). Donc, d'après un cas particulier simple du théorème 2 de Whitney (cf. Appendice), x et y peuvent être joints par un arc différentiable β , sans point double, de $V \times \{1\}$, ne rencontrant pas (sauf en ses extrémités) les surfaces d'attachement des anses d'indice 1 . D'après le théorème d'isotopie locale, on peut en plus supposer que β se raccorde différentiablement en x et y avec l'arc $f(D^1 \times \{q\})$, de manière que la réunion de β et de cet arc soit l'image d'un certain plongement φ de S^1 dans ∂W^1 ; on notera que $\varphi(S^1)$ coupe la sphère transverse de $h_{r_1}^1$ transversalement et en un seul point ; cette propriété subsiste si on remplace φ par un plongement φ' suffisamment voisin de φ . Or, d'après le théorème de séparation de Whitney (cf. MORLET, loco citato), on peut trouver un plongement φ' de S^1 dans ∂W^1 , arbitrairement voisin de φ , et tel que $\varphi'(S^1)$ ne rencontre aucune des sphères d'attachement des anses d'indice 2 (car ces sphères d'attachement sont de dimension 1). Puis, en modifiant par une isotopie de ∂W^1 les applications d'attachement des anses d'indice 2 , on se ramène au cas où $\varphi'(S^1) \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{r_2})$ est vide (A_i désignant la surface d'attachement de l'anse h_i^2). Il existe alors un plongement $\overline{f}$ de $S^1 \times D^{n-2}$ dans $\partial W^1 - (A_1 \cup \ldots \cup A_{r_2})$, tel que la restriction de $\overline{f}$ à $S^1 \times \{0\}$ s'identifie à φ' ; $\overline{f}$ définit l'attachement à W^1 d'une anse $\overline{h^2}$, indépendante des anses $h_1^2, \ldots, h_{r_2}^2$, de sorte qu'on a :

$$W^1 \cup \overline{h^2} \cup h_1^2 \cup \ldots \cup h_{r_2}^2 \approx W^2 \cup \overline{h^2} \quad ;$$

d'après le lemme 1 de III, $\overline{h^2}$ "tue" $h_{r_1}^1$; donc :

(3) $$W^2 \cup \overline{h^2} \approx (V \times I) \cup h_1^1 \cup \dots \cup h_{r_1-1}^1 \cup h_1^2 \cup \dots \cup h_{r_2}^2 \quad .$$

D'après II, 4, (jjj), $\pi_1(W^2) \approx \pi_1(W)$; donc $\pi_1(W^2) = 0$; considérons d'autre part, sur W^2, une présentation duale (cf. II, 2) de la présentation induite par celle de W ; elle est de la forme

$$W^2 \approx (\partial W^2 - (V \times \{0\})) \cup h_1'^{n-2} \cup \dots \cup h_{r_2}'^{n-2} \cup h_1'^{n-1} \cup \dots \cup h_{r_1}'^{n-1} \quad ;$$

il résulte donc de II, 4, (jj), que $\pi_2(W^2, \partial W^2 - (V \times \{0\})) = 0$ dès que $2 \leqslant n - 3$, i. e. $n \geqslant 5$; d'où :

(4) $$\pi_1(\partial W^2 - (V \times \{0\})) = 0 \quad .$$

Soit $\overline{q} \in S^{n-3}$; soit $\overline{D}$ le disque $\overline{f}(D^2 \times \{\overline{q}\})$, et soit $\overline{S}$ le bord de $\overline{D}$; d'après (4), $\overline{S}$ est homotope à zéro dans ∂W^2. Puisque ∂W^2 est de dimension $\geqslant 4$, il résulte du théorème de séparation de Whitney que $\overline{S}$ est homotope à zéro dans le complémentaire dans ∂W^2 de la sphère d'attachement de $\overline{h^2}$; donc $\overline{S}$ est homotope à zéro dans $\partial W^2 - \mathring{\overline{A}}$, où $\overline{A}$ désigne la surface d'attachement de $\overline{h^2}$. Il résulte donc du théorème 2 de Whitney (cf. Appendice) que $\overline{S}$, sous-variété difféomorphe à S^1 du bord de la variété $\partial W^2 - \mathring{\overline{A}}$, est bord d'une sous-variété Δ, difféomorphe à D^2, de $\partial W^2 - \mathring{\overline{A}}$. L'espace des jets d'ordre 1 le long de S^1 des plongements de D^2 dans $\partial W^2 - \mathring{\overline{A}}$ dont la restriction à S^1 est un difféomorphisme fixe de S^1 sur $\overline{S}$, est connexe (c'est l'espace des sections d'un fibré à fibre contractile) ; il résulte donc du théorème d'isotopie locale qu'en modifiant au besoin Δ par une isotopie, on peut supposer que Δ se raccorde différentiablement à $\overline{D}$ le long de $\overline{S}$, de manière que $\overline{D} \cup \Delta$ soit l'image d'un certain plongement différentiable ψ de S^2 dans $\partial(W^2 \cup \overline{h^2})$. Il existe alors un plongement $\overline{g}$ de $S^2 \times D^{n-3}$ dans $\partial(W^2 \cup \overline{h^2})$, tel que la restriction de $\overline{g}$ à $S^2 \times \{0\}$ s'identifie à ψ ; $\overline{g}$ définit l'attachement à $W^2 \cup \overline{h^2}$ d'une anse $\overline{h^3}$, d'indice 3. D'après le lemme 1 de III, $\overline{h^3}$ "tue" $\overline{h^2}$, autrement dit $W^2 \cup \overline{h^2} \cup \overline{h^3} \approx W^2$; donc d'après (3) :

$$W^2 \approx (V \times I) \cup h_1^1 \cup \dots \cup h_{r_1-1}^1 \cup h_1^2 \cup \dots \cup h_{r_2}^2 \cup \overline{h^3} \quad .$$

<u>On peut donc, de proche en proche, supprimer toutes les anses d'indice</u> 1, <u>en faisant apparaître de nouvelles anses, toutes d'indice</u> 3 (et qui sont d'ailleurs en nombre égal à celui des anses supprimées).

c. <u>Suppression des anses d'indice</u> p <u>pour</u> $2 \leqslant p \leqslant n - 4$.

On suppose qu'on a déjà supprimé les anses d'indice $\leqslant (p - 1)$, de sorte qu'on a pour W une présentation de la forme :

$$W \approx (V \times I) \cup h_1^p \cup \dots \cup h_{r_p}^p \cup h_1^{p+1} \cup \dots \cup h_{r_n}^n \quad ;$$

on suppose $r_p \geq 1$; on pose :

$$(V \times I) \cup h_1^p \cup \dots \cup h_{r_p-1}^p = M \quad .$$

On applique à M le lemme fondamental (cf. III), avec $\partial M - (V \times \{0\})$, $h_{r_p}^p$, W^p , W^{p+1} , r_{p+1} dans les rôles respectifs de Q , h , V , W et r ; les conditions de dimension sont vérifiées ; $\pi_1(\partial M - (V \times \{0\}))$ est nul d'après II, 4, (jjjj), puisque $\pi_1(V) = 0$, et qu'on a bien à la fois $1 \leq n - p - 2$ et $1 \leq p - 1$. Il reste à vérifier la condition (b) du lemme fondamental, qui s'écrit ici : "la composée des applications canoniques :

$$H_p(D^p , S^{p-1}) \to H_p(W^p , M) \to H_p(W^{p+1} , M)$$

est zéro". Or l'application canonique : $H_p(W^{p+1} , M) \to H_p(W , M)$ est un isomorphisme d'après II, 3, (iii) ; et $H_p(W , M) = 0$ d'après la suite exacte du triple $(W , W^p , V \times I)$:

$$\dots \to H_p(W , V \times I) \to H_p(W , M) \to H_{p-1}(M , V \times I) \to \dots$$

puisque d'une part $H_p(W , V \times I) = 0$ par l'hypothèse de h-cobordisme ; et que d'autre part $V \times I$ s'identifie à W^{p-1} , et $H_{p-1}(M , W^{p-1}) = 0$ d'après II, 3, (ii). Le lemme fondamental montre donc qu'on peut diminuer d'une unité le nombre des anses d'indice p , en supprimant du même coup une anse d'indice $p + 1$.

On peut donc, de proche en proche, supprimer toutes les anses d'indice p , sans faire apparaître aucune nouvelle anse (et en supprimant au contraire des anses d'indice $p + 1$, en nombre égal à celui des anses d'indice p).

d. Suppression des anses d'indice p pour $p \geq n - 3$.

En répétant le procédé ci-dessus, on aboutit à une présentation où il ne reste plus d'anses que pour les indices $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$ et n . On prend une présentation duale (cf. II, 2) de cette présentation ; elle n'a d'anses que pour les indices 0 , 1 , 2 et 3 . On supprime les anses d'indice 0 par le procédé (a), puis les anses d'indice 1 par le procédé (b) ; ce dernier fait apparaître de nouvelles anses, mais seulement pour l'indice 3 . On supprime les anses d'indice 2 par le procédé (c) ; d'après II, 3, (iiii), les anses d'indice 3 disparaissent du même coup.

Appendice : Théorèmes de plongement de Whitney.

THÉORÈME 1. - Soient M une variété, X et X' deux sous-variétés de M. On suppose M, X et X' compactes, connexes, orientées et sans bord ; on suppose en plus :

(a) $\pi_1(M) = 0$; $\pi_1(M - X) = 0$ (cette dernière condition est automatiquement remplie si codimension $X > 2$) ;

(b) dimension $M \geqslant 5$;

(c) codimension $X \geqslant 2$; codimension $X' > 2$;

(d) (dimension X) + (dimension X') = dimension M.

Soit b le nombre d'intersection de X et X'. Il existe un plongement f de X' dans M, qui soit isotope à l'injection de X' dans M, et qui vérifie la condition suivante : $f(X')$ coupe X en $|b|$ points, transversalement en chacun d'eux.

THÉORÈME 2. - Soit M une variété de dimension m ; soit f un plongement différentiable de la sphère S^n dans M ; on suppose que :

(a) f est homotope à 0 dans M ;

(b) $m \geqslant 2n + 2$.

Alors $f(S^n)$ borde un disque différentiablement plongé dans M.

[N.B. - Les énoncés ci-dessus sont ceux que nous avons effectivement utilisés dans ce qui précède ; il existe des résultats plus forts dus à WHITNEY [9], [10], WU WEN TSUN [11], et surtout HAEFLIGER [3].]

BIBLIOGRAPHIE

[1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-380 (Thèse Sc. math. Paris, 1960).

[2] DOUADY (Adrien). - Plongements de sphères, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 205, 6 pages.

[3] HAEFLIGER (André). - Plongements différentiables des variétés dans des variétés, Comment. Math. Helvet., t. 36, 1961, p. 47-82.

[4] HILTON (P. J.). - An introduction to homotopy theory. - Cambridge, Cambridge University Press, 1953 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 43).

[5] MILNOR (John). - Microbundles and differentiable structures. - Princeton, Princeton University, 1961 (multigraphié).

[6] SMALE (Stephen). - On the structure of manifolds, Amer. J. of Math, t. 84, 1962, p. 387-399.

[7] THOM (René). - Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Symposium internacional de Topologia algebraica, [1958. Maxico], p. 54-67. - Mexico, Universidad nacional autonoma, 1958.

[8] WHITEHEAD (J. H. C.). - On C^1-complexes, Annals of Math., t. 41, 1940, p. 809-824.

[9] WHITNEY (Hassler). - Differentiable manifolds, Annals of Math., t. 37, 1936, p. 645-680.

[10] WHITNEY (Hassler). - The self-intersection of a smooth n-manifold in 2n-space, Annals of Math., t. 45, 1944, p. 247-293.

[13] WU WEN TSUN. - On the isotopy of C^r-manifolds of dimension n in Euclian (2n + 1)-space, Science Record, New Series, t. 2, 1958, p. 271-275.