Claude Morlet

Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. IV. Les théorèmes de Whitney et de Morse

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. nº 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A7_0>

22 janvier 1962

LE LEMME DE THOM ET LES THÉORÈMES DE PLONGEMENT DE WHITNEY

par Claude MORLET

IV. Les théorèmes de Whitney et de Morse.

COROLLAIRE 4. - L'ensemble des applications de classe C^s $(s \geqslant 1)$ de V dans M, qui sont des immersions locales, est partout dense dans $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s pourvu que $\dim M \geqslant 2 \dim V$.

Il suffit d'appliquer le lemme local avec $r = 1$, N étant la sous-variété stratifiée formée des jets qui ne sont pas de rang maximum, et de voir que la codimension de N est strictement supérieure à la dimension de V. (Pour cela on remarque que N est fibré sur $V \times M$; c'est même un sous-fibré de $J^1(V, M)$, donc on regarde la codimension dans la fibre qui s'identifie à l'ensemble des matrices de rang non maximum dans l'ensemble des matrices à $(\dim V)$ lignes et $(\dim M)$ colonnes.

COROLLAIRE 5. - Soient deux variétés V et M de classe C^s $(s \geqslant 0)$; l'ensemble des applications injectives de classe C^s de V dans M est partout dense dans $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s, pourvu que $\dim M \geqslant 2(\dim V) + 1$.

On applique le lemme au but avec $r = 0$, N étant la sous-variété de $J^0 \times J^0$, image réciproque de la diagonale du produit $M \times M$ (c'est-à-dire l'ensemble des points de $(V \times M) \times (V \times M)$ dont les deux projections sur M sont égales. Cette sous-variété à donc pour codimension la dimension de M, d'où l'hypothèse qui assure que la transversalité est en fait une disjonction.

THÉORÈME de plongement de Whitney. - Les plongements de classe C^s $(s \geqslant 1)$ d'une variété V dans une variété M forment un ouvert partout dense pour la topologie C^s de l'ensemble des applications propres de classe C^s de V dans M, pourvu que $\dim M \geqslant 2(\dim V) + 1$.

C'est une conséquence triviale des deux corollaires précédents et de l'exposé 5.

COROLLAIRE 6. - Si $\dim M \geqslant 2(\dim V) + 1$, il existe des plongements de V dans M, sauf si V est non compacte et M compacte (rappelons que M a été supposée connexe une fois pour toutes).

Tout revient à montrer qu'il existe des applications propres de V dans M. Si V est compacte, c'est trivial. Supposons donc que V et M soient toutes deux non compactes, M étant connexe. Soit $(f_i)_{i \in N}$ une partition localement finie de l'unité sur V, les f_i étant à support compact ; la fonction $x \to \sum_i if_i(x)$ est une application propre de V dans R. Il reste donc à montrer l'existence d'une application propre de R dans M, lorsque M est connexe et non compacte ; grâce au corollaire 11 ci-dessous, il suffit de trouver une application continue propre de R dans M, ou même simplement de $R_+ = [0, +\infty[$ dans M. Voici comment on procède.

Soit $(U_i)_{i \in N}$ un recouvrement localement fini de M par des ouverts U_i connexes et relativement compacts. Appelons "chaîne" de longueur p toute suite $(i_o, \dots, i_p)$ d'indices distincts, telle que $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ pour $0 \leq k < p$; i_o s'appelle l'origine et i_p l'extrémité de la chaîne. Pour chaque $p \geqslant 0$, soit E_p l'ensemble des chaînes d'origine 0 et de longueur p ; l'ensemble E_p est non vide (parce que M est connexe), et fini (parce que le recouvrement est localement fini). Pour $p \geqslant 1$, soit $\varphi_p : E_p \to E_{p-1}$ l'application qui, à chaque chaîne $(0, i_1, \dots, i_p) \in E_p$, associe $(0, i_1, \dots, i_{p-1}) \in E_{p-1}$. La limite projective des ensembles finis E_p, suivant les φ_p, est non vide, en vertu d'un théorème connu sur les limites projectives d'espaces compacts. Un élément de la limite projective définit une suite infinie $(0, i_1, \dots, i_p, \dots)$ d'indices distincts, telle que $U_{i_p} \cap U_{i_{p+1}} \neq \emptyset$ pour tout p. Prenons $x_p \in U_{i_p}$, et joignons x_p à x_{p+1} par un chemin contenu dans l'ouvert connexe $U_{i_p} \cup U_{i_{p+1}}$; on obtient un chemin joignant $x_o \in U_{i_o}$ à "l'infini" dans M, d'où une application continue propre de R_+ dans M.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 7. - Soient V et M deux variétés de classe C^s $(s \geqslant 1)$, et f une fonction propre de classe C^s de V dans M ; on suppose que $\dim M \geqslant 2(\dim V) + 1$, et que f est injective sur un fermé A, et que, sur A, f est une immersion locale (c'est-à-dire qu'en tout point de A, f est de rang égal à la dimension de V). Alors il existe, aussi près que l'on veut de f au sens C^s, une application g qui est un plongement de V dans M et coïncide avec f sur A.

<u>Démonstration.</u> - Si $f(A) \cap f(V - A) = \emptyset$, il suffit d'appliquer le théorème de plongement aux variétés $V - A$ et $M - f(A)$, en remarquant qu'une application de $V - A$ dans M se recolle à la restriction de f à A si elle est suffisamment proche de la restriction de f à $V - A$, au sens C^s.

Si $f(A) \cap f(V - A) \neq \emptyset$, on commence par modifier f sur $V - A$ pour se ramener au cas précédent. Pour cela on applique le lemme suivant (où l'on remplace F par $V - A$ et G par V) :

LEMME. - Soient trois variétés F, G, M de classe C^s $(s \geqslant 1)$, et g une application de classe C^s de G dans M. Si $\dim F + \dim G + 1 \leqslant \dim M$, l'ensemble des applications f de classe C^s de F dans M, telles que $f(F) \cap g(G) = \emptyset$, est partout dense (et ouvert) dans $\mathrm{Hom}^s(F, M)$ muni de la topologie C^s.

Puisque $\mathrm{Hom}^s(F, M)$ est un espace de Baire, il suffit de montrer que pour tout compact K de F, l'ensemble des f tels que $f(K) \cap g(G) = \emptyset$ est un ouvert partout dense. C'est un ouvert à cause du lemme 2 (Exposé 5). Montrons que l'on peut approcher n'importe quelle fonction f_o par une fonction de cet ensemble. Pour cela on remarque d'abord que l'on peut toujours supposer que M est un ouvert de R^q pour q assez grand : en effet on peut plonger M dans R^q si $q \geqslant 2(\dim M) + 1$; soit alors $t(M)$ un voisinage tubulaire de M ; si l'on approche f_o par une application f_1 de F dans $t(M)$, telle que $f_1(F) \cap p^{-1}(g(G)) = \emptyset$ (où p désigne la projection de $t(M)$ sur M) il restera à prendre $p \circ f_1$ qui sera proche de f_o si f_1 est elle-même proche de f_o. On peut alors supposer que K est contenu dans une carte locale de F. Si a est un vecteur suffisamment petit de R^q, on définit f_a (cf. la démonstration du lemme local (Exposé 6)) qui sur K est définie par $f_a(x) = f_o(x) + a$. Et on applique le lemme fondamental à l'application

$$U \times F \times G \to M \times G$$

$$(a, x, y) \to (f_a(x) ; y) \quad ,$$

où la variété des paramètres U est un voisinage de l'origine dans R^q, et où N est l'image de G dans $M \times G$ par l'application : $y \to (g(y), y)$. On voit ainsi qu'il existe des paramètres a tels que l'application $(x, y) \to (f_a(x), y)$ restreinte à N soit transversale à N, c'est-à-dire, étant données les conditions de dimension et en projetant sur M, $f_a(K) \cap g(G) = \emptyset$.

COROLLAIRE 8. - Soient V et M deux variétés de classe C^s $(s \geq 1)$, et W une sous-variété (fermée) de V. Soit f une application propre de V dans M qui soit un plongement de W. Alors si $\dim M \geq 2(\dim V) + 1$, on peut approcher f autant que l'on veut par un plongement de V qui coïncide avec f sur W.

On applique le corollaire 7, pourvu que l'on ait su d'abord approcher f par une application g qui soit une immersion locale en tout point de W. (A priori en un tel point f est seulement de rang égal à la dimension de W.)

Pour cela, on se place dans le sous-ensemble $A(W, f)$ de $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ qui est formé des applications qui coïncident avec f sur W. C'est un fermé pour la topologie C^s, donc un espace de Baire pour C^s. Soit alors une famille de compacts (K_i) de V dont la reunion est un voisinage de W ; il suffit de montrer que l'ensemble des applications de $A(W, f)$ qui vérifient la condition en tout point d'un K_i est un ouvert partout dense. C'est un ouvert à cause des lemmes 1 et 3. Il est partout dense car si les compacts sont contenus dans des ouverts de coordonnées tels que dans chacun d'eux W apparaîsse comme un morceau de sous-variété linéaire, on ajoute à f une application linéaire quelconque qui s'annule sur W, et on applique le lemme fondamental. (Je laisse au lecteur le soin d'écrire le détail de cette démonstration qui se fait comme celle des théorèmes 5 et 6.)

COROLLAIRE 9. - Soient V et M des variétés de classe C^s $(s \geq 1)$ avec $\dim M \geq 2(\dim V) + 1$. Soit f une application propre de classe C^s de V dans M qui soit un plongement du bord de V. Alors on peut approcher f autant que l'on veut, au sens C^s, par un plongement de V qui coïncide avec f sur le bord de V.

C'est une application du corollaire précédent.

COROLLAIRE 10. - Soient V, W, M trois variétés de classe C^s $(s \geq 1)$, f un plongement de V dans M, et g un plongement de W dans M. Alors si $\dim V + \dim W + 1 \leq \dim M$, on peut approcher f autant que l'on veut par un plongement f' de V dans M, tel que $f'(V) \cap g(W) = \emptyset$.

On applique d'une part le fait que l'ensemble des plongements est ouvert, d'autre part le lemme local, ou le lemme qui a servi à démontrer le corollaire 7.

COROLLAIRE 11. - Soient V et M deux variétés de classe C^r $(r \geq 1)$. Alors $\mathrm{Hom}^r(V, M)$ peut être considéré comme un sous-espace de $\mathrm{Hom}^{r'}(V, M)$ $(0 \leq r' \leq r)$; ce sous-espace est partout dense pour la topologie $C^{r'}$. (On pourrait énoncer un corollaire analogue pour les fonctions qui coïncident avec une fonction donnée sur un fermé donné.)

Si V est un ouvert de R^p et si $M = R^n$, c'est le lemme b (Exposé 4). On peut se ramener à ce cas de la façon suivante : on plonge V et M dans R^p et R^n pour des p et n assez grands ; soient $t(V)$ et $t(M)$ des voisinages tubulaires (avec des projections p_V et P_M). Soit f la fonction à approcher; on considère $f \circ p_V : t(V) \to t(M) \subset R^n$. On applique le lemme b, et on obtient une application f_1 de $t(V)$ dans R^n (et même dans $t(M)$) si f_1 est suffisamment proche de $f \circ p_V$. Il ne reste plus qu'à prendre la restriction à V de $p_M \circ f_1$.

V. Le théorème de Morse.

Définition. - Étant donnée une variété V de classe C^s $(s \geq 2)$ on appelle fonction correcte sur V une application de V dans R de classe C^s telle que, en tout point où la différentielle est nulle, le hessien (matrice des dérivées partielles secondes) soit de rang maximum.

Il en résulte que les points où la différentielle s'annule sont des points isolés.

On dira qu'une fonction est excellente si elle est correcte et si les points où la différentielle s'annule ont des images distinctes.

THÉORÈME (de Morse). - Les fonctions correctes forment un ouvert partout dense dans $\mathrm{Hom}^s(V, R)$ pour la topologie C^s. Les fonctions excellentes forment un ensemble partout dense ; de plus celles qui sont propres forment un ouvert (toujours pour C^s).

Il suffit de voir que les fonctions correctes sont celles dont la dérivée première est une application de V dans $J^1(V, M)$ qui est transversale sur l'ensemble des jets qui correspondent à une différentielle nulle.

Les fonctions excellentes sont celles qui sont de plus telles que $f^1 \times f^1$ soit transversale (= disjointe) de la sous-variété de $J^1 \times J^1$ formée des couples de jets dont les différentielles sont nulles et qui se projettent sur la diagonale de $R \times R$.

Celles qui sont propres forment un ouvert, car si une fonction f est excellente, il existe un voisinage U de la diagonale dans $V \times V$, tel que, si (x, y) est dans U, et si g est suffisamment voisine de f, on n'a pas en même temps $g(x) = g(y)$, $dg(x) = 0$ et $dg(y) = 0$ (c'est analogue à ce que l'on a vu pour les plongements).

COROLLAIRE. - Soient V une variété et W une sous-variété de V (par exemple son bord). Si une fonction f de V dans R, restreinte à W, est une fonction excellente, il existe aussi près que l'on veut de f une fonction g, qui coïncide avec f sur W et qui est excellente.

Cela se démontre comme les corollaires 7 et 8.

BIBLIOGRAPHIE des exposés n° 4, 5, 6 et 7.

[1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-380 (Thèse Sc. math. Paris. 1960).

[2] HAEFLIGER (André). - Plongements différentiables de variétés dans variétés, Comment. Math. Helvet., t. 36, 1961, p. 47-82.

[3] SARD (Arthur). - The measure of critical values of differentiable maps, Bull. Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 883-890.

[4] THOM (René). - Un lemme sur les applications différentiables, Bol. Soc. mat. mexicana, 2e série, t. 1, 1956, p. 59-71.

[5] WHITNEY (Hassler). - Analytic extensions fo differentiable functions defined on closed sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 63-89.

[6] WHITNEY (Hassler). - Differentiable manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 37, 1936, p. 645-680.

[7] WHITNEY (Hassler). - A function not constant on a connected set of critical points, Duke math. J., t. 1, 1935, p. 514-517.