Séminaire Henri Cartan

Claude Morlet

Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. III. Les théorèmes d'existence d'applications transverses

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. nº 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A6_0>

15 janvier 1962

LE LEMME DE THOM ET LES THÉORÈMES DE PLONGEMENT DE WHITNEY

par Claude MORLET

III. Les théorèmes d'existence d'applications transverses.

Nous allons tout d'abord énoncer deux lemmes classiques sur les fonctions différentiables.

LEMME trivial. - Soient V une variété de dimension n, et f une fonction de classe C^1 de V dans R^p ; si $p > n$, l'image de f est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue).

LEMME de Sard. - Soit V une variété de classe C^∞ et de dimension n ; soit f une application de classe C^∞ de V dans R^p ; on suppose $p \leq n$. Soit A l'ensemble des points critiques de f ; alors $f(A)$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Remarque. - SARD a montré le même résultat en supposant seulement que f est de classe C^{n-p+1}, et WHITNEY a montré que c'était l'hypothèse minimum que l'on devait faire, car il a construit une fonction $n - p$ fois différentiable pour laquelle la conclusion est fausse. Ici nous ne démontrerons que l'énoncé ci-dessus, qui est suffisant pour la suite.

On va montrer que l'image de l'ensemble A des points critiques contenus dans un compact K a une image $f(A)$ qui est de mesure nulle.

Soit, pour tout i $(0 \leq i \leq p)$, A_i l'ensemble des points de K où df est de rang i (exactement). Il s'agit de démontrer que, pour tout $i < p$, $f(A_i)$ est de mesure nulle.

On va raisonner par récurrence sur n et p, en remarquant qu'il n'y a rien à démontrer quand $p = 0$, et que dans le cas où $p > n$, c'est le lemme trivial.

Supposons alors que, n et p étant donnés, avec $n \geq p$, le lemme soit démontré dans les cas suivants :

$$(n, k) \quad (k < p)$$

et

$$(\ell\ ,\ p)\quad (\ell < n)\qquad ;$$

montrons qu'il est vrai pour $(n\ ,\ p)$.

a. $f(A_i)$ est de mesure nulle pour $i < p - 1$: en effet composons f avec la projection canonique de R^p sur R^{p-1} ; les points de A_i $(i < p - 1)$ sont des points critiques de cette application composée, donc, d'après la première partie de l'hypothèse de récurrence, la projection de $f(A_i)$ sur R^{p-1} est de mesure nulle, et par suite $f(A_i)$ est de mesure nulle.

b. $f(A_{p-1})$ est de mesure nulle : en effet, soit u un point de A_{p-1} ; en ce point, df est de rang $p - 1$, donc il existe un voisinage $V(u)$ de u et une carte locale sur ce voisinage, tels que f s'écrive dans $V(u)$ sous la forme

$$(x\ ,\ y)\ \to\ (x\ ,\ g(x\ ,\ y))$$

$$R^{p-1} \times R^{n-p+1}\ \to\ R^{p-1} \times R\qquad .$$

Il reste à montrer que l'image des points critiques de cette application de $V(u)$ dans R^p est de mesure nulle.

On remarquera que f est de rang p si et seulement s'il existe une coordonnée y_j de y telle que $\frac{\partial g}{\partial y_i}$ soit non nulle. Soit alors pour tout k inférieur ou égal à $n - p$, C_k l'ensemble des points où toutes les dérivées partielles de g sont nulles jusqu'à l'ordre k au moins. Posons pour $k < n - p$, $B_k = C_k - C_{k+1}$.

1° Pour $k < n - p$, l'image de B_k est de mesure nulle : car si u est un point de B_k , il y a une dérivée d'ordre $k + 1$ de g par rapport aux y qui n'est pas nulle en u ; donc, au voisinage de u , B_k est contenu dans une sous-variété de classe C^∞ et de dimension $n - 1$. On applique alors la deuxième partie de l'hypothèse de récurrence à la restriction de f à cette sous-variété.

2° $f(C_{n-p})$ est de mesure nulle : en effet, recouvrons C_{n-p} par des cubes de côté a ; le nombre de ces cubes croît au plus comme a^{-n} quand a tend vers zéro. Et dans ces cubes on peut majorer g par une expression de la forme

$M.a^{n-p+1}$, puisque dans chacun de ces cubes g s'annule ainsi que ses $n-p$ premières dérivées et que les dérivées $(n-p+1)$-ièmes sont bornées sur le compact K. Alors l'image d'un tel cube est contenue dans un prisme dont la hauteur (le long de la dernière coordonnée) est $M.a^{n-p+1}$, et dont la base est un cube de côté aN, où N désigne une majoration de $\|df\|$. Le volume de ce prisme est $MN^p.a^{n+1}$, et comme le nombre des cubes croît au plus comme a^{-n}, il en résulte que l'on peut mettre l'image de C_{n-p} dans un ensemble de mesure aussi petite que l'on veut.

La démonstration du lemme de Sard est ainsi achevée.

LEMME préparatoire. - Soient U un ouvert de R^n, V un ouvert de R^N, et F une fonction de $U \times V$ dans R^p, de classe C^∞ (et plus généralement de classe C^1 si $n < p$) telle que pour tout $u \in U$ la fonction $v \to F(u, v)$ définie sur V soit transversale sur l'origine dans R^p. Alors si K est un compact de U, l'ensemble V^o des points v de V tels que l'application $u \to F(u, v)$ de U dans R^p soit, en restriction à K, transversale sur l'origine dans R^p, est un ouvert partout dense dans V.

Montrons d'abord que $V - V^o$ est fermé : c'est la projection sur V du sous-ensemble fermé de $K \times V$ (et puisque K est compact cette projection est fermée) formé des zéros de la fonction continue définie de la façon suivante : on envoie $K \times V$ dans R^{p+q} en envoyant $K \times V$ dans R^p par la fonction F, et dans R^q par les déterminants d'ordre p de la matrice des dérivées du premier ordre par rapport aux variables de U (q désigne le nombre de ces déterminants).

Montrons maintenant qu'il y a des points de V^o arbitrairement voisins d'un point v_o donné. Il suffit d'envisager le cas où $v_o \notin V^o$.

Comme la matrice des dérivées partielles de F par rapport à v est de rang p au voisinage de tout point u tel que $F(u, v_o) = 0$, le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer qu'il existe au voisinage d'un tel point p fonctions :

$$g_{u,1}, \dots, g_{u,p}$$

telles que dans un voisinage $A(u) \times B_u(v_o)$ du point (u, v_o) la condition $F(u, v) = 0$ soit équivalente à la condition :

$$v_{n_u(i)} = g_{u,i}(u\ ,\ v_j)$$

(où v_j désigne l'ensemble des coordonnées de v telles que j n'appartienne pas à l'ensemble des $v_{n_u(i)}$ $(i = 1\ ,\ \dots\ ,\ p)$). Et les fonctions $g_{u,i}$ sont indéfiniment différentiables (resp. 1 fois continûment différentiables).

De plus, pour tout point $(u\ ,\ v_o)$ tel que $F(u\ ,\ v_o) \neq 0$, il existe un voisinage $A(u) \times B_u(v_o)$ tel que, si $(u\ ,\ v)$ appartient à ce voisinage, on ait encore $F(u\ ,\ v) \neq 0$.

Comme K est compact on peut le recouvrir par un nombre fini d'ensembles $A(u)$: soient $A(u_1)\ ,\ \dots\ ,\ A(u_q)$ ces voisinages. L'intersection des $B_{u_k}(v_o)$, pour $k = 1\ ,\ \dots\ ,\ q$, est un voisinage B de v_o .

Considérons alors pour chaque k les applications

$$G^k_{n_k(i)}(u\ ,\ v_{j_k}) = g_{n_{u_k}(i)}(u\ ,\ v_{j_k})$$

(pour j_k n'appartenant pas à la famille des $n_{u_k}(i)$), et

$$G^k_{j_k}(u\ ,\ v_{j_k}) = v_{j_k} \quad .$$

I : Si $n < p$, l'image de chacune des fonctions G^k est, d'après le lemme trivial, de mesure nulle dans B , donc il existe un point v aussi voisin que l'on veut de v_o et qui n'appartient à aucune de ces images ; donc v est tel que, pour tout u , $F(u\ ,\ v) \neq 0$.

II : Si $n \geqslant p$, d'après le lemme de Sard l'ensemble des points de B qui sont valeurs critiques de l'une des fonctions G^k est de mesure nulle. Donc on peut trouver, aussi près que l'on veut de v_o , un point v qui n'est valeur critique d'aucun des G^k .

Soit alors u un point tel que $F(u\ ,\ v) = 0$, u appartenant à $A(u_k)$. Remarquons d'abord que, en tout point où dG^k est de rang N , (dg_{u_k}) est nécessairement de rang p par rapport aux u : il suffit d'écrire les matrices

$$dG = \left(\begin{array}{c|c} (dg_{u_k}) & \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right) .$$

Écrivons alors

$$\underset{(v_{j_k}\ \text{fixes})}{dF} = \underset{(v\ \text{fixes})}{dF} + \sum_{n_k(i)} \frac{\partial F}{\partial y_{n_k(i)}}\, dy_{n_k(i)} .$$

Si dans cette expression on remplace dv_m par dg_m on obtient une expression identiquement nulle, par définition des fonctions g_m ; d'où

$$\underset{(v\ \text{fixes})}{dF} = \sum_{n_k(i)} \frac{\partial F}{\partial y_{n_k(i)}}\, dg_{n_k(i)} .$$

Mais comme précisément la matrice des dérivées partielles de F, par rapport aux $v_{n_k(i)}$ et dg, est de rang p en ce point, la différentielle de F, par rapport aux u, est de rang p en ce point.

LEMME fondamental. - Soient V, W, M trois variétés de classe C^∞, et N une sous-variété de classe C^∞ de M, N étant de codimension p, W étant de dimension n. (Dans le cas $n < p$ on peut remplacer la classe C^∞ par la classe C^1.) Soit f une fonction de classe C^∞ (resp. C^1) de $W \times V$ dans M. Soit K un compact de V ; supposons que, pour tout x de W, l'application $y \to f(x, y)$ de V dans M, restreinte à un voisinage U de K, soit transversale sur N. Alors l'ensemble des y de V tels que l'application $x \to f(x, y)$ de W dans M, restreinte à K, soit transversale sur N, est partout dense dans V.

<u>Démonstration</u>. - Soit A un ouvert de M tel que la restriction de N à A puisse être définie comme l'ensemble des zéros de p fonctions h_i $(i = 1, \ldots, p)$, de classe C^∞, telles que les dh_i soient linéairement indépendantes en tout point.

Soit v_0 un point de V ; on va chercher les points qui répondent à la question au voisinage de v_0. Soit K' un compact contenu dans $K \cap f^{-1}(A, v_0)$, dans une carte locale et dans U. Il existe un voisinage $V_{K'}$ de v_0 et un voisinage L de K' contenu dans U et dans une carte locale, tels que $f(L, V_{K'})$ soit contenu dans A. On applique alors le lemme préparatoire à $h \circ f|_{L \times V_{K'}}$ (car dire que $f|_{L \times V_{K'}}$ est transversale sur N, c'est dire que cette fonction est transversale sur 0 dans R^p). On peut alors recouvrir K par un nombre fini des K', donc au voisinage de v_0 les points considérés sont ceux de l'intersection d'un nombre fini d'ouverts partout denses.

THÉORÈME 5 (lemme de Thom local). - Soient V et M deux variétés de classe C^s, et N une sous-variété de $J^r(V, M)$ (ou plus généralement une bonne sous-variété stratifiée). On suppose $0 \leq r \leq s \leq \infty$; de plus si $\dim V \geq \operatorname{codim} N$ et $s < \infty$, on suppose $r < s$). Alors l'ensemble des applications de classe C^s de V dans M, dont la r-ième dérivée est transversale sur N, est partout dense dans $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s.

<u>Démonstration</u>. - On va montrer que cet ensemble est partout dense dans chacun des $\mathrm{Hom}^s(\lambda, V, M)$. Soit (V_i) la famille de cartes locales de V qui a servi à définir λ ; il suffit, puisque C^s est une topologie d'espace de Baire, de montrer que l'ensemble Ω_i des fonctions, dont la restriction à l'un des V_i vérifie la condition, est un ouvert partout dense.

1° Ω_i est ouvert. Cela résulte des lemmes 1 et 3 (exposé 5), et se démontre comme le théorème 3. (C'est là qu'interviennent les hypothèses faites sur r et s.)

2° Montrons que Ω_i est partout dense. Considérons d'abord le cas où N est une vraie sous-variété et où on travaille sur la classe C^∞. Montrons qu'aussi près que l'on veut d'une fonction donnée f il y a une fonction appartenant à Ω_i.

Soit φ une fonction à valeurs dans R, de classe C^∞ égale à 1 sur V_i, nulle en dehors d'un voisinage compact V'_i de V_i contenu dans la même carte

locale que V_i et dont l'image par la fonction donnée f est encore dans $M_{\lambda(i)}$.
A toute fonction P de R^n dans $R^{\dim M}$ qui est un polynôme des coordonnées dans R^n de degré inférieur ou égal à r, et à tout vecteur a de R^n, on associe, pourvu que P et a soient suffisamment petits, une fonction de V dans M en posant :

$$f_{P,a}(x) = f(x) + (f(x-a) - f(x))\ \varphi(x) + \varphi(x) . P(x-a)$$

si x est dans V_i' (le signe $+$ étant pris dans $M_{\lambda(i)}$ et le signe $-$ dans V_i'), et

$$f_{P,a}(x) = f(x)$$

si x n'est pas dans V_i'.

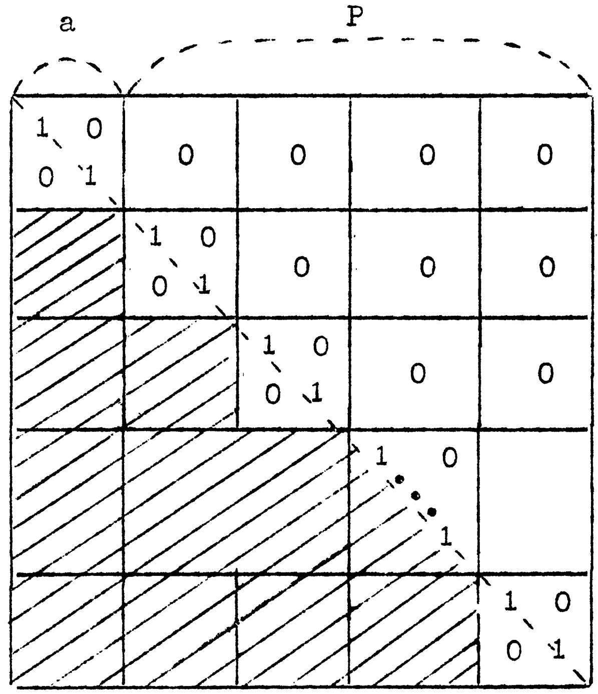
Remarquons que l'application $(P, a) \to f_{P,a}$ est une application continue d'un voisinage de l'origine dans l'èspace vectoriel des coefficients de P et de a dans $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$; donc il suffit de voir qu'il existe des couples (P, a) aussi petits que l'on veut tels que $f_{P,a}$ réponde à la question. Pour cela on va appliquer le lemme fondamental à la fonction $f^r_{P,a}$ considérée comme une fonction d'une part de x et d'autre part des coefficients de P et de a. Écrivons donc la matrice des dérivées partielles par rapport aux coefficients de P et de a :

projection sur V

projection sur M

dérivées d'ordre 1

dérivées d'ordre r



(On écrit simplement que les dérivées p-ièmes d'un polynôme ne dépendent que de ses coefficients de degré $\geqslant p$.)

Donc cette application est localement surjective ; elle est donc certainement transversale sur N. Donc on peut appliquer le lemme fondamental, qui donne le résultat cherché.

Dans le cas où N est une sous-variété stratifiée on applique ce raisonnement successivement sur toutes ses composantes, d'abord celles de plus petite dimension, puis les suivantes, etc. ; en considérant chaque fois que l'espace d'arrivée est, non pas $J^r(V, M)$, mais cet espace moins les composantes sur lesquelles on a déjà transversalisé.

Si $s \neq \infty$, on ne peut plus appliquer le lemme fondamental à $f_{P,a}$, mais grâce au lemme b (Exposé 4) on commence par approcher f par une fonction f' égale à f en dehors de V'_i et dont la restriction à V'_i est une fonction de classe C^∞ de V'_i dans $M_{\lambda(i)}$.

THÉORÈME 6 (Lemme de Thom au but). - Soient V et M deux variétés de classe C^s, et N une sous-variété de classe C^{s-r} (ou plus généralement une "bonne sous-variété stratifiée") de $J^r(V, M) \times J^r(V, M)$. On suppose $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$; de plus, si $\dim v \geqslant \operatorname{codim} N$ et $s < \infty$, on suppose $r < s$. Alors l'ensemble des applications f de V dans M de classe C^s, telles que $f^r \times f^r$, restreinte au complémentaire de la diagonale dans $V \times V$, soit transversale sur N, est partout dense dans $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s.

On raisonne comme pour le lemme local : il suffit de voir que les fonctions qui vérifient cette propriété en restriction au produit $K \times K'$ de deux compacts disjoints forment un ouvert (lemme 4) partout dense : pour cela on modifie la fonction f donnée sur K et sur K' grâce à des polynômes et à des vecteurs P, P', a et a' (cf. lemme local) et on regarde la différentielle de l'application trouvée par rapport aux coefficients de P, P', a, a'.

Remarque. - On peut énoncer un tel lemme pour un nombre fini quelconque de facteurs.