CLAUDE MORLET

Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. I. Les topologies des espaces d'applications

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. n° 4, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A4_0>

Séminaire Henri CARTAN
(Topologie différentielle)
14e année, 1961/62, n° 4

20 novembre 1961

LE LEMME DE THOM ET LES THÉORÈMES DE PLONGEMENT DE WHITNEY

par Claude MORLET

I. Les topologies des espaces d'applications.

1. Espaces d'applications.

Définition. - Étant données deux variétés V et M de classe C^r (au moins), on note $\mathrm{Hom}^r(V , M)$ l'ensemble des applications de classe C^r de V dans M $(0 \leqslant r \leqslant +\infty)$.

Dans la suite V et M seront toujours réunions dénombrables de compacts et M sera connexe. M sera une variété connexe, sans bord (cette hypothèse n'a rien d'essentiel, mais elle simplifiera les démonstrations) ; V pourra avoir un bord et même un bord anguleux.

Définition. - Un système de bonnes cartes locales sur une variété V est la donnée d'un recouvrement de V par des ouverts $(\mathcal{V}_i)_{i\in I}$, et d'une famille localement finie de compacts $(V_i)_{i\in I}$ de V dont les intérieurs recouvrent V et tels que, pour tout i , $V_i \subset \mathcal{V}_i$; avec, pour tout i , un homéomorphisme de $\mathcal{V}_i$ sur un ouvert de R^n (resp. la partie $x_n \geqslant 0$, ou la partie $x_j \geqslant 0$ pour $j \geqslant j_0$ si la variété est à bord ou à coins).

Je laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il existe sur toute variété un système de bonnes cartes locales, et même qu'il en existe d'aussi fins que l'on veut.

Définition. - Étant données deux variétés de classe C^r $(0 \leqslant r < +\infty)$ V et M , et des systèmes de bonnes cartes locales $(V_i)_{i\in I}$ et $(M_j)_{j\in J}$ sur V et M , avec une application λ de l'ensemble d'indices I dans l'ensemble d'indices J , on notera $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$ l'ensemble des applications de classe C^r de V dans M qui, pour tout i , envoient V_i dans l'intérieur de $M_{\lambda(i)}$.

Je laisse au lecteur le soin de vérifier qu'étant donnés un système de bonnes cartes locales sur M et une fonction f de classe C^r de V dans M , il existe un système de bonnes cartes locales sur V et une application λ , tels que f appartienne à $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$. En particulier, les $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$ recouvrent $\mathrm{Hom}^r(V , M)$.

2. Les topologies K-C^r.

Définition. - Etant donnés un $Hom^r(\lambda, V, M)$ $(0 \leq r \leq +\infty)$ et un compact K de V, on appelle topologie K-C^r sur cet espace de fonctions :

a. Si K est contenu dans l'un des compacts V_i du système de bonnes cartes locales de V, la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs r premières dérivées sur K. (C'est-à-dire la convergence uniforme des restrictions à K de ces fonctions, considérées comme des fonctions de K dans $M_{\lambda(i)}$.)

b. Si K n'est pas contenu dans un des V_i, il n'en rencontre qu'un nombre fini, la $(K$-$C^r)$-topologie sera alors la moins fine de toutes les topologies qui sont plus fines que toutes les $((K \cap V_i)$-$C^r)$-topologies correspondantes.

Remarquons que ces topologies ne sont pas, en général, séparées (sauf si $K = V$) et qu'elles peuvent être définies chacune par un écart (même si r est infini).

LEMME. - Soient deux espaces $Hom^r(\lambda, V, M)$ et $Hom^r(\lambda', V, M)$ et un compact K de V ; les topologies K-C^r définies sur chacun de ces deux espaces induisent la même topologie sur leur intersection.

Remarquons que, quelle que soit la famille $(K_a)_{a\in A}$ de compacts recouvrant K, la $(K$-$C^r)$-topologie est la moins fine de toutes les topologies plus fines que toutes les $(K_a$-$C^r)$-topologies. Il suffit donc de démontrer le lemme dans le cas où K est contenu dans l'un des V_i et dans l'un des V'_i. On a alors à comparer les dérivées de

$$R^n \supset U \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} V_i \xrightarrow{f} M_{\lambda(i)} \xrightarrow{\psi_{\lambda(i)}} R^p$$

et de

$$R^n \supset U' \xrightarrow{\varphi'^{-1}_{i'}} V'_{i'} \xrightarrow{f} M_{\lambda'(i')} \xrightarrow{\psi'_{\lambda'(i')}} R^p \qquad .$$

et l'on a des majorations évidentes en fonction des dérivées de φ_i, $\varphi'_{i'}$, $\psi_{\lambda(i)}$, $\psi'_{\lambda'(i')}$ qui sont bornées sur K.

<u>Définition</u>. - On appelle $(K\text{-}C^r)$-topologie sur $\mathrm{Hom}^r(V , M)$ la topologie qui induit sur chacun des $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$ la $(K\text{-}C^r)$-topologie précédemment définie.

Cette définition est légitime à cause du lemme précédent.

<u>Remarques</u>. - Si K contient K', la $(K\text{-}C^r)$-topologie est plus fine que la $(K'\text{-}C^r)$-topologie. Si r est plus grand que r', la $(K\text{-}C^r)$-topologie est plus fine que la $(K\text{-}C^{r'})$-topologie.

3. Les topologies C^r et $\mathcal{C}^r$.

<u>Définition</u>. - On appelle topologie C^r $(0 \leq r \leq +\infty)$ (sur $\mathrm{Hom}^r(V , M)$ ou sur $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$) la moins fine de toutes les topologies qui soient plus fines que toutes les topologies $K\text{-}C^r$.

Il en résulte que la topologie C^r sur $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$ est la restriction à ce sous-espace de la topologie C^r sur $\mathrm{Hom}^r(V , M)$.

<u>Définition</u>. - On appelle topologie $\mathcal{C}^r$ (sur $\mathrm{Hom}^r(V , M)$, ou sur $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V, M)$) la topologie la plus fine qui rende ouverte les bijections identiques

$$(\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M) \text{ muni de } \mathcal{C}^r) \to (\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M) \text{ muni de } K\text{-}C^r)$$

$$[\text{resp. } (\mathrm{Hom}^r(V , M) \text{ muni de } \mathcal{C}^r) \to (\mathrm{Hom}^r(V , M) \text{ muni de } K\text{-}C^r)]$$

pour tous les K de V.

Il en résulte que la topologie $\mathcal{C}^r$ sur $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$ est la restriction à ce sous-espace de la topologie $\mathcal{C}^r$ sur $\mathrm{Hom}^r(V , M)$.

<u>Remarque</u>. - La topologie $\mathcal{C}^r$ est plus fine que la topologie C^r ; elles sont identiques si et seulement si V est compact. (Il existe alors une topologie $K\text{-}C^r$ plus fine que toutes les autres.)

On remarquera que la topologie définie par DOUADY au début de l'exposé 2 n'est autre que la topologie $\mathcal{C}^\infty$.

On va prouver le théorème suivant.

THÉORÈME. - Tout fermé d'un $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$ pour la topologie C^r est un espace de Baire pour la topologie $\mathcal{C}^r$.

Et comme les $\mathrm{Hom}^r(\lambda , V , M)$ sont ouverts pour la topologie $\mathcal{C}^r$, on peut énoncer :

COROLLAIRE. - Tout fermé de $\mathrm{Hom}^r(V, M)$ pour la topologie C^r est un espace de Baire pour la topologie $\mathcal{C}^r$.

On a remarqué que les topologies K-C^r sur $\mathrm{Hom}^r(\lambda, V, M)$ étaient définies chacune par une famille d'écarts ; si l'on regarde alors les définitions des topologies C^r et $\mathcal{C}^r$, on voit qu'il suffit de démontrer le lemme de topologie suivant pour avoir le théorème annoncé :

LEMME. - Soit X un espace topologique séparé, et sur cet espace une famille d'écarts $(d_i)_{i\in I}$ tels que, pour tout point x, si l'on se donne une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres strictement positifs, les y qui vérifient $d_i(x, y) \leqslant a_i$ pour tout i forment un voisinage de x, et que les voisinages de cette forme constituent une base de voisinages de x. On suppose de plus que si une suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy pour chacun des d_i, il existe un x tel que, pour tout i, $d_i(x, x_n)$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini. Autrement dit la structure uniforme engendrée par cette famille d'écarts est complète pour les suites. Alors X est un espace de Baire.

Démontrons ce lemme. Soient dans X une suite U_n d'ouverts partout denses, et V un ouvert non vide quelconque ; montrons que l'intersection des U_n et de V n'est pas vide. Pour cela on va définir une suite x_n par récurrence.

On prendra x_1 dans $U_1 \cap V$. On peut alors trouver un voisinage de x_1 contenu lui aussi dans $U_1 \cap V$ et qui se compose des y tels que $d_i(y, x_1) \leqslant a_i^1$ pour tout i. Soit V_1 l'ensemble des y tels que $d_i(y, x_1) \leqslant \frac{1}{2} a_i^1$ pour tout i.

On prend x_2 dans $U_2 \cap V_1$, et on définit de la même façon un voisinage de x_2 contenu dans $U_2 \cap V_1$, ainsi qu'un voisinage "moitié" V_2. Et ainsi de suite.

Remarquons que l'on peut toujours s'arranger pour que l'on ait, pour tout i, et pour tout n, $a_i^{n+1} \leqslant \frac{1}{2} a_i^n$; alors la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy pour chacun des d_i. Soit donc x un point tel que $d_i(x, x_n)$ tende vers zéro pour tout i ; on remarque que $d_i(x, x_n) \leqslant \lim d_i(x_{n+m}, x_n) \leqslant a_i^n$ pour tout i et tout n. Ce qui prouve que x appartient à V_n pour tous les n, donc à tous les U_n et à V.

Énonçons encore trois propriétés de ces topologies dont nous aurons besoin dans la suite.

LEMME a. - Pour $r > r'$ $(0 \leqslant r, r' \leqslant +\infty)$, l'injection naturelle de

$\mathrm{Hom}^r(V , M)$ dans $\mathrm{Hom}^{r'}(V , M)$ est continue pour les topologies $K\text{-}C^r$ et $K\text{-}C^{r'}$ (resp. C^r et $C^{r'}$, resp. $\mathcal{C}^r$ et $\mathcal{C}^{r'}$).

C'est trivial.

LEMME b. - $(0 \leq r , r' \leq +\infty)$. Soit U un ouvert de R^p et $r > r'$; alors $\mathrm{Hom}^r(U , R^n)$ est partout dense dans $\mathrm{Hom}^{r'}(U , R^n)$ pour la topologie $\mathcal{C}^{r'}$.

LEMME c. - $(0 \leq r' < r \leq +\infty)$. Soient U un ouvert de R^p , K un compact de U , V un voisinage quelconque de K dans U , f une fonction de classe $C^{r'}$ de U dans R^n ; alors il existe aussi près que l'on veut de f au sens $\mathcal{C}^{r'}$, une fonction g qui coïncide avec f en dehors de V et qui soit de classe C^r sur K .

On remarque tout de suite qu'il suffit de démontrer les lemmes b et c dans le cas $n = 1$. On démontre d'abord le lemme c par convolution avec une cloche de classe C^r . Ensuite, on en déduit le lemme b en répétant l'opération pour toute une suite de compacts qui recouvrent U . Pour une démonstration détaillée, je renvoie au mémoire de WHITNEY [5] (*), où l'on verra d'ailleurs que l'on peut supposer que la classe C^r est la classe des fonctions analytiques.

__Remarque.__ - Si $\mathrm{Hom}^s(\lambda , V , M)$ $(0 \leq s \leq \infty)$ contient une application propre f , toutes les applications de $\mathrm{Hom}^s(\lambda , V , M)$ sont propres. Les applications propres forment donc un ouvert (et aussi un fermé) de $\mathrm{Hom}^s(V , M)$ pour la topologie $\mathcal{C}^s$.

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie commune aux exposés 4 à 7, placée à la fin de l'exposé n° 7.