

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Arrondissement des arêtes

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. n° 3, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A3_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ARRONDISSEMENT DES ARÊTES

par Adrien DOUADY

I. Arrondissement des arêtes

1. Théorème d'arrondissement des arêtes.

DEFINITION 1. — Soit V une variété à bord anguleux. On appelle arête de V toute sous-variété sans bord relatif X de V , de codimension 2 et de coindice 2 (cf. Exposé 1, I, n° 7 et 8).

Soit θ un difféomorphisme croissant de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \pi]$, tel que $\theta(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \pi - \theta(\alpha)$. On notera $\bar{\theta}$ l'homéomorphisme du quart de disque

$$B_0^{2,2} = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

sur le demi-disque

$$B_0^{2,1} = \{(x, y), y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

qui au point de coordonnées polaires (ρ, α) associe le point de coordonnées polaires $(\rho, \theta(\alpha))$. C'est un difféomorphisme en dehors de 0.

Pour tout $(2, 2)$ -tube, i. e. pour tout fibré B , de fibre $B_0^{2,2}$ et de groupe structural \mathbb{Z}_2 opérant par symétrie $(x, y) \rightarrow (y, x)$, sur une variété à bord anguleux X , on notera encore $\bar{\theta}$ l'homéomorphisme de B sur le $(2, 1)$ -tube associé B' , de fibre $B_0^{2,1}$ où \mathbb{Z}_2 opère par symétrie $(x, y) \rightarrow (-x, y)$, obtenu en transportant $\bar{\theta}$ sur chaque fibre.

DEFINITION 2. — Soient V une variété à bord anguleux, X une arête de V , θ une fonction satisfaisant aux conditions ci-dessus. On appellera variété obtenue à partir de V en arrondissant X à l'aide de la fonction θ et du voisinage tubulaire (N, μ, ψ) de X dans V (où ψ est un plongement dans V d'un $(2, 2)$ -tube B sur X) la variété V' obtenue à partir de la somme disjointe $(V - X) \cup B'$, où B' est le $(2, 1)$ -tube associé à B , en identifiant x à $\bar{\theta}(\psi^{-1}(x))$ pour tout $x \in N - X$.

Remarques.

(1) L'espace topologique sous-jacent à V' s'identifie à celui de V , et l'application identique $V \rightarrow V'$ est un difféomorphisme en dehors de X .

(2) X devient une sous-variété sans bord relatif de V' , de codimension 2 et de coindice 2, et l'application canonique $\psi' : B' \rightarrow V'$ définit un voisinage tubulaire de X dans V' .

(3) $\partial^1(V')$ est obtenu à partir de $\partial^1(V)$ par recollement suivant l'involution du revêtement à deux feuilletts de X induit par $\partial^1 \partial^1 V \rightarrow \partial^2 V$ (Exposé 1, I, 6, p. 3).

(4) Pour toute variété W , $V' \times W$ est obtenue à partir de $V \times W$ en arrondissant l'arête $X \times W$.

THÉOREME 1. - Soient V une variété à bord anguleux, X une arête compacte de V .

a. Deux variétés V'_1 et V'_2 obtenues à partir de V en arrondissant X sont difféomorphes.

b. Si G est un fermé de V , tel que $G \cap X = \emptyset$, il existe un difféomorphisme de V'_1 sur V'_2 qui coïncide, sur $G \cup X$, avec l'application identique de V .

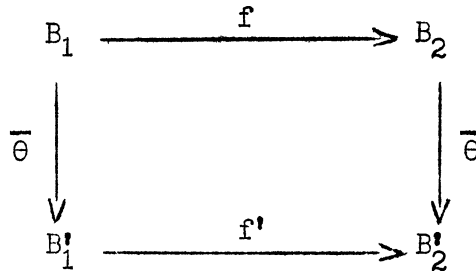
Démonstration. - V'_1 et V'_2 sont obtenues grâce à des fonctions θ_1 et θ_2 et à des voisinages tubulaires (N_1, μ_1, ψ_1) et (N_2, μ_2, ψ_2) respectivement. On va étudier séparément les cas $\theta_1 = \theta_2$ et $(N_1, \mu_1, \psi_1) = (N_2, \mu_2, \psi_2)$. Le cas général s'en déduira en changeant d'abord le voisinage tubulaire, puis la fonction θ .

α. Changement de voisinage tubulaire. $\theta_1 = \theta_2$. - Pour $i = 1, 2$, ψ_i est un plongement de B_i dans V . D'après le théorème 2 de l'exposé 2 (p. 4), il existe un isomorphisme de fibrés $f : B_1 \rightarrow B_2$ et un difféomorphisme γ de V sur elle-même tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \\
 \psi_1 \downarrow & & \downarrow \psi'_2 \\
 V & \xrightarrow{\gamma} & V
 \end{array}$$

soit commutatif.

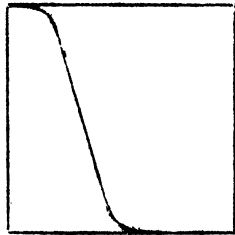
L'isomorphisme f donne naissance à un isomorphisme $f' : B_1' \rightarrow B_2'$ des fibrés associés de fibre $B_0^{2,1}$, et le diagramme



est commutatif.

Les difféomorphismes γ et f' , qui forment un diagramme commutatif avec les $\bar{\theta} \circ \psi_1^{-1}$, se recollent en un difféomorphisme γ' de V_1' sur V_2' qui répond à la question. La partie (b) découle de la partie (b) du théorème 2 de l'exposé 2.

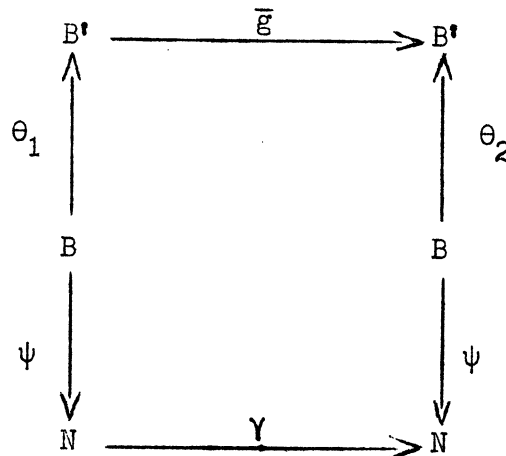
β . Changement de θ . - Soit η une application C^∞ de $(0, 1)$ dans $(0, 1)$,



telle que $\eta = 1$ au voisinage de 0 et 0 au voisinage de 1, et considérons l'application g du demi-disque $B_0^{2,1}$ dans lui-même qui au point de coordonnées polaires (ρ, α) fait correspondre le point de coordonnées polaires

$(\rho, \eta\alpha + (1 - \eta) \theta_2(\theta_1^{-1}(\alpha)))$. g coïncide avec l'identité au voisinage de 0 et avec $\theta_2 \circ \theta_1^{-1}$ au voisinage du demi-

cercle $\rho = 1$; c'est un difféomorphisme du demi-disque sur lui-même. Soit \bar{g} le difféomorphisme de B' sur lui-même obtenu en transportant g sur chaque fibre. L'homéomorphisme γ de $N = \psi(B)$ sur lui-même tel que le diagramme



soit commutatif, coïncide avec l'identité sur le bord relatif de N dans V , et se prolonge donc par I sur $V - N$ en un homéomorphisme, encore noté γ , de

V sur elle-même, qui induit un automorphisme C^∞ sur $V - X$. Les automorphismes γ de $V - X$ et \bar{g} de B' se recollent en un difféomorphisme γ' de V_1' sur V_2' , qui répond à la question. Pour la partie (b), remarquons qu'on peut prendre η à support dans $[0, \varepsilon[$, ε arbitraire. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Remarque. - Dans le cas (a) : $(\theta_1 = \theta_2)$, l'homéomorphisme $\gamma : V \rightarrow V$ identique à γ' est un difféomorphisme. Il n'en est pas de même dans le cas (b).

2. Exemples.

PROPOSITION 1.

a. Une variété V , obtenue à partir de la demi-boule

$$D_+^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1, x_n \geq 0\}$$

en arrondissant l'arête S^{n-2} , est difféomorphe à la boule D^n .

b. On peut trouver un difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow D$ qui coïncide avec l'identité sur S_+^{n-1} et avec la projection stéréographique sur D^{n-1} .

Démonstration. - Repérons un point $z \in D^n$ par

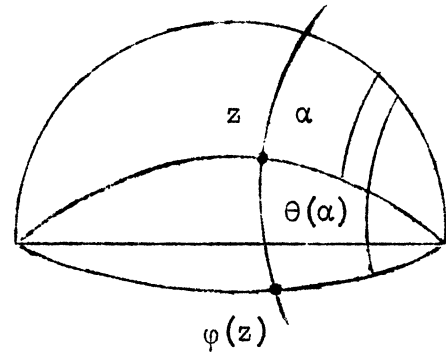
- l'angle α de la sphère Σ_α contenant S^{n-2} et passant par z déterminé par

$$0 \leq \alpha \leq \pi, \quad \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ si et seulement si } z \in D_+^n.$$

- les coordonnées polaires (ρ, u) , $\rho \in [0, 1]$, $u \in S^{n-2}$, du point x où le cercle Γ orthogonal aux Σ_α passant par z rencontre D^{n-1} .

L'application $\varphi : D_+^n \rightarrow D^n$ qui, au point repéré par (α, ρ, u) associe le point repéré par $(\theta(\alpha), \rho, u)$ est un difféomorphisme sauf sur S^{n-2} . L'application $\psi : S^{n-2} \times B_0^{2,1}$ qui, à (u, y) , où $u \in S^{n-2}$, $y \in B_0^{2,1}$ a pour coordonnées polaires (r, α) , associe le point z , repéré par $(\alpha, \rho = 1 - \frac{r}{2}, u)$, définit un voisinage tubulaire de S^{n-2} dans D^n , et induit un voisinage tubulaire de S^{n-2} dans D_+^n . Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-2} \times B_0^{2,2} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & S^{n-2} \times B_0^{2,1} \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 D_+^n & \xrightarrow{\varphi} & D_+^n
 \end{array}$$



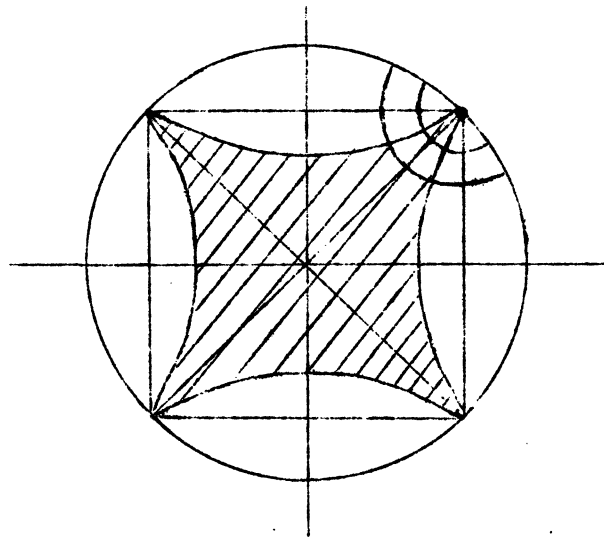
est commutatif, donc φ est un difféomorphisme de la variété V , obtenue en arrondissant S^{n-2} dans D_+^n à l'aide de ψ , sur D_+^n .

PROPOSITION 2. — Une variété obtenue à partir du produit $D^p \times D^q$ en arrondissant l'arête $S^{p-1} \times S^{q-1}$ est difféomorphe à D^{p+q} .

Démonstration. — Considérons dans $R^{p+q} = \underline{R}^p \times \underline{R}^q$ la surface Σ_α d'équation $\cos \alpha (\|x\|^2 - \|y\|^2) + \sin \alpha (\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2) = 0$.

Par tout point $z \in D^{p+q}(\sqrt{2})$ passe une surface Σ_α et une seule, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, sauf si $z \in S^{p-1} \times S^{q-1}$, et $z \in D^p \times D^q$ si et seulement si $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4})$. Si θ vérifie $\theta(\alpha) = \alpha + \frac{\pi}{4}$ pour α voisin de $\frac{\pi}{4}$, ce qu'on peut toujours supposer grâce au théorème 1, considérons l'application φ de $D^p \times D^q$ sur $D^{p+q}(\sqrt{2})$ qui, à un point z de la surface Σ_α , fait correspondre le point z' qui se trouve sur la même trajectoire orthogonale aux Σ_α que z , et sur la surface $\Sigma_{\alpha'}$, avec $\alpha' = \theta(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2}$. L'application φ est un difféomorphisme de la variété obtenue en arrondissant $S^{p-1} \times S^{q-1}$ dans $D^p \times D^q$ sur $D^{p+q}(\sqrt{2})$.

Cette proposition pourra aussi se déduire du théorème 6.



PROPOSITION 3. - Soit \mathcal{M} l'ensemble des classes, à un difféomorphisme près, de variétés compactes à bord lisse. L'opération qui, à deux variétés V_1 et V_2 , fait correspondre une variété V obtenue à partir de $V_1 \times V_2$ en arrondissant l'arête $\partial V_1 \times \partial V_2$, munit \mathcal{M} d'une loi de composition. Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 1. Cette loi est évidemment commutative. Le lecteur pourra montrer, à titre d'exercice, qu'elle est associative (cf. exercice 3 à la fin de l'exposé).

Commutation avec le recollement.

THÉORÈME 2. - Soient V une variété à bord anguleux, F une face de V , f un difféomorphisme involutif sans point fixe de F sur elle-même. Soient $W = (V/f, \sigma)$ une variété recollant V suivant f , et $\chi : V \rightarrow W$ l'application canonique. Si X est une arête compacte de V , non contenue dans F et telle que $f(X \cap F) = X \cap F$, alors $Y = \chi(X)$ est une arête de W . Soit alors W' une variété obtenue à partir de W en arrondissant Y .

a. Il existe une variété V' obtenue à partir de V en arrondissant X telle que, si F' désigne la face de V' identique à F , f soit encore un difféomorphisme de F' sur elle-même. Toute variété W'_0 , recollant V' suivant $f : F' \rightarrow F'$, est difféomorphe à W' .

b. Si G est un fermé de W' ne rencontrant pas Y , on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : W' \rightarrow W'_0$ qui coïncide, sur $G \cup Y$, avec l'application identique de V/f .

Démonstration. - La structure de variété σ de W est de la forme $\sigma(\psi)$ (notations de la démonstration du théorème 3 de l'exposé 2, page 9), où $\psi : F \times (0, 1) \rightarrow V$ définit un voisinage tubulaire de F dans V . On en déduit un voisinage tubulaire (N_1, μ_1, ψ_1) de F/f dans W . Soit (N'_1, μ'_1, ψ'_1) un voisinage tubulaire de Y dans W , tel qu'il existe un voisinage tubulaire de $Y \cap F/f$ dans W adapté simultanément à (N_1, μ_1, ψ_1) et (N'_1, μ'_1, ψ'_1) . Ce voisinage tubulaire se relève en un voisinage tubulaire (N'', μ'', ψ'') de X dans V , tel qu'il existe un voisinage tubulaire de $X \cap F$ dans V adapté simultanément à (N, μ, ψ) et (N'', μ'', ψ'') . On vérifie que la variété W'_0 obtenue à partir de W en arrondissant Y à l'aide de (N'_1, μ'_1, ψ'_1) peut également être obtenue en recollant V' suivant f par un voisinage tubulaire de F' dans V' déduit de (N, μ, ψ) , V' désignant la variété obtenue à partir de V en arrondissant X à l'aide de (N'', μ'', ψ'') , et F' la face de V' correspondant à F .

D'après le théorème 1, toute variété W' , obtenue à partir de W en arrondissant Y , est difféomorphe à W'_0 , ce qui démontre le théorème 2, la partie (b) se déduisant de la partie (b) du théorème 1.

II. Introduction d'arêtes et recollement suivant une semi-face

1. Introduction d'arêtes.

DÉFINITION 3. - Soient V une variété à bord anguleux, X une sous-variété de V sans bord relatif, de codimension 2 et de coïndice 1, et θ une fonction satisfaisant aux conditions du n° 1. On appellera variété obtenue à partir de V , en introduisant une arête en X à l'aide de la fonction θ et du voisinage tubulaire (N, μ, ψ) , où $\psi: B \rightarrow V$ est un plongement, la variété V' , obtenue à partir de la somme disjointe de $V - X$ et du $(2, 2)$ -tube B' associé à B , en identifiant x à $\bar{\theta}^{-1}(\psi^{-1}(x))$ pour tout $x \in N - X$.

Analogues aux théorèmes 1 et 2, on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1'. - Soient V une variété à bord anguleux, X une sous-variété de V sans bord relatif, compacte, de codimension 2 et de coïndice 1.

a. Deux variétés V'_1 et V'_2 obtenues à partir de V en introduisant une arête en X sont difféomorphes.

b. Si G est un fermé de V tel que $G \cap X = \emptyset$, il existe un difféomorphisme γ' de V'_1 et V'_2 qui coïncide avec l'identité de V sur $G \cup X$.

THÉORÈME 2'. - Soient V une variété à bord anguleux, F une face de V , f un difféomorphisme involutif sans point fixe de F sur elle-même. Soient $W = (V/f, \sigma)$ une variété recollant V suivant f , et $\chi: V \rightarrow W$ l'application canonique.

Si X est une sous-variété sans bord relatif de V , compacte, de codimension 2 et de coïndice 1, $Y = \chi(X)$ est une sous-variété de W vérifiant encore ces propriétés. Soit alors W' une variété obtenue à partir de W en introduisant une arête en Y .

a. Il existe une variété V' obtenue à partir de V en introduisant une arête en X , telle que, si F' désigne la face de V' identique à F , f soit encore un difféomorphisme de F' sur elle-même. Toute variété W'_0 recollant V' suivant $f: F' \rightarrow F'$ est difféomorphe à W' ;

b. Si G est un fermé de W' ne rencontrant pas Y , on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : W' \rightarrow W'_0$ qui coïncide, sur $G \cup Y$, avec l'application identique de V/f .

L'idée que les opérations d'arrondissement d'une arête et d'introduction d'un angle sont des opérations inverses l'une de l'autre est exprimée par le théorème suivant

THÉORÈME 3. - L'arrondissement des arêtes et l'introduction d'angles définissent des bijections inverses de l'ensemble $\mathcal{P}_{n;2,2}$ des classes à un difféomorphisme près de paires (V, X) , où V est une variété de dimension n , compacte, à bord anguleux, et X une arête de V , sur l'ensemble $\mathcal{P}_{n;2,1}$ des classes à un difféomorphisme près de paires (V, X) , où V est une variété de dimension n , compacte, à bord anguleux, et X une sous-variété de V sans bord relatif, de codimension 2 et de coïndice 1.

Démonstration. - Le théorème 1 montre que l'arrondissement des angles définit une application $\alpha : \mathcal{P}_{n;2,2} \rightarrow \mathcal{P}_{n;2,1}$ et le théorème 1' montre que l'introduction d'angles définit $\beta : \mathcal{P}_{n;2,1} \rightarrow \mathcal{P}_{n;2,2}$.

Si V' est obtenue à partir de V en arrondissant l'arête X à l'aide de la fonction θ et du voisinage tubulaire (N, μ, ψ) de X dans V , on récolte (Remarque 3) un voisinage tubulaire (N', μ', ψ') de X dans V' , et la variété V'' obtenue à partir de V' en introduisant un angle en X à l'aide de la même fonction θ et du voisinage tubulaire (N', μ', ψ') s'identifie à V . Ceci montre que $\beta \circ \alpha = I$. On montre de même de $\alpha \circ \beta = I$.

2. Recollement suivant une semi-face.

Définition. - Soit V une variété à bord anguleux. On appellera semi-face de V toute sous-variété F de V , de codimension 1 et de coïndice 1, dont le bord relatif $X = b^1(F) - F \cap b^2(V)$ est une face de F . X est alors une sous-variété de V de codimension 2 et de coïndice 1, et F devient une face de toute variété V' obtenue à partir de V en introduisant un angle en X .

Définition. - Soient V une variété à bords anguleux, F une semi-face de V , f un difféomorphisme de F sur elle-même, sans point fixe et tel que $f \circ f = I$. Soit V' une variété obtenue à partir de V en arrondissant le bord relatif X de F , alors F est une face de V' et toute variété $W = (V'/f, \sigma)$ obtenue en recollant V' suivant $f : F \rightarrow F$ sera, par ellipse, dite obtenue en recollant V suivant $f : F \rightarrow F$.

THÉORÈME 4. - Soient $V, F, f: F \rightarrow F$ satisfaisant aux conditions de la définition ci-dessus.

a. Deux variétés W_1 et W_2 obtenues en recollant V suivant f sont difféomorphes.

b. Si G est un fermé de V tel que $G \cap F = \emptyset$, on peut trouver un difféomorphisme $\gamma: W_1 \rightarrow W_2$ qui coïncide avec l'identité sur $\chi(G \cup F)$.

LEMME 1. - Soient V_1^i et V_2^i deux variétés obtenues à partir de V en introduisant un angle en X , bord relatif d'une semi-face F de V . Alors, pour tout fermé G tel que $G \cap X = \emptyset$, on peut trouver un difféomorphisme γ_0 de V_1^i sur V_2^i induisant l'identité sur $F \cup G$.

Démonstration du lemme. - D'après le théorème 1', V_1^i et V_2^i sont difféomorphes, et on peut trouver un difféomorphisme γ' de V_1^i sur V_2^i induisant l'identité sur $G \cup X$. Mais la construction de γ' montre que $\gamma'(F) = F$ et que le difféomorphisme $\gamma: F \rightarrow F$ induit par γ' est $((G \cap F) \cup X)$ -isotope à l'identité. Soit donc $\Gamma: (0, 1) \times F \rightarrow F$ une isotopie, telle que $\Gamma_0: I_F, \Gamma_1 = \gamma$, et soit (N, μ, ψ) un voisinage tubulaire de F dans V_1^i . Soit enfin η une fonction C^∞ définie sur $(0, 1)$ à valeurs dans $(0, 1)$, égale à 0 au voisinage de 0 et à 1 au voisinage de 1. Définissons

$$h: V_1^i \rightarrow V_1^i$$

par

$$h(x) = x \text{ si } x \notin N$$

et

$$h(\psi(x, t)) = \psi(\gamma^{-1}(\Gamma(x, (\eta(t))), t) \text{ pour } x \in W, t \in [0, 1].$$

h est un difféomorphisme de V sur elle-même, coïncidant avec l'identité sur

$$G_1 = V_1^i - N \cup \psi((F \cap G \cup X) \times I),$$

et avec γ^{-1} sur F . Quitte à agrandir G , on peut toujours supposer $G_1 \supset G$. Alors

$$\gamma_0 = \gamma' \circ h$$

répond à la question.

Remarque. - Si X est le bord relatif commun à deux semi-faces F_1 et F_2 , γ_0 coïncide avec γ' sur F_2 . En appliquant le lemme deux fois, on trouvera un difféomorphisme γ induisant l'identité sur F_1 et sur F_2 .

Démonstration du théorème. - W_1 et W_2 sont obtenues en recollant des variétés V_1' et V_2' respectivement, V_1' et V_2' étant obtenues à partir de V en introduisant un angle en X , bord relatif de la semi-face F . D'après le lemme 1 on peut trouver un difféomorphisme $\gamma_0 : V_1' \rightarrow V_2'$ induisant l'identité sur F , ainsi que sur G . On identifie V_1' à V_2' par γ_0 , et le théorème 3 de l'exposé 2 dit que W_1 et W_2 sont difféomorphes. La partie (b) se déduit de la partie (c) du théorème invoqué.

3. Un théorème d'associativité.

THÉORÈME 5. - Soient V_1, V_2, V_3 trois variétés à bord anguleux de dimension n , et pour tout couple d'indices $i, j, i \neq j$, soit F_{ij} une semi-face compacte de V_i , et f_{ij} un difféomorphisme de F_{ji} sur F_{ij} . On suppose que, pour toute permutation (i, j, k) de $(1, 2, 3)$:

a. F_{ij} et F_{ik} ont même bord relatif $X_i = F_{ij} \cap F_{ik}$, de sorte que $F_i = F_{ij} \cup F_{ik}$ est une face de V_i ;

b. $f_{ij} \circ f_{ji} = \text{identité de } F_{ij}$;

c. Les difféomorphismes $f_{ij} \circ f_{jk}$ et f_{ik} de X_k sur X_i coïncident, ce qui permet d'identifier X_1, X_2, X_3 en un même espace X .

Alors :

a. On peut recoller V_j à V_k suivant f_{jk} de façon à obtenir une variété V_{jk} telle f_{ji} et f_{ki} se recollent en un difféomorphisme f_i de F_i sur la face $F_{ji} \cup F_{ki}$ de V_{jk} .

b. Soit, pour chaque i , W_i une variété obtenue en recollant V_i à V_{jk} suivant f_i . Les variétés W_1, W_2 et W_3 sont difféomorphes. De plus leur classe à un difféomorphisme près ne dépend pas du choix fait pour V_{jk} .

Démonstration.

a. Soient V'_j et V'_k deux variétés obtenues à partir de V_j et V_k respectivement en introduisant des angles en X_j et X_k . Soit $\psi_i : X \times [-1, +1] \rightarrow F_i$ un voisinage tubulaire de X_i dans F_i , et considérons les voisinages tubulaires ψ_{ji} et ψ_{ki} de X_j dans F_{ji} et X_k dans F_{ki} respectivement, transportés des voisinages induits par ψ_i dans F_{ij} et F_{ik} par les difféomorphismes f_{ji} et f_{ki} . On peut prolonger ces voisinages tubulaires en des voisinages tubulaires, que nous noterons $\bar{\psi}_{ji}$ et $\bar{\psi}_{ki}$, de F_{jk} dans V_j et F_{kj} dans V_k respectivement. En effet si par exemple $\bar{\psi}'$ est un voisinage tubulaire quelconque de F_{jk} dans V_j , il induit un voisinage tubulaire ψ' de X_j dans F_{ji} . Les voisinages tubulaires ψ' et ψ_{ji} ont des jets homotopes, donc, d'après le théorème de Cerf, il existe un difféomorphisme γ de V_j sur elle-même tel que $\psi_{ji} = \gamma \circ \psi'$. Alors $\bar{\psi}_{ji} = \gamma \circ \bar{\psi}'$ répond à la question. La variété V_{jk} recollant V'_j à V'_k à l'aide des voisinages tubulaires $\bar{\psi}_{ji}$ et $\bar{\psi}_{jk}$ satisfait à la condition (a). D'ailleurs toute variété satisfaisant à cette condition peut être obtenue de cette façon.

b. Montrons d'abord que si W_i et W'_i sont obtenues de la façon décrite dans l'énoncé, elles sont difféomorphes. Soient V_{jk} et V'_{jk} deux variétés obtenues en recollant V_j et V_k suivant f_{jk} . D'après le théorème 3, V_{jk} et V'_{jk} sont difféomorphes, mais un raisonnement analogue à la démonstration du lemme 1 montrerait qu'on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : V_{jk} \rightarrow V'_{jk}$ induisant l'identité sur $F_{ji} \cup F_{ki}$. En identifiant V_{jk} à V'_{jk} suivant γ , W_i et W'_i sont obtenues à partir des mêmes variétés par recollement suivant le même difféomorphisme f_i . Elles sont donc difféomorphes d'après le théorème 3 de l'exposé 2.

Montrons maintenant que $W_1 = W_2$ par exemple. Grâce aux théorèmes d'invariances démontrés, on peut supposer W_1 et W_2 construites de façon particulière. Pour $i = 1$ ou 2 , soient ψ_i un voisinage tubulaire de X_i dans V_i , V'_i la variété obtenue à partir de V_i en introduisant un angle en X_i à l'aide de ψ_i et d'une fonction θ telle que $\theta(\alpha) = \alpha$ pour α voisin de 0 ; soit enfin ψ'_i le voisinage tubulaire de X_i dans V'_i déduit de la construction de celle-ci. Soit $\bar{\psi}_i$ un voisinage tubulaire de F_i dans V_i adapté à ψ_i , et pour $j = 1, 2, 3$ et $j \neq i$, soit ψ'_{ij} un voisinage tubulaire de F_{ij} dans V'_i , adapté à ψ'_i , coïncidant avec $\bar{\psi}_i$ au voisinage de $(F_{ij} - X_i) \times \{0\}$: ceci est possible grâce à l'hypothèse faite sur θ . Soit V'_3 une variété obtenue à partir de V_3 en introduisant un angle en X_3 , et soit ψ'_3 un voisinage tubulaire de

X_3 dans V_3^i tel que, pour $i = 1, 2$, le voisinage tubulaire de X_3 dans F_{3i} induit par ψ_3^i corresponde au voisinage tubulaire de X_i dans F_{i3} induit par ψ_i^i . Ceci est possible grâce au lemme suivant.

LEMME 2. - Soient V une variété à bord anguleux, F_1 et F_2 deux faces de V telles que $X = F_1 \cap F_2$ soit une arête de V . Étant donnés deux voisinages tubulaires ψ_1, ψ_2 de X dans F_1, F_2 respectivement, il existe un voisinage tubulaire ψ de X dans V qui induise ψ_1 et ψ_2 .

Démonstration du lemme. - Soit ψ^* un voisinage tubulaire quelconque de X dans V . ψ_1 et le voisinage tubulaire de X dans F_1 induit par ψ^* ayant des jets homotopes, on peut, d'après le théorème de Cerf, trouver un difféomorphisme γ_1 de V sur elle-même tel que le voisinage tubulaire $\psi_1^* = \gamma_1 \circ \psi^*$ de X dans V induise ψ_1 comme voisinage tubulaire de X dans F_1 . Soit ψ_2^* le voisinage tubulaire de X dans F_2 induit par ψ_1^* . Il existe un difféomorphisme γ_2 de F_2 sur elle-même tel que $\psi_2 = \gamma_2 \circ \psi_2^*$, et γ_2 peut être pris X -isotope à l'identité. Au moyen d'une X -isotopie de γ_2 à l'identité et d'un voisinage de F_2 dans V , on construit un difféomorphisme Γ de V sur elle-même, coïncidant avec l'identité sur F_1 , et avec γ_2 sur F_2 . Alors

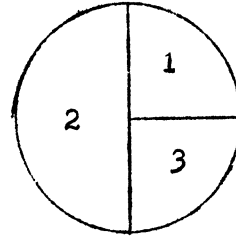
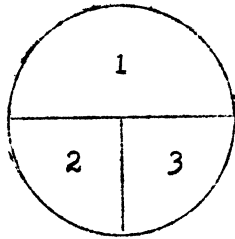
$$\psi = \Gamma \circ \psi_1^*$$

répond à la question.

Fin de la démonstration du théorème. - Pour $i = 1, 2$, soit $\psi_{3,i}$ un voisinage tubulaire de F_{3i} dans V_3^i adapté à ψ_3^i . Pour (i, j) permutations de $(1, 2)$, soit $V_{j,3}$ la variété obtenue en recollant V_j^i à V_3^i suivant f_{j3} à l'aide des voisinages tubulaires $\psi_{j,3}^i$ et $\psi_{3,j}^i$; et soit W_i la variété obtenue en recollant V_i à $V_{j,3}$ suivant f_i à l'aide des voisinages tubulaires $\bar{\psi}_i$ et $\bar{\psi}_{j,3}$, ce dernier étant obtenu en réunissant ψ_{ji}^i et ψ_{3i}^i . Les voisinages tubulaires ψ_i, ψ_j^i et ψ_3^i se réunissent en un voisinage tubulaire $\tilde{\psi}_i$ de X dans W_i .

L'application identique $W_1 \rightarrow W_2$ est un difféomorphisme sur le complémentaire de X , et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X \times D^2 & \xrightarrow{I \times \bar{\Theta}} & X \times D^2 \\
 \downarrow \tilde{\Psi}_1 & & \downarrow \tilde{\Psi}_2 \\
 W_1 & \xrightarrow{I} & W_2
 \end{array}$$



où $\bar{\Theta}$ fait correspondre au point de coordonnées polaires (ρ, α) le point de coordonnées polaires $(\rho, \Theta(\alpha))$, avec

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \Theta(\alpha) = \alpha & \text{pour } 0 \leq \alpha \leq \pi \\
 \Theta(\alpha) = \frac{\pi}{2} + \Theta(\alpha - \pi) & \text{pour } \pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} \\
 \Theta(\alpha) = \alpha & \text{pour } \frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi
 \end{array} \right. .$$

Soit η une fonction C^∞ définie sur $(0, 1)$, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 0 au voisinage de 0 et à 1 au voisinage de 1, et soit H le difféomorphisme de D^2 sur lui-même qui associe au point de coordonnées polaires (ρ, α) le point de coordonnées polaires $(\rho, (1 - \eta(\rho))\alpha + \eta(\rho)\Theta(\alpha))$.

H coïncide avec Θ au voisinage du bord S^1 de D^2 , et on définit un difféomorphisme Γ de W_1 sur W_2 par $\Gamma = I$ sur le complémentaire de

$$\tilde{N} = \tilde{\Psi}_1(X \times D^2) ,$$

et

$$\Gamma = \psi_2 \circ (I \times H) \circ \psi_1^{-1} \text{ sur } \tilde{N} \quad ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 5.

III. Destruction mutuelle d'anses

1. Introduction d'angle à la petite cuillère.

THÉOREME 6. - Soient V une variété à bord anguleux, F une semi-face de V , de bord relatif X , ψ un plongement de $F \times [0, 1]$ dans V tel $\psi(x, 0) = x$. Soit η une fonction C^∞ , définie sur F , à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$, telle que $\eta^{-1}(0) = X$, $d\eta \neq 0$ en tout point de X . Alors

a. $V' = V - \{\psi(x, t)\}_{x \in F, t < \eta(x)}$ est diffeomorphe à une variété V_1 obtenue à partir de V en introduisant une arête en X ;

b. Si G est un fermé de V ne rencontrant pas l'image de ψ , on peut trouver un diffeomorphisme

$$\gamma : V_1 \rightarrow V'$$

coïncidant avec l'identité de V sur $G \cup X$ et tel que

$$\gamma(x) = \psi(x, \eta(x)) \text{ pour } x \in F \quad .$$

Démonstration. - Soit $\psi' : X \times [0, 1] \rightarrow F$ un voisinage tubulaire de X dans F . Pour tout $x \in X$, la fonction

$$\eta_x : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$$

définie par

$$\eta_x(t) = \eta(\psi'(x, t))$$

a une dérivée > 0 en 0, et, X étant compacte, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$, $\exists \varepsilon'_x > 0$ tel que η_x soit un diffeomorphisme de $[0, \varepsilon'_x]$ sur $[0, \varepsilon]$.

Posons alors

$$\psi''(x, t) = \psi'(x, \eta_x^{-1}(\varepsilon t)) \quad .$$

$\psi'' : X \times (0, 1) \rightarrow F$ est un voisinage tubulaire de X dans F , et on peut le prolonger en un voisinage tubulaire de X dans $\partial^1 V$ que nous noterons encore

$$\psi'' : X \times (-1, +1) \rightarrow \partial^1 V \quad .$$

Ceci résulte du théorème de Cerf : en effet, si

$$\psi_1 : X \times (-1, +1) \rightarrow \partial^1 V$$

est un voisinage tubulaire de X dans $\partial^1 V$ qui applique $X \times (0, 1)$ dans F , $\psi_1 | X \times (0, 1)$ peut être amené sur ψ'' par un difféomorphisme de $\partial^1 V$, car ils ont des jets homotopes. On pourra supposer

$$\psi''(X \times (-1, +1)) \cap G = \emptyset \quad .$$

De même ψ se prolonge en un plongement, qu'on notera encore

$$\psi : F_1 \times (0, 1) \rightarrow V \quad ,$$

où

$$F_1 = F \cup \psi''(X \times (-1, 0)) \quad .$$

Alors

$$\bar{\psi} : X \times (-1, +1) \times (0, 1) \rightarrow V$$

défini par

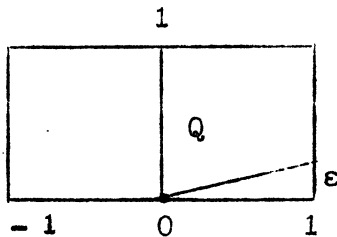
$$\bar{\psi}(x, t, u) = \psi(\psi''(x, t), u)$$

est un plongement coïncidant avec l'identité de X sur $X \times \{(0, 0)\}$, et

$$\bar{\psi}^{-1}(V) = X \times Q \quad ,$$

où

$$Q = \{(t, u), -1 \leq t \leq +1, 0 \leq u \leq 1, u \geq \varepsilon t\} \quad .$$



Posons

$$T = \{(t, u) + 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, t \leq u \leq 1\} \quad ,$$

et soit λ un difféomorphisme de T sur $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ de la forme

$$\lambda(t, u) = (t, \lambda_t(u))$$

et qui coïncide avec l'identité sur

$$\{0\} \times [0, 1] \cup [0, \frac{1}{2}] \times (\frac{3}{4}, 1) \quad .$$

Soit ζ une fonction $C^\infty : (-1, +1) \rightarrow (0, \varepsilon)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(t) = 0 \quad \text{si } t \leq -\varepsilon \\ \zeta(t) = \varepsilon t \quad \text{si } t \geq \varepsilon \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \geq 0 \quad \text{pour tout } t \end{array} \right. \quad .$$

Soient $\bar{\zeta} : F_1 \rightarrow (0, \frac{1}{2})$ définie par

$$\bar{\zeta}(x) = \eta(x) \quad \text{si } x \in F - \psi''(X \times (0, \varepsilon))$$

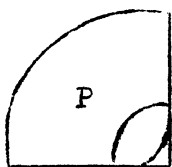
et

$$\bar{\zeta}(\psi''(x, t)) = \zeta(t) \quad \text{pour } x \in X, t \in (-1, +1) \quad ,$$

et posons

$$V'' = V - \{\psi(x, t)\} \quad x \in F_1 \quad ,$$

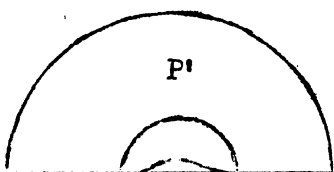
$$t < \bar{\zeta}(x) = V' - \{\bar{\psi}(x, t, u)\} \quad x \in X, \quad -\varepsilon \leq t \leq +\varepsilon, \quad u < \zeta(t) \quad .$$



L'application $\lambda_* : V'' \rightarrow V$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_*(x) = x \quad \text{si } x \notin \psi(F_1 \times (0, 1)) \\ \lambda_*(\psi(x, t)) = \psi(x, \lambda_{\bar{\zeta}(x)}(t)) \end{array} \right.$$

et qui vérifie



$$\lambda_*(\psi(x, \eta(x))) = \psi(x, 0) \quad \text{si } x \in F - \psi'(X \times (0, \varepsilon)),$$

est un difféomorphisme de V'' sur V , qui coïncide avec l'identité sur $G \cup X$. Reste à trouver un difféomorphisme γ_1 d'une variété V_1' obtenue à partir de V' en arrondissant X sur V'' . Soit φ le plongement du quart de disque $B_0^{2,2}$ dans Q défini par

$$\varphi(t, u) = (-t + u, \varepsilon u) \quad .$$

$P = \varphi^{-1}(\{t, u\}, u \geq \zeta(t))$ est une partie convexe de $B_0^{2,2}$, et l'application $\bar{\theta}$ qui associe au point de coordonnées polaires (ρ, α) le point de coordonnées polaires $(\rho, \theta(\alpha - \frac{\pi}{2}))$ induit un difféomorphisme de P sur une partie P' de $B_0^{2,1}$, définie dans $B_0^{2,1}$ par une condition de la forme

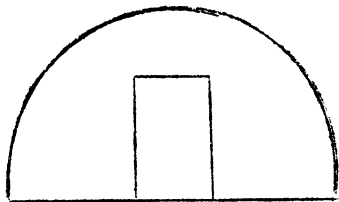
$$P' = \{(t, u), u \geq \zeta'(t)\} \quad ,$$

où $\zeta' : [-1, +1] \rightarrow [0, \varepsilon]$ est une application C^∞ , nulle en dehors de $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.

L'application λ' définie par

$$\lambda'(t, u) = (t, \lambda_{\zeta'(t)}(u))$$

est un difféomorphisme de P' sur $B_0^{2,1}$ coïncidant avec l'identité en dehors de $(-\varepsilon, +\varepsilon) \times (0, \frac{3}{4}]$, donc au voisinage du bord relatif de $B_0^{2,1}$, car



$\varepsilon < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{7}}{4}$. $\lambda' \circ \bar{\theta}$ est un difféomorphisme de P sur $B_0^{2,1}$, qui coïncide avec $\bar{\theta}$ au voisinage du quart de cercle, et le difféomorphisme μ de $(-1, +1)$ dans lui-même défini par

$$\mu(t) = \pi_1 \circ \bar{\theta} \circ \varphi^{-1}(t, \zeta(t))$$

coïncide avec l'identité en dehors de $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Il existe un difféomorphisme ν du demi-disque $B_0^{2,1}$ sur lui-même qui coïncide avec l'identité au voisinage du demi-cercle, et tel que

$$\nu(\mu(t), 0) = (t, 0) \quad .$$

Alors

$$\sigma = \nu \circ \lambda' \circ \bar{\theta}$$

est un difféomorphisme de P sur $B_0^{2,1}$ qui coïncide avec $\pi_1 \circ \varphi$ sur $(-1, +1) \times \{0\}$, et avec $\bar{\theta}$ au voisinage du quart de cercle, et

$$\gamma_1 = \varphi \circ \bar{\theta}^{-1} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$$

est un homéomorphisme de $\varphi(P)$ sur $\varphi(B_0^{2,2})$ qui coïncide avec l'identité au voisinage du quart d'ellipse image par φ du quart de cercle, et vérifie

$$\gamma_1(t, \zeta(t)) = (t, 0) \text{ si } t \leq 0 \text{ et } (t, \varepsilon t) \text{ si } t \geq 0 \quad .$$

Si $(N, \bar{\varphi})$ est le voisinage tubulaire de X dans V' défini par

$$\bar{\varphi}(x, t, u) = \bar{\psi}(x, \varphi(t, u)) \text{ et } N = \bar{\varphi}(X \times B_0^{2,2}) \quad ,$$

le difféomorphisme γ de $N \cap V''$ sur le $(2, 1)$ -tube trivial $X \times B_0^{2,1}$, défini en transportant γ_1 sur chaque fibre, se prolonge par l'identité en un difféomorphisme, encore noté γ_1 , de V'' sur la variété obtenue à partir de V' en arrondissant X à l'aide du voisinage tubulaire $\bar{\varphi}$ et de la fonction θ . On a

$$\gamma_1(\lambda^{-1}(x)) = \psi(x, \eta(x)) \text{ si } x \in F, \text{ et } x \text{ si } x \in F_1 - F \quad .$$

Ceci achève la démonstration du théorème 6.

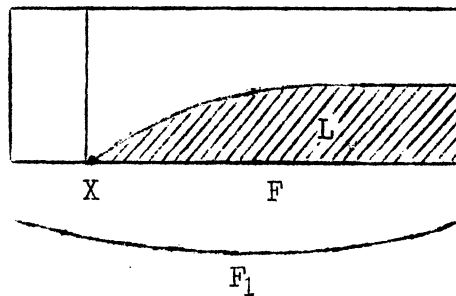
2. Lentilles.

Définition. - Étant données une variété à bord anguleux compacte F et une face X de F , on appelle lentille sur F d'arête X toute variété de la forme

$$L = \{(x, t), x \in F, 0 \leq t \leq \eta(x)\}$$

où $\eta : F \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ est une fonction C^∞ telle que $\eta^{-1}(0) = X$, $d\eta \neq 0$ en tout point de X .

Σ Avec les définitions que nous avons adoptées, L n'est pas une sous-variété de $F \times (0, 1)$. Cependant, si F est une sous-variété de codimension 0 de F_1 et si X est le bord relatif de F dans F_1 , L est une sous-variété de $F_1 \times (0, 1)$.



THÉORÈME 7. - Soient V une variété à bord anguleux, F une semi-face de V de bord relatif X , L une lentille sur F d'arête X .

a. Une variété V' obtenue en recollant la somme disjointe $V \cup L$ suivant le difféomorphisme $x \rightarrow (x, 0)$ de la semi-face F de V sur la face $(F \times \{0\})$ de L est difféomorphe à V .

b. Si G est un fermé de V ne rencontrant pas F , on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : V \rightarrow V'$ coïncidant avec l'identité sur G et tel que

$$\gamma(x) = (x, \eta(x)) \text{ pour } x \in F \quad .$$

Démonstration. - La lentille L est définie à partir d'une fonction $\eta : F \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$. D'après le théorème 6, il existe un difféomorphisme γ_1 d'une

variété V_1 obtenue à partir de V en introduisant une arête en X sur la sous-variété

$$V'_1 = V - \{\psi(x, t)\}, \quad x \in F, \quad t < \eta(x)$$

de V , tel que

$$\gamma_1(x) = \psi(x, \eta(x)) \quad \text{pour } x \in F \quad .$$

Soit φ le plongement de L dans V défini par

$$\varphi(x, t) = \psi(x, \eta(x) - t) \quad .$$

Les plongements γ_1 et φ sont liés par la relation

$$\gamma_1(x) = \varphi(x, 0) \quad ;$$

il résulte de la définition 10 de l'exposé 2 que V est difféomorphe à une variété V' recollant V_1 à L suivant $x \rightarrow (x, 0)$, ce qui démontre le théorème.

PROPOSITION 4.

a. Une lentille L sur F d'arête X est difféomorphe à une variété obtenue à partir de $F \times (0, 1)$ en arrondissant $X \times \{1\}$.

b. On peut trouver un difféomorphisme coïncidant avec l'identité sur $F \times \{0\}$.

Démonstration. - Comme dans la démonstration du théorème 6, on peut trouver un voisinage tubulaire (N, ψ) de X dans F ,

$$\psi : X \times (0, 1) \rightarrow F$$

tel que la fonction η qui définit L vérifie $\eta(\psi(x, t)) = \varepsilon t$, et $\eta(x) \geq \varepsilon$ pour $x \in F - N$. Posons

$$F' = \eta^{-1}\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad L' = \{(x, u), (x, u + \frac{\varepsilon}{2}) \in L\} \quad .$$

L' est une lentille sur L , d'arête $X' = \psi(X \times \{\frac{1}{2}\})$, et, d'après le théorème 6,

$$V = L - L^q = L \cap F \times \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

est difféomorphe à une variété obtenue à partir de L en introduisant une arête en X^1 . D'autre part, l'application

$$\varphi : V \rightarrow F \times \{0, 1\}$$

définie par

$$\varphi(x, u) = \left(x, \frac{2u}{\varepsilon}\right) \text{ si } x \in F - N$$

et

$$\varphi(\psi(x, t), u) = \left(\psi(x, \lambda_{u/\varepsilon}(t)), \frac{2u}{\varepsilon}\right)$$

est un difféomorphisme de V sur $F \times \{0, 1\}$ ce qui démontre la proposition.

3. Le premier théorème de destruction d'anses.

Pour tout p , on appelle projection stéréographique le difféomorphisme

$$c_p : S_+^p = \{(x_1, \dots, x_{p+1}), x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2 = 1, x_{p+1} \geq 0\}$$

sur D^p défini par

$$\sigma(x_1, \dots, x_{p+1}) = \frac{x_1}{1 + x_{p+1}}, \dots, \frac{x_p}{1 + x_{p+1}} \quad .$$

THÉORÈME 8. - Soit V une variété à bord anguleux de dimension $n = p + q + 1$. Soit V_1 une variété obtenue en recollant la somme disjointe $V \cup (D^p \times D^{q+1})$ suivant un plongement φ_1 de $S^{p-1} \times D^{q+1}$ dans $\overset{\circ}{\partial}^1 V$. Soit φ_2 un plongement de $S^p \times D^q$ dans $\overset{\circ}{\partial}^1 V_1$, qui applique

$$S_+^p \times D^q \text{ sur } D^p \times S_+^q \subset \overset{\circ}{\partial}^1 (D^p \times D^{q+1}) \text{ par } (\sigma_p \times \sigma_q^{-1})$$

et

$$S_-^p \times D^q \text{ dans } \overset{\circ}{\partial}^1 V = \varphi_1(S^{p-1} \times \overset{\circ}{D}^{q+1}) \quad .$$

Alors :

a. Une variété V_2 , obtenue en recollant la somme disjointe $V_1 \cup (D^{p+1} \times D^q)$ suivant le difféomorphisme φ_2 de la face $S^p \times D^q$ sur une semi-face de V_1 , est difféomorphe à V .

b. Si G est un fermé de V qui ne rencontre pas $\varphi_1(S^{p-1} \times D^{q+1})$ ni $\varphi_2(S^p \times D^q)$, on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : V \rightarrow V_2$ qui coïncide avec l'identité sur G .

Démonstration. - En vertu du théorème 5, V_2 est difféomorphe à une variété V' obtenue de la façon suivante : H est une variété obtenue en recollant la somme disjointe $(D^p \times D^{q+1}) \cup (D^{p+1} \times D^q)$ suivant

$$(\sigma_p \times \sigma_q^{-1}) : D^p \times S_+^q \rightarrow S_+^p \times D^q ;$$

et V' est une variété obtenue en recollant la somme disjointe $V \cup H$ suivant un difféomorphisme φ' de

$$(S^{p-1} \times D^{q+1}) \cup (S^p \times D^q)$$

sur une semi-face de V contenue dans $\overset{\circ}{S}^1 V$. Nous allons montrer que H est difféomorphe à une lentille sur D^{n-1} d'arête S^{n-2} , et le théorème 8 résultera alors du théorème 7.

D'après la proposition 2 et la remarque 4 qui suit la définition 2, une variété H_1 (resp. H_2) obtenue à partir de $D^p \times D^{q+1}$ (resp. $D^{p+1} \times D^q$), en introduisant une arête en $D^p \times S^{q-1}$ (resp. $S^{p-1} \times D^q$), bord relatif de la semi-face $D^p \times S_+^q$ (resp. $S_+^p \times D^q$), est difféomorphe à $D^p \times D^{q+1}$ (resp. $D^{p+1} \times D^q$), et il existe un difféomorphisme γ_i de H_i sur $D^p \times D^{q+1}$ (resp. $D^{p+1} \times D^q$), qui induit $I \times \sigma_q$ (resp. $\sigma_p \times I$) sur $D^p \times S_+^q$ (resp. $S_+^p \times D^q$).

Par suite H , recollant $H_1 \cup H_2$ suivant $(\sigma_p \times \sigma_q^{-1})$, est difféomorphe à une variété recollant la somme disjointe $(D^p \times D^{q+1}) \cup (D^{p+1} \times D^q)$ suivant l'application identique de leur face $D^p \times D^q$.

Les applications φ_i définies par

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q, z) \\ = (x_1 \sqrt{1-z}, \dots, x_p \sqrt{1-z}, \frac{y_1}{\sqrt{1-z}}, \dots, \frac{y_p}{\sqrt{1-z}}, z) \end{aligned}$$

$$\varphi_2(x_1, \dots, x_p, z; y_1, \dots, y_q) \\ = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1-z}}, \dots, \frac{x_p}{\sqrt{1-z}}, y_1 \sqrt{1-z}, \dots, y_q \sqrt{1-z}, -z \right)$$

sont des difféomorphismes

$$\varphi_1 : D^p \times D^{q+1} \rightarrow H_1^i, \quad \varphi_2 : D^{p+1} \times D^q \rightarrow H_2^i,$$

où

$$H_1^i = \{(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q; z), \\ y_1^2 + \dots + y_q^2 - 1 \leq z \leq 1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2), z \leq 0\}$$

$$H_2^i = \{(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q; z), \\ y_1^2 + \dots + y_q^2 - 1 \leq z \leq 1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2), z \geq 0\}$$

et H est difféomorphe à

$$H^i = H_1^i \cup H_2^i = \{(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q; z), \\ y_1^2 + \dots + y_q^2 - 1 \leq z \leq 1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2)\}.$$

Enfin on a un difféomorphisme f de H^i sur la lentille

$$L = \{(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z), \\ 0 \leq z \leq \frac{1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2 + y_1^2 + \dots + y_q^2)}{2}\}$$

défini par

$$f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z) \\ = \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{x_p}{\sqrt{2}}, \frac{y_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{y_q}{\sqrt{2}}, \frac{z + 1 - (y_1^2 + \dots + y_q^2)}{4} \right).$$

Ceci montre que H est difféomorphe à une lentille, ce qui achève la démonstration du théorème 8.

EXERCICE 1. Espaces lenticulaires. - Soient V une variété à bord anguleux, F une réunion de composantes connexes de $\partial^1 V$, $f: F \rightarrow F$ un difféomorphisme involutif sans point fixe. On suppose que l'ensemble X des $x \in \partial^2 V$ dont les deux images réciproques $x' x''$ dans $\partial^1 \partial^1 V$ sont dans F est une arête de V . X est donc revêtue à deux feuillets par une face \tilde{X} de F , et $\sigma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ désigne l'involution du revêtement. On suppose que $f(\tilde{X}) = \tilde{X}$, que $(f \circ \sigma)^k = I_{\tilde{X}}$, et que $(f \circ \sigma)^i(x)$ est différent de x et de σx pour tout i , $0 < i < k$ et tout $x \in \tilde{X}$.

Définir un procédé pour obtenir une structure de variété sur l'"espace lenticulaire d'ordre k " V/f à l'aide de certains voisinages tubulaires. Montrer que la classe, à un difféomorphisme près, des variétés ainsi obtenue ne dépend pas des voisinages tubulaires choisis. Pour $k = 3$, montrer qu'on trouve dans un cas particulier des structures difféomorphes à celles obtenues dans le théorème 5.

EXERCICE 2. Soudure. - Soient V_0, V_1, V_2 trois variétés à bord anguleux disjointes, F_1 et F_2 des faces de V_1 et V_2 respectivement, F_1' et F_2' des faces de V_0 , n'ayant aucun point interne commun, φ_i un difféomorphisme de F_i sur F_i' , $i = 1, 2$. Pour (i, j) permutation de $(1, 2)$, soit V_i' une variété obtenue en recollant $V_0 \cup V_i$ suivant φ_i , et V_i'' une variété obtenue en recollant V_i' à V_j suivant le difféomorphisme φ_j de F_j sur la semi-face F_j' de V_i' . Montrer que les deux variétés V_1'' et V_2'' sont difféomorphes. Ces variétés sont dites obtenues par soudure (plumbing) de V_1' à V_2' suivant le difféomorphisme identique f de $V_0 \subset V_1'$ sur $V_0 \subset V_2'$.

Énoncer des généralisations de cette situation.

EXERCICE 3. Fonctions tapissantes et arrondissement des angles. - On dira qu'une fonction $f: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ tapisse la variété à bord anguleux V en un point x s'il existe une carte $\varphi: U \rightarrow W$, où U est un ouvert du secteur A de \mathbb{R}^n ,

$$A = \{(t_1, \dots, t_n), t_1 \geq 0, \dots, t_k \geq 0\},$$

W un ouvert de V , $0 \in U$, $\varphi(0) = x$, telle que

$$f(\varphi(t_1, \dots, t_n)) = \lambda(t_1, \dots, t_n) t_1 \dots t_k ,$$

λ étant une fonction C^∞ strictement positive sur U . Si l'indice k de V en x est nul, ceci signifie $f(x) > 0$. Toute variété à bord anguleux V peut être tapissée partout par une fonction f . On dira que $u \in \underline{\mathbb{R}}_+$ est une valeur critique de f si

$$\exists x \in V, f(x) = u, df(x) = 0 .$$

1° Supposons V compacte, tapissée partout par f . Montrer que les sous-variétés V_ε de V ,

$$V_\varepsilon = \{x, f(x) \geq \varepsilon\} ,$$

sont difféomorphes entre elles pour $0 < \varepsilon < u_0$, u_0 étant la plus petite valeur critique > 0 de f . (On pourra munir V d'une métrique riemannienne et considérer le champ de vecteurs $Z = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|^2}$.)

Montrer que leur classe, à un difféomorphisme près, ne dépend pas du choix de f .

2° Soit V' une variété, obtenue à partir de V en arrondissant une arête X , tapissée partout par f' . Montrer que

$$V'_\varepsilon = \{x \in V', f'(x) \geq \varepsilon\}$$

est difféomorphe à V_ε pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.
