Adrien Douady

Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. nº 1, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A1_0>

VARIÉTÉS À BORD ANGULEUX ET VOISINAGES TUBULAIRES

par Adrien DOUADY

I. Variétés à bord anguleux.

1. Secteurs d'espaces vectoriels.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. Un secteur d'indice k ou k-secteur de E est un sous-espace A défini par les conditions $f_1(x) \geqslant 0$, ..., $f_k(x) \geqslant 0$, où f_1, ..., f_k sont des formes linéaires sur E, linéairement indépendantes. E lui-même est un 0-secteur de E.

Une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E sera dite adaptée au secteur A si les f_i sont choisis parmi les formes coordonnées relatives à cette base. Un secteur A de $\mathbb{R}^n$ sera dit adapté si la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est adaptée à A.

Soit $j \leqslant k$. Les conditions $f_{i_1}(x) = \ldots = f_{i_j}(x) = 0$, où $i_1, \ldots, i_j$ sont j indices distincts pris dans $\{1, \ldots, k\}$, définissent un sous-ensemble F du secteur A, qui est un secteur de dimension $n - j$ et d'indice $k - j$. On dit que F est une face de codimension j, ou une j-face, de A. Le nombre des j-faces de A est $\binom{k}{j} = C_k^j$.

Par définition, l'indice de A en un point x est la plus grande codimension des faces de A contenant x. Alors l'indice de A n'est autre que l'indice de A au point 0.

2. Application C^∞.

Une fonction φ, définie dans un ouvert U d'un secteur A d'un espace vectoriel E, à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbb{R}$, est dite différentiable en un point $x \in U$ s'il existe une application linéaire

$$\varphi'_x : E \to F ,$$

telle que

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \varphi'_x(y - x) + \eta_x(y) ,$$

où η_x est une fonction définie sur U, à valeurs dans F, telle que

$$\frac{\|\eta_x(y)\|}{\|y - x\|} \to 0 \quad \text{quand } y \to x , \quad y \in U , \quad y \neq x .$$

Cette condition est indépendante des normes choisies. L'application φ'_x est alors unique, d'où la notion d'application continûment différentiable sur U, d'application r-fois continûment différentiable ou C^r, d'application C^∞ ou C^r pour tout r.

3. Catégorie de modèles.

On définit une catégorie $\mathfrak{M}_n$ de la façon suivante :

Les objets de $\mathfrak{M}_n$ sont les ouverts U des secteurs adaptés A de $\mathbb{R}^n$, d'indice variable.

Les morphismes d'un objet U dans un objet U' sont les difféomorphismes C^∞ de U sur un ouvert U'' de U'.

Si $\varphi : U \to U'$ est un morphisme de $\mathfrak{M}_n$, pour tout point x de U, U' a même indice au point $\varphi(x)$ que U au point x.

4. Définition des variétés à bord anguleux.

Définition. - Une variété à bord anguleux est un espace topologique V, localement compact dénombrable à l'infini, muni d'une classe de $\mathfrak{M}_n$-atlas.

Rappellons qu'un $\mathfrak{M}_n$-atlas est une famille $(U_i, V_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où les V_i forment un recouvrement ouvert de V, et où, pour chaque i, φ_i est un homéomorphisme d'un ouvert U_i d'un secteur adapté A de $\mathbb{R}^n$ sur V_i ; ces données étant astreintes à la condition suivante : pour tout couple i, j,

$$\gamma_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i \big|_{\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)}$$

est une application C^∞ d'un ouvert de U_i dans U_j.

Deux $\mathfrak{M}_n$-atlas sont équivalents si leur réunion est encore un $\mathfrak{M}_n$-atlas.

Soient V une variété à bord anguleux, et x un point de V.

L'indice de V_i au point $\varphi_i^{-1}(x)$, est le même pour toutes les cartes $\varphi_i : U_i \to V_i$ où $V_i \ni x$, et est appelé indice de V au point x.

On peut toujours trouver dans un atlas complet de V une carte

$$\varphi_i : U_i \to V_i$$

telle que

$$\varphi_i(0) = x \quad .$$

U est alors un voisinage de 0 dans un k-secteur adapté A de $\underset{\sim}{R}^n$, où k est l'indice de V en x.

5. Espace et secteur tangent.

Soient V une variété à bord anguleux de dimension n, et x un point de V. L'espace tangent $T_x(V)$ en x à V est le dual de $\mathfrak{I}_x/\mathfrak{I}_x^2$, où $\mathfrak{I}_x$ est l'idéal de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ formé des germes de fonctions C^∞ sur V qui s'annulent en x. C'est un espace vectoriel de dimension n sur R.

Soit $\varphi_i : U_i \to V_i$ une carte telle que $\varphi_i(0) = x$. Cette carte définit un isomorphisme $\varphi_i'(0)$ de $\underset{\sim}{R}^n$ sur $T_x(V)$.

L'image par cet isomorphisme du secteur A, dans lequel U est ouvert, est un secteur $A_x(V)$ de $T_x(V)$, qui ne dépend pas de la carte choisie, et qu'on appellera secteur tangent à V en x, ou secteur des vecteurs rentrants.

C'est l'ensemble des vecteurs $X \in T_x(V)$, tels que $\langle X , df \rangle \geq 0$ pour toute fonction f, de classe C^∞, définie sur un voisinage de x dans V, ≥ 0, et telle que $f(x) = 0$.

6. Diverses notions de bord.

Soit V une variété à bord anguleux, de dimension n.

L'ensemble $b^k V$ des points de V, où V est d'indice $\geq k$, est un fermé de V. $bV = b^1 V$ n'est autre que le "bord topologique" de V.

Le sous-espace $\overset{\circ}{\partial}{}^k V$ formé des points de V, où V est d'indice k, est une variété sans bord de dimension $n - k$.

On va maintenant définir une variété à bord anguleux $\partial^k V$ de dimension $n - k$, telle que $\partial^k V - b(\partial^k V)$ s'identifie à $\overset{\circ}{\partial}{}^k V$. Les points de $\partial^k V$ sont les couples (x , F) où x est un point de $b^k V$, et F une k-face du secteur tangent $A_x(V)$. Cet ensemble $\partial^k V$ est muni de la topologie et de la structure de variété définie par les cartes suivantes : pour toute carte $\varphi_i : U_i \to V_i$ de V, où U_i est un ouvert d'un secteur A_i de R^n, et pour toute k-face $F_{i,j}$ de A_i, on considère l'application $\varphi_{i,j} : U_i \cap F_{i,j} \to \partial^k V$ définie par

$$\varphi_{i,j}(x) = (\varphi_i(x) , \varphi_i'(x)(F_{i,j})) \quad .$$

Les $\varphi_{i,j}$ forment un $\mathfrak{M}_{n-k}$-atlas de $\partial^k V$.

Tout point x, où V est d'indice ℓ, est représenté par $\binom{\ell}{k}$ points de $\partial^k V$, qui sont d'indice $\ell - k$ dans $\partial^k V$. Enfin $\partial^j(\partial^k V)$ est un revêtement à $\binom{j+k}{k}$ feuillets de $\partial^{j+k} V$.

7. Sous-secteurs.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un secteur adapté, défini par les inégalités $x_{i_1} \geq 0 , \dots , x_{i_k} \geq 0$. Un sous-secteur adapté A' de A est l'ensemble défini par les conditions obtenues en remplaçant ℓ des k inégalités qui définissent A par des égalités $x_i = 0$, et en ajoutant $p - \ell$ égalités de la forme $x_i = 0$, et j inégalités de la forme $x_i \geq 0$, portant sur de nouvelles coordonnées distinctes. A' est donc un secteur de dimension $n - p$ et d'indice $k - \ell + j$; p est la codimension de A' dans A, ℓ est le co-indice de A' dans A, (c'est la plus grande codimension des faces de A contenant A') et j est l'indice complémentaire.

Les faces relatives de A' dans A sont obtenues en remplaçant dans la définition de A' certaines des j inégalités complémentaires par les égalités correspondantes.

Par abus de langage, A' sera dit sans faces relatives dans A, si $j = 0$.

Un sous-secteur adapté, sans faces relatives de A, est donc la trace de A sur un sous-espace vectoriel adapté de $\mathbb{R}^n$, i. e. un sous-espace vectoriel engendré par certains éléments de base.

Un sous-secteur A' d'un secteur A d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble de A qui devient un sous-secteur adapté pour une certaine base de E adaptée à A. Une telle base est dite adaptée à A et A'.

8. Sous-variétés.

Parmi les diverses notions de sous-variété qu'on pourrait donner ici, nous choisissons la plus exigeante :

Définition. - Nous appellerons sous-variété de codimension p et de co-indice ℓ d'une variété à bord anguleux V un sous-espace fermé W de V tel que, pour tout point x de W, il existe une carte $\varphi_i : U_i \to V_i$ de V, où U_i est un ouvert d'un secteur adapté A_i de R^n telle que

$$\varphi_i(0) = x ,$$

et que

$$\varphi_i^{-1}(V_i \cap W) = U_i \cap A_i' \quad ,$$

où A_i' est un sous-secteur adapté de A_i, de codimension p et de co-indice ℓ.

Une telle carte sera dite adaptée à W.

W sera dite sans bord relatif dans V si A_i' est toujours un sous-secteur sans faces relatives de A_i.

Remarque. - Le fait d'imposer la valeur de la codimension et du co-indice n'est pas essentiel : si on les laissait variables, ils resteraient constants dans chaque composante connexe de W.

9. Secteur transverse.

Soient V une variété à bord anguleux de dimension n, W une sous-variété de codimension p et de co-indice ℓ. En un point x de W, on a l'espace $T_x(V)$ tangent à V de dimension n, l'espace $T_x(W)$ tangent à W de dimension $n - p$, et l'espace transverse à W dans V, $T_x(V : W) = T_x(V)/T_x(W)$, de dimension p.

Le secteur transverse $A_x(V : W)$ à W dans V est, par définition, l'image du secteur tangent $A_x(V)$ à V dans $T_x(V : W)$. C'est un secteur de dimension p et d'indice ℓ. Les $A_x(V : W)$ sont les fibres d'un fibré $A(V : W)$ de base W, de groupe structural G, groupe des automorphismes du secteur A_0 de $\mathbb{R}^n$ défini par $x_1 \geq 0$, ..., $x_\ell \geq 0$.

G est le groupe des matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Y & Z \end{array}\right)$$

où X est une matrice $\ell \times \ell$, qui a dans chaque ligne et dans chaque colonne un coefficient > 0 et tous les autres nuls ; Z est une matrice régulière $(p - \ell) \times (p - \ell)$, et Y est quelconque.

D'autre part, les fonctions de transition sont de classe C^∞, à valeurs dans le groupe de Lie G.

II. Voisinages tubulaires.

1. Tubes.

Soit A_o le ℓ-secteur de $\underset{\sim}{R}^p$ défini par $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_\ell \geqslant 0$, muni de la métrique euclidienne canonique de $\underset{\sim}{R}^p$.

Le groupe des isométries de A_o s'identifie au produit $\mathfrak{S}(\ell) \times O(p-\ell)$, et il opère sur la trace B_o de A_o sur la boule unité de $\underset{\sim}{R}^p$.

Définition. - Un (p, ℓ)-tube T, ayant pour âme une variété à bord anguleux W, est un fibré sur W, de fibre-type B_o, de groupe structural $\mathfrak{S}(\ell) \times O(p-\ell)$, à fonctions de transitions C^∞. W sera toujours identifié à son image dans T par la section nulle ("âme" du tube).

T est une variété à bord anguleux, et W est une sous-variété sans bord relatif de T dont la codimension est p et le co-indice ℓ. Le fibré transverse $A(T : W)$ s'identifie au fibré de base W associé à T, de fibre A_o.

2. Définition des voisinages tubulaires.

Soient V une variété à bord anguleux, W une sous-variété sans bord relatif. Un voisinage tubulaire (N, μ, ψ) de W dans V est donné par :

a. Une famille $\mu = (\mu_x)_{x \in W}$, où, pour chaque $x \in W$, μ_x est une métrique euclidienne sur $T_x(V : W)$, dépendant de façon C^∞ du point x.

b. Un difféomorphisme ψ du fibré en boules de secteurs transverses $B = B(V : W ; \mu)$ (où, pour chaque x, B_x est la trace de $A_x(V : W)$ sur la boule-unité de μ_x) sur une sous-variété N de W, tel que

α. la restriction de ψ à la section nulle de B identifiée à W, soit l'injection canonique de W dans V ;

β. l'application

$$\psi : A(B : W) \to A(N : W)$$

induite par φ sur les fibrés en secteurs transverses de base W, soit l'identité de $A(V : W)$.

Ces conditions entraînent que N est un voisinage de W dans V, d'où la terminologie.

Nous nous proposons maintenant de démontrer l'existence d'un voisinage tubulaire pour toute sous-variété W sans bord relatif d'une variété à bord anguleux V.

3. Connexions adaptées.

Soient V une variété à bord anguleux, E un fibré vectoriel C^∞ sur V. On notera $\Gamma(E)$ l'espace vectoriel des sections C^∞ de E ; c'est un $\mathcal{O}(V)$-module, $\mathcal{O}(V)$ désignant l'algèbre des fonctions C^∞ sur V à valeurs dans $\underset{\sim}{R}$. On posera

$$\Theta(V) = \Gamma(T(V)) \qquad ;$$

c'est l'espace des champs de vecteurs C^∞ sur V.

Une connexion de E sur V est une application $\underset{\sim}{R}$-bilinéaire

$$\Delta : \Theta(V) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E) \qquad ,$$

notée

$$(X , Y) \rightsquigarrow \Delta_X(Y) \qquad ,$$

satisfaisant aux relations :

$$\text{(Con 1)} \qquad \Delta_{fX}(Y) = f\Delta_X(Y) \qquad ,$$

$$\text{(Con 2)} \qquad \Delta_X(fY) = f\Delta_X(Y) + \langle X , df\rangle . Y \qquad ,$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(V)$.

Soient (V_i) un recouvrement ouvert de V, (η_i) une partition C^∞ de l'unité sur V subordonnée à (V_i), et donnons-nous, pour chaque i, une connexion Δ_i de la restriction de E à V_i. On définit alors une connexion $\Delta = \sum \eta_i \Delta_i$ de E sur V par

$$\Delta_X(Y) = \sum \eta_i \Delta_{i_X}(Y) \qquad .$$

Si $\varphi : W \to V$ est une application C^∞, on définit pour toute connexion Δ de E sur V une connexion $\varphi^* \Delta$ du fibré image réciproque $\varphi^* E$ sur W. [3]. Quand on parlera de connexion sur V sans préciser le fibré, il s'agira d'une connexion du fibré tangent $T(V)$.

Définition. - Soient W une sous-variété de V et Δ une connexion sur V. On dira que W est géodésique pour Δ si la connexion

$$i_o^* \Delta : \Theta(W) \times \Gamma_W(i^* T(V)) \to \Gamma_W(i^* T(V)) \qquad ,$$

où $i : W \to V$ désigne l'injection canonique, applique

$$\Theta(W) \times \Theta(W) \quad \text{dans} \quad \Theta(W) \quad . \text{ (}^1\text{)}$$

$i^* \Delta$ induit alors une connexion sur W, qu'on notera $\Delta|_W$. La propriété pour W d'être géodésique pour Δ est locale au sens suivant :

Si (V_i) est un recouvrement ouvert de V, et si, pour chaque i, $W \cap V_i$ est géodésique pour la connexion induite par Δ sur V_i, W est géodésique pour Δ.

Soient (V_i) un recouvrement ouvert de V, et W une sous-variété de V telle que, pour chaque i, $W \cap V_i$ soit géodésique pour une connexion Δ_i sur V_i. Alors, pour toute partition de l'unité (η_i) sur V subordonnée à (V_i), W est géodésique pour la connexion $\Delta = \sum \eta_i \Delta_i$.

Définition. - Soit V une variété à bord anguleux.

Une connexion Δ sur V sera dite adaptée à V si toute sous-variété de V de co-indice égal à sa codimension est géodésique.

Pour cela, il faut et il suffit que, pour chaque carte $\varphi_i : U_i \to V_i$ d'un atlas de V, où U_i est un ouvert d'un secteur A_i de $\underset{\sim}{R}^n$, les traces sur U_i des faces de A_i, soient géodésiques pour la connexion $\Delta_i = \varphi_i^* \Delta$ sur U_i.

Définition. - Si W est une sous-variété de V, une connexion Δ sur V sera dite adaptée à V et W si Δ est adaptée à V, si W est géodésique pour Δ et si la connexion induite $\Delta|_W$ est adaptée à W.

LEMME. - Pour toute variété à bord anguleux V et toute sous-variété W, il existe une connexion Δ sur V adaptée à V et W.

Démonstration. - Si U est un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$, A un secteur de $\underset{\sim}{R}^n$ et A' un sous-secteur, une connexion Δ sur $U \cap A$ sera adaptée à $U \cap A$ et $U \cap A'$, si et seulement si, pour toute face F de A ou de A', $U \cap F$ est géodésique pour Δ. En particulier, la connexion canonique de $\underset{\sim}{R}^n$ est adaptée. Soit maintenant (U_i, V_i, φ_i) un atlas de V tel que toute carte $\varphi_i : U_i \to V_i$ où $V_i \cap W \neq \emptyset$ soit adaptée à W, et soit, pour tout i, Δ_i la connexion sur V_i transportée par φ_i de la connexion canonique sur U_i. Soit η_i une partition C^∞ de l'unité sur V subordonnée à (V_i). La connexion $\Delta = \sum \eta_i \Delta_i$ répond à la question, ce qui démontre le lemme.

([1]) Ceci entraîne que toute courbe géodésique tangente à W reste dans W. La réciproque n'est vraie que si on suppose Δ sans torsion.

Remarque. - Toute métrique riemannienne μ sur V définit une connexion $\Delta(\mu)$. Dans sa thèse, J. CERF a montré que, pour toute variété à bord anguleux V et toute sous-variété W, il existe une métrique riemannienne μ sur V telle que la connexion $\Delta(\mu)$ soit adaptée à V et W. En cessant d'exiger que la connexion Δ provienne d'une métrique riemannienne, idée due à Marie-Hélène SCHWARTZ, on simplifie considérablement la démonstration de ce lemme et celle du théorème d'existence des voisinages tubulaires.

4. Chemins géodésiques.

Soit $\varphi : I \to V$ un chemin C^∞ dans V, c'est-à-dire une application C^∞ d'un intervalle I de $\underset{\sim}{R}$ dans V. Une connexion Δ sur V définit une connexion $\varphi^* \Delta$ du fibré $\varphi^* T(V)$ sur I. Le chemin $\varphi : I \to V$ sera dit géodésique pour Δ si $\varphi^* \Delta_X(Y) = 0$ quand X est le champ de vecteurs unitaire sur I et $Y = \varphi'(X)$.

D'après un théorème connu de géométrie différentielle, si V est une variété sans bord et Δ une connexion sur V, pour tout point $x \in V$ et tout vecteur $X \in T_x(V)$, il existe un intervalle ouvert I de $\underset{\sim}{R}$, $I \ni 0$, et un chemin géodésique $E \to \gamma(x , X , t)$ dans V, défini sur I unique tel que

$$\gamma(x , X , 0) = x \quad \text{et} \quad \gamma'_{(x,X,0)}(1) = X \quad .$$

Dans la mesure où il est défini, $\gamma(x , X , t)$ ne dépend que de x et du produit tX, nous écrirons donc $\gamma(x , tX)$, et l'application $(x , X) \to (x , \gamma(x , X))$ est un difféomorphisme d'un voisinage de la section nulle du fibré $T(V)$ sur un voisinage de la diagonale dans $V \times V$. L'application γ sera appelée application intégrale de la connexion Δ.

5. Théorème d'existence des voisinages tubulaires.

THÉORÈME 1. - Soient V une variété à bord anguleux, W une sous-variété de V sans bord relatif. Alors il existe un voisinage tubulaire (N , μ , ψ) de W dans V.

Démonstration. - Soient A un secteur d'un espace vectoriel E, E' un sous-espace de E tel que $A' = E' \cap A$ soit un sous-secteur de A. Un relèvement linéaire σ de E/E' dans E sera dit adapté à A s'il existe une base de E adaptée à A et A', telle que σ soit le relèvement défini par cette base. Pour cela, il faut et il suffit que $\sigma(E/E')$ soit contenu dans tout hyperplan de E

engendré par une 1-face de A ne contenant pas A'. Si les σ_i sont des relèvements adaptés et les η_i des nombres vérifiant $\sum \eta_i = 1$, le relèvement $\sigma = \sum \eta_i \sigma_i$ est adapté.

Ceci permet de construire un relèvement différentiable σ du fibré $T(V : W)$ dans le fibré sur W induit par $T(V)$, adapté en chaque point x de W au secteur $A_x(V)$. On a donc, en chaque point $x \in W$

$$\sigma(A_x(V : W)) \subset A_x(V) \quad .$$

Soient Δ une connexion sur V adaptée à V et W, (U_i , V_i , φ_i) des cartes de V adaptées à W, telles que les V_i recouvrent W.

Chaque U_i est la trace sur un secteur A_i de $\underset{\sim}{R}^n$ d'un ouvert Ω_i. Soit Δ_i une connexion sur Ω_i prolongeant la connexion transportée sur U_i par φ_i de la connexion Δ induite sur V_i, et telle que les hyperplans engendrés par les 1-faces de A_i soient géodésiques, pour Δ_i.

Posons

$$U'_i = \varphi_i^{-1}(W \cap V_i) = A'_i \cap \Omega \quad .$$

Soit $\tilde{\sigma}_i$ le relèvement différentiable de fibrés sur U'_i

$$\tilde{\sigma}_i : A(U_i : U'_i) \to T(U_i) \quad ,$$

et posons

$$\psi_i = \gamma_i \circ \tilde{\sigma}_i \quad ,$$

où $\gamma_i : T(U_i) \to \Omega_i$ est l'application intégrale de la connexion Δ_i.

Si x est un point de U'_i qui se trouve dans une 1-face F de A_i ne contenant pas A'_i, pour tout vecteur $X \in A_x(U_i : U'_i)$,

$$\tilde{\sigma}_i(x , X) = (x , Y) \quad ,$$

où $Y \in T_x(F)$ car $\tilde{\sigma}_i$ est un relèvement adapté au secteur $A_x(U_i)$ dont $A_x(F)$ est une 1-face ne contenant pas $A_x(U'_i)$. L'hyperplan engendré par F étant géodésique pour Δ_i, $\gamma_i(x , Y)$ restera dedans.

Si x est un point quelconque de U'_i, et si $X \in F$, où F est une 1-face de $A_x(U : U'_i)$,

$$\tilde{\sigma}_i(x , X) = (x , Y) \quad ,$$

où $Y \in \chi^{-1}(F)$, $\chi^{-1}(F)$ est une 1-face de $A_x(U_i)$ contenant $A_x(U_i^!)$. C'est l'espace tangent à une 1-face F_1 de A_i contenant $A_i^!$. L'hyperplan engendré par F_1 étant géodésique pour Δ_i , $\gamma_i(x , Y)$ restera dedans.

L'application ψ_i vérifie donc les propriétés suivantes : C'est une application de $A(U_i : U_i^!)$ dans Ω_i qui induit l'identité sur $U_i^!$, identifié à la section nulle du fibré $A(U_i : U_i^!)$; elle induit également l'identité sur les fibrés vectoriels transverses à $U_i^!$, qui s'identifient tous deux à $T(U_i : U_i^!)$. Enfin elle envoie les 1-faces de $A(U_i : U_i^!)$ dans celles de A_i . Elle induit donc un difféomorphisme d'un voisinage de la section nulle dans $A(U_i : U_i^!)$ sur un voisinage de $U_i^!$ dans $A_i \cap \Omega_i = U_i$.

On en déduit en particulier que les chemins géodésiques qui ont servi à construire ψ_i sont géodésiques pour la connexion $\varphi_i^* \Delta$ et ne dépendent pas de la façon dont on a prolongé cette métrique en Δ_i . Il en résultera, par unicité des géodésiques d'une connexion, que les applications ψ_i se recollent en une application ψ qui est un difféomorphisme d'un voisinage C de la section nulle dans $A(V : W)$ sur un voisinage de W dans V .

Il ne reste plus, pour terminer la construction du voisinage tubulaire, qu'à munir les fibres de $T(V : W)$ d'une métrique euclidienne variant de façon C^∞ et telle que, pour chaque $x \in W$, la trace de la boule unité B_x sur $A_x(V : W)$ soit contenue dans $C \cap A_x(V : W)$. Ceci est facile, ce qui détermine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 98, 1961, p. 227-382 (Thèse Sc. math. Paris, 1960).

[2] LICHNEROWICZ (André). - Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. - Paris, Dunod ; Roma, Cremonese, 1955 (Travaux et Recherches mathématiques, 2).

[3] NOMIZU (Katsumi). - Lie groups and differential geometry. - Tokyo, Mathematical Society of Japan, 1956 (Publications of the Mathematical Society of Japan, 2).