CHRISTIAN HOUZEL

Géométrie analytique locale, I

Séminaire Henri Cartan, tome 13, nº 2 (1960-1961), exp. nº 18, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_2_A5_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE, I

par Christian HOUZEL

1. Le théorème de préparation.

Le théorème que nous avons en vue exprime la propriété fondamentale (annoncée dans l'exposé 9, introduction) des anneaux locaux sur un espace analytique, ou "algèbres analytiques". Rappelons (exposé 13) qu'une algèbre analytique sur un corps valué complet et non discret k est par définition une k-algèbre A isomorphe à un quotient non nul $k\{x_1, \ldots, x_n\}/\mathfrak{a}$ d'une algèbre de séries convergentes à coefficients dans k par un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini (on verra par la suite que $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ est noethérien, de sorte que n'importe quel idéal est de type fini).

THÉORÈME 1. - *Soient A et B deux algèbres analytiques sur un corps k valué complet, non discret. Considérons un homomorphisme $\varphi : A \to B$ de k-algèbres qui définit B comme algèbre sur A ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) B *est quasi-finie sur* A ;

(ii) B *est finie sur* A *(c'est-à-dire est un* A-*module de type fini).*

On sait qu'un module M sur un anneau local A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel $A/\mathfrak{m} = k$ est dit quasi-fini si : $M/\mathfrak{m}M = M \otimes_A k$ est un espace vectoriel de rang fini sur k : $[M/\mathfrak{m}M : k] < +\infty$. En particulier une A-algèbre B est quasi-finie sur A si c'est un A-module quasi-fini. Le plus souvent, B est aussi un anneau local, dont nous désignerons l'idéal maximal par $\mathfrak{n}$, et l'homomorphisme $\varphi : A \to B$ qui définit la structure de A-algèbre de B est local ($\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$), donc définit par passage aux quotients un homomorphisme $k = A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{n}$ qui fait du corps résiduel $B/\mathfrak{n}$ de B une extension de k (extension résiduelle). Si B est quasi-fini sur A, on dira que l'homomorphisme φ est quasi-fini ; alors

(1) $\mathfrak{m}B$ est un idéal de définition de B ;

(2) $B/\mathfrak{n}$ est une extension finie de $k = A/\mathfrak{m}$.

Réciproquement, les conditions (1) et (2) entraînent que B est quasi-fini sur A si l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B est de type fini (c'est le cas des algèbres analytiques).

Dans le cas où A et B sont des anneaux locaux noethériens, on démontre que les conditions :

- B est quasi-fini sur A ;
- $\hat{B}$ est fini sur $\hat{A}$,

($\hat{A}$, $\hat{B}$ désignant les complétés pour les structures uniformes d'anneaux locaux) sont équivalentes ; elles sont aussi équivalentes à la conjonction des conditions (1) et (2). La condition (1) montre que, si B est quasi-fini sur A , $\dim B \leq \dim A$ (dimension au sens de KRULL ; cf. SERRE [1]).

Nous considérons ici des algèbres analytiques A et B sur un corps k ; elles ont le même corps résiduel k ; tout k-homomorphisme $\varphi : A \to B$ est automatiquement local, et l'extension résiduelle correspondante est triviale : la condition (2) est donc vérifiée. Nous voulons montrer que si (1) est satisfaite, B est un A-module de type fini.

<u>Démonstration</u> (d'après J.-P. SERRE).

1. - Montrons d'abord qu'il suffit d'établir le résultat dans le cas où A et B sont des algèbres de séries convergentes. Voyons-le pour A . En général $A \cong k\{t_1 , \ldots , t_q\}/\mathfrak{a}$; B est aussi une algèbre sur $k\{t_1 , \ldots , t_q\}$, et pour que B soit quasi-finie (resp. finie) sur A , il faut et il suffit qu'elle soit quasi-finie (resp. finie) sur $k\{t_1 , \ldots , t_q\}$; on peut donc remplacer A par $k\{t_1 , \ldots , t_q\}$.

D'autre part $B \cong k\{x_1 , \ldots , x_n\}/\mathfrak{b}$, avec $\mathfrak{b} = (f_1 , \ldots , f_p)$, idéal de type fini. Supposons B quasi-finie sur $A = k\{t_1 , \ldots , t_q\}$; les images $u_1 , \ldots , u_q$ de $t_1 , \ldots , t_q$ dans B engendrent un idéal de définition de cet anneau. Soient $v_1 , \ldots , v_q$ des éléments de $k\{x_1 , \ldots , x_n\}$ qui relèvent $u_1 , \ldots , u_q$; on définit un homomorphisme $\varphi' : k\{t_1 , \ldots , t_q , y_1 , \ldots , y_p\} \to k\{x_1 , \ldots , x_n\}$ par : $\varphi'(t_i) = v_i$, $i = 1 , \ldots , q$, et $\varphi'(y_j) = f_j$, $j = 1 , \ldots , p$. En passant aux quotients suivant $(y_1 , \ldots , y_p)$ et $\mathfrak{b} = (f_1 , \ldots , f_p)$, φ' donne l'homomorphisme quasi-fini $\varphi : A \to B$; donc φ' est lui-même quasi-fini. Supposons qu'on sache en déduire que $k\{x_1 , \ldots , x_n\}$ est fini sur $k\{t_1 , \ldots , t_q , y_1 , \ldots , y_p\}$; on trouve alors, en passant aux quotients, que

---

[1] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale et multiplicités. Cours au Collège de France, 1957/58 (multigraphié).

B est fini sur A .

2. - On peut donc supposer pour la démonstration que $A = k\{t_1 , \dots , t_m\}$ et $B = k\{x_1 , \dots , x_n\}$. Désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal $(t_1 , \dots , t_m)$ de A et par $\mathfrak{n} = (x_1 , \dots , x_n)$ celui de B ; soient $u_1 , \dots , u_m$ les images de $t_1 , \dots , t_m$ par l'homomorphisme $\varphi : A \to B$ qui définit dans B une structure de A-algèbre, supposée quasi-finie. Il existe un entier r tel que $\mathfrak{n}^r \subset (u_1 , \dots , u_m) = \mathfrak{m}B$. Par suite,

$$(1) \qquad x_i^r = \sum_{j=1}^{m} u_j \lambda_{ji} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

avec des coefficients $\lambda_{ji} \in B$. On va montrer que les monônes $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ d'exposants $\alpha_i < r$ engendrent B comme A-module.

Soit $f = \sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ un élément de B . On peut l'écrire :

$$(2) \qquad f = \rho(f) + \sum_{i=1}^{n} x_i^r \sigma_i(f) \quad \text{avec} \quad \rho(f) = \sum_{0 \leq \alpha_i < r} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

et

$$\sigma_i(f) = \sum_{\substack{\alpha_1 , \dots , \alpha_{i-1} < r \\ \alpha_i \geq r}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i - r} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad (1 \leq i \leq n) \quad .$$

Dans (2), on remplace les x_i^r par leurs expressions (1) :

$$(3) \qquad f = \rho(f) + \sum_{j=1}^{m} u_j s_j(f) \quad \text{avec} \quad s_j(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji} \sigma_i(f) \quad .$$

Appliquons la formule (3) aux $s_j(f) \in B$

$$s_j(f) = \rho s_j(f) + \sum_{i=1}^{m} u_i s_i s_j(f) \qquad ;$$

en substituant ces expressions dans la décomposition (3) de f , on obtient

$$f = \rho(f) + \sum_{j=1}^{m} u_j \, \rho s_j(f) + \sum_{i,j=1}^{m} u_i \, u_j \, s_i \, s_j(f) \quad .$$

En itérant ce procédé, on trouve :

$$f = \rho(f) + \sum_{j=1}^{m} u_j \, \rho s_j(f) + \dots + \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq m} u_{j_1} \dots u_{j_p} \, \rho s_{j_1} \dots s_{j_p}(f)$$

$$+ \sum u_{j_1} \dots u_{j_{p+1}} \, s_{j_1} \dots s_{j_{p+1}}(f) \quad .$$

Le "reste" $R_p = \sum u_{j_1} \dots u_{j_{p+1}} \, s_{j_1} \dots s_{j_{p+1}}(f)$ appartient à $m^{p+1} B$. Les autres termes se réordonnent en mettant en facteurs les monômes $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_i < r)$ qui figurent dans les $\rho s_{j_1} \dots s_{j_q}(f)$ (qui sont des polynômes en les x_i, de degrés $< r$ par rapport à chaque x_i) :

$$f = \sum_{0 \leq \alpha_i < r} u^{(p)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f) \, x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} + R_p \quad .$$

Les coefficients $u^{(p)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f)$ sont des polynômes de degré p en $u_1, \dots, u_m$, images par φ de polynômes $v^{(p)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f) \in A$; $v^{(p+1)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f) - v^{(p)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f)$ est homogène de degré $p + 1$. Donc, dans l'anneau $\hat{A} = k[[t_1, \dots, t_m]]$, les suites $\left(v^{(p)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f)\right)_p$ convergent,

$$v_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f) = \lim_{p \to \infty} v^{(p)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f)$$

est une série formelle. Par un calcul de majorantes, on va prouver que $v_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f) \in A$; on aura alors

$$f = \sum_{0 \leq \alpha_i < r} v_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f) \, x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad ;$$

car du fait que $\mathfrak{m}B$ est un idéal de définition de B on déduit $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$ (B est séparé).

3. Calcul de majorantes. - Notations : pour toute série formelle g , on désigne par $|g|$ la série à coefficients réels obtenue en remplaçant les coefficients de g par leurs valeurs absolues. L'ensemble des séries à coefficients réels est ordonné par l'ordre produit.

Pour qu'une série formelle $g \in k[[y_1 , \dots , y_q]]$ soit convergente, il faut et il suffit qu'il existe des constantes $C , N \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$|g| \leqslant \sum CN^{\alpha_1+\dots+\alpha_q} y_1^{\alpha_1} \dots y_q^{\alpha_q} \qquad ;$$

on dira alors que g admet une majoration du type (C , N)

$$g \prec (C , N) \qquad .$$

On peut se ramener au cas où les $\lambda_{ji} \in B$ introduits dans la formule (1) ont une majoration du type $(1 , 1)$. En effet, on peut d'abord écrire : $\lambda_{ji} \prec (C , N)$ avec C , N entiers premiers à la caractéristique de k . On définit un automorphisme ψ de B (resp. χ de A) par

$$\psi(x_i) = N^{-1} x_i \quad (\text{resp.} \quad \chi(t_j) = CN^r t_j)$$

et on remplace l'homomorphisme $\varphi : A \to B$ par $\psi \circ \varphi \circ \chi$; on vérifie alors que l'on a

$$x_i^r = \sum_{j=1}^{m} u'_j \lambda'_{ji} \quad \text{avec} \quad u'_j = \psi \circ \varphi \circ \chi(t_j) \quad \text{et} \quad \lambda'_{ji} \prec (1 , 1) \qquad .$$

De $s_j(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji} \sigma_i(f)$ on déduit

$$|s_j(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{ji}|.|\sigma_i(f)| \qquad ,$$

d'où

$$|s_j(f)| \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} \sum_{\substack{\beta_1, \dots, \beta_{i-1} < r \\ \beta_i \geq r}} |a_{\beta_1 \dots \beta_n}| \, x_1^{\beta_1} \dots x_i^{\beta_i - r} \dots x_n^{\beta_n} \Big) \quad .$$

On a, pour $f \in k\{x_1 \dots x_n\}$, une majoration $f \prec (D , M)$: $|a_{\beta_1 \dots \beta_n}| \leq DM^{|\beta|}$ (en posant $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$) qui permet d'obtenir une majoration du coefficient de $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ dans $|s_j(f)|$ par

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\substack{r \leq \beta_i \leq \alpha_i + r \\ 0 \leq \beta_q \leq \alpha_q , q \neq i}} |a_{\beta_1 \dots \beta_n}| \right) \leq nD(M^{|\alpha|+r} + nM^{|\alpha|+r-1} + \dots + n^{|\alpha|} M^r)$$

$$= DnM^r \frac{M^{|\alpha|+1} - n^{|\alpha|+1}}{M - n} \quad .$$

Si $M \geq n + 1$, ce que l'on peut toujours supposer, cette dernière expression est majorée par $DnM^{r+1+|\alpha|}$. Ainsi la majoration $f \prec (D , M)$ entraîne

$$s_j(f) \prec (DnM^{r+1} , M) \quad ,$$

puis par récurrence sur p

$$s_{j_1} \dots s_{j_p}(f) \prec (D(nM^{r+1})^p , M) \quad .$$

Alors la série $v_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f) \in \hat{A}$ admet une majoration du type $(DM^{|\alpha|} , nM^{r+1})$ ce qui prouve qu'elle est convergente. Le théorème est établi.

Remarque. - On peut donner du théorème l'énoncé plus précis suivant :

Soient $x_1 , \dots , x_n$ *des générateurs de l'idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* B , *et soit* r *un entier tel que* : $\mathfrak{n}^r \subset \mathfrak{m}B$. *Les monômes* $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ *de degré total* $< r$ *engendrent* B *comme* A*-module.*

En effet si B_1 (resp. B') est le k-espace vectoriel (resp. le A-module) engendré par ces monômes, on a : $B = B_1 + \mathfrak{n}^r$, donc $B = B' + \mathfrak{m}B$. Comme, par le théorème, B est un A-module de type fini, le lemme de Nakayama permet de conclure que $B = B'$.

COROLLAIRE 1 (théorème de préparation de Weierstrass). - Soit une série $g \in k\{x_1 , \dots , x_n\}$ telle que $g(0 , \dots , 0 , x_n) \neq 0$; désignons par p l'ordre de $g(0 , \dots , 0 , x_n)$. Pour tout $f \in k\{x_1 , \dots , x_n\}$ il existe des séries $q , r \in k\{x_1 , \dots , x_n\}$, r ne contenant que des puissances de x_n de degré $< p$, telles que $f = gq + r$; q et r sont déterminés d'une manière unique par ces conditions. En d'autres termes, $B = k\{x_1 , \dots , x_n\}/(g)$ est un module libre sur l'anneau $A = k\{x_1 , \dots , x_{n-1}\}$ et admet pour base $(1 , \dot{x}_n , \dots , \dot{x}_n^{p-1})$; en désignant par $\dot{x}_n$ la classe de x_n mod g .

Désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et par $\mathfrak{n}$ celui de B ; soit de plus $B' = k\{x_1 , \dots , x_n\}$, et soit $\mathfrak{n}'$ son idéal maximal. L'hypothèse sur g s'exprime par $g \notin \mathfrak{m}B'$, donc sa classe $\bar{g} \in B'/\mathfrak{m}B' \cong k\{x_n\}$ n'est pas nulle ; on a désigné par p l'ordre de $\bar{g}$. Si $\mathfrak{r}$ est l'idéal maximal de $k\{x_n\}$, on a alors $\mathfrak{r}^p \subset (\bar{g})$, donc $\mathfrak{n}'^p \subset (g) + \mathfrak{m}B'$ et par suite $\mathfrak{n}^p \subset \mathfrak{m}B$. Il en résulte que B est engendré comme A-module par les $\dot{x}_n^s$, $s < p$. Plus précisément, ces éléments forment une base de $B/\mathfrak{m}B$ sur k , donc une base de B sur A , grâce au lemme de Nakayama et en notant que B est libre sur A (à cause de la suite exacte : $0 \to gB' \to B' \to B \to 0$ qui donne $\mathrm{Tor}_1^A(k , B) = 0$).

En appliquant le corollaire 1 à $f = x_n^p$, on obtient, avec les mêmes notations :

Il existe un polynôme unitaire en x_n et un seul, de degré p , $h = x_n^p - r$ à coefficients dans $k\{x_1 , \dots , x_{n-1}\}$ ("polynôme de Weierstrass") qui est divisible par g dans $k\{x_1 , \dots , x_n\}$. Ce polynôme est distingué (c'est-à-dire que $h(0 , \dots , 0 , x_n) = x_n^p$) et le quotient $q = h/g$ est inversible.

COROLLAIRE 2. - Les algèbres analytiques sont des anneaux noethériens.

Il suffit de le démontrer pour les algèbres de séries convergentes, ce que l'on fait par récurrence sur le nombre d'indéterminées. La propriété est triviale pour 0 indéterminée : $k\{\emptyset\} = k$. Soit $n \geq 1$; supposons que $k\{x_1 , \dots , x_{n-1}\}$ soit un anneau noethérien, et considérons un idéal $\mathfrak{a} \neq 0$ de $k\{x_1 , \dots , x_n\}$. Soit $g \in \mathfrak{a}$ un élément non nul ; en appliquant au besoin un automorphisme de $k\{x_1 , \dots , x_n\}$, on peut se ramener au cas où $g(0 , \dots , 0 , x_n) \neq 0$ (le corps k étant infini, car il est évalué et non discret, on peut définir cet automorphisme par des formules linéaires). Alors l'anneau $B = k\{x_1 , \dots , x_{n-1}\}/(g)$ est fini sur l'anneau noethérien $A = k\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, donc il est lui-même noethérien, et son idéal $\alpha' = \alpha/(g)$ a un nombre fini de générateurs ; il en résulte bien que α est de type fini.

Comme conséquence du corollaire 2, notons qu'une algèbre analytique A munie de sa topologie $\mathfrak{m}$-préadique ($\mathfrak{m}$ = idéal maximal de A) est un anneau de Zariski ; en particulier, A est séparé (théorème de Krull).

Considérons une algèbre analytique $A = k\{x_1, \dots, x_n\}/\alpha$, et soient $y_1, \dots, y_h$ des éléments de son idéal maximal. L'homomorphisme ψ de $k[t_1, \dots, t_h]$ dans A, défini par $\psi(t_i) = y_i$, admet un prolongement $\varphi : k\{t_1, \dots, t_h\} \to A$, car on peut prolonger à $k\{t_1, \dots, t_h\}$ un homomorphisme dans $k\{x_1, \dots, x_n\}$ qui relève ψ (substitution de séries convergentes dans une série convergente). Comme φ est local, donc continu (pour les topologies d'anneaux locaux), et comme A est séparé et $k[t_1, \dots, t_h]$ dense dans $k\{t_1, \dots, t_h\}$, ce prolongement φ est unique. Si $f \in k\{t_1, \dots, t_h\}$, on pose

$$f(y_1, \dots, y_h) = \varphi(f) \qquad ;$$

$\varphi(k\{t_1, \dots, t_h\})$ est la sous-algèbre analytique de A engendrée par $y_1, \dots, y_h$.

En tenant compte du corollaire 2, on peut énoncer le théorème sous la forme :

<u>Soit</u> $\varphi : A \to B$ <u>un homomorphisme d'algèbres analytiques ; pour que</u> B <u>soit fini sur</u> A, <u>il faut et il suffit que</u> $\hat{B}$ <u>soit fini sur</u> $\hat{A}$. Notons encore les résultats suivants :

- <u>Si</u> $\hat{\varphi} : \hat{A} \to \hat{B}$ <u>est injectif, il en est de même de</u> φ (on ignore si la réciproque est vraie).

- <u>Pour que</u> φ <u>soit surjectif, il faut et il suffit que</u> $\hat{\varphi}$ <u>le soit.</u>

- <u>Pour que</u> φ <u>soit un isomorphisme, il faut et il suffit que</u> $\hat{\varphi}$ <u>en soit un.</u>

Pour la surjectivité, on observe que si φ ou $\hat{\varphi}$ est surjectif, $\hat{B}$ est fini sur $\hat{A}$, et B est fini sur A (grâce au théorème) ; on peut donc appliquer le lemme de Nakayama.

Comme les algèbres analytiques sont des anneaux locaux noethériens, la théorie de la dimension (au sens de KRULL) leur est applicable. En particulier, on voit immédiatement que $\dim(k\{t_1, \dots, t_h\}) = h$; les anneaux de séries convergentes sont donc des anneaux locaux réguliers (cf. note (1) ci-dessus). La réciproque est donnée dans le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. - *Soient* $x_1, \dots, x_h$ *des éléments engendrant un idéal de définition d'une algèbre analytique* A , *et soit* φ *l'homomorphisme de* $k\{t_1, \dots, t_h\}$ *dans* A *défini par* $\varphi(t_i) = x_i$ $(i = 1, \dots, h)$.

(a) *Pour que* φ *soit surjectif, il faut et il suffit que* $x_1, \dots, x_h$ *engendrent l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A .

(b) *Pour que* φ *soit injectif, il faut et il suffit que* $\dim A = h$.

(c) *Pour que* φ *soit bijectif, il faut et il suffit que* A *soit un anneau local régulier et que* $(x_1, \dots, x_h)$ *soit un système régulier de paramètres.*

L'assertion (c) s'obtient en combinant (a) et (b) , que nous allons démontrer.

Si φ est surjectif, $x_1, \dots, x_h$ engendrent évidemment $\mathfrak{m}$. Réciproquement, si $x_1, \dots, x_h$ engendrent l'idéal maximal de A , φ est surjectif **modulo** l'idéal maximal de $k\{t_1, \dots, t_h\}$. Comme A est quasi-fini sur $k\{t_1, \dots, t_h\}$ c'est un module de type fini, et le lemme de Nakayama montre que φ est surjectif.

Démontrons (b). L'anneau A est quasi-fini sur $k\{t_1, \dots, t_h\}$, donc fini et par suite entier dessus. L'assertion résulte alors du lemme d'algèbre : *Soit* $\varphi : A' \to A$ *un homomorphisme d'anneaux ; supposons* A' *intègre et* A *entier sur* A' . *Pour que* φ *soit injectif, il faut et il suffit que* $\dim A = \dim A'$.

Car, d'après le théorème de Cohen-Seidenberg, $\dim A = \dim \varphi(A') \leq \dim A'$; comme A' est intègre, $\dim A' = \dim \varphi(A')$ équivaut à $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$.

2. Cohérence du faisceau structural sur un espace analytique.

THÉORÈME 2 (OKA). - *Soit* S *un espace analytique sur un corps valué complet non discret* k . *Le faisceau structural* $\mathcal{O}_S$ *est cohérent.*

D'après la définition d'un espace analytique (exposé 9) et à cause du caractère local de la cohérence, il suffit d'établir ce théorème pour $S = \underline{E}^n$. On fait la preuve par récurrence sur la dimension n .

Pour $n = 0$, $\underline{E}^0 = \{0\}$ muni du faisceau $\mathcal{O}_{\underline{E}^0} = k$; la propriété est triviale.

Soit $n \geq 1$; supposons établi que $\mathcal{O}_{\underline{E}^{n-1}}$ est cohérent et considérons un voisinage U de 0 dans $\underset{\sim}{E}^n$ et un homomorphisme $\mathcal{O}^p_{\underset{\sim}{E}^n}|U \to \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n}|U$; il faut montrer que le noyau de cet homomorphisme est de type fini.

Un tel homomorphisme est défini par la donnée de p sections

$$f_1 , \dots , f_p \in \Gamma(U , \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n}) \qquad ;$$

on peut supposer qu'aucune d'elles n'est nulle (quitte à passer au quotient en supprimant les facteurs de $\mathcal{O}^p_U$ qui sont contenus dans le noyau de l'homomorphisme considéré). Comme le corps k est infini, il existe alors une droite $d \subset k^n$ sur laquelle aucune des restrictions $f_i|d$ n'est nulle. On munit l'espace vectoriel quotient k^n/d d'une structure analytique qui l'identifie à $\underset{\sim}{E}^{n-1}$, et on a une projection $p : \underset{\sim}{E}^n \to \underset{\sim}{E}^{n-1}$ correspondante. De même $d \subset \underset{\sim}{E}^n$ a une structure analytique ; on l'identifie à $\underset{\sim}{E}$, et on désigne par z_n le morphisme $\underset{\sim}{E}^n \to \underset{\sim}{E}$ défini en projetant k^n sur d parallèlement à un supplémentaire de cette droite. On prolonge l'homomorphisme $p^{-1}(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}) \to \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n}$ qui correspond à p en un homomorphisme $\varphi : p^{-1}(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}[t]) \to \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n}$ défini en posant $\varphi(t) = z_n \in \Gamma(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n})$; φ est injectif.

Soit m l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1},o}$; par hypothèse $f_{i,o} \notin m\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o}$ $(1 \leq i \leq p$; $f_{i,o}$ est le germe de f_i en 0). Alors, grâce au théorème de préparation de Weierstrass (corollaire 1 du théorème 1), il existe des "polynômes distingués" $g_{1,o} , \dots , g_{p,o} \in p^{-1}(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}})_o[t] = \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1},o}[t]$ et des éléments inversibles $u_{1,o} , \dots , u_{p,o} \in \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o}$ tels que : $f_{i,o} = u_{i,o}\, g_{i,o}$ $(1 \leq i \leq p)$. Il existe donc un voisinage de 0 $V \subset U$ assez petit pour que l'on puisse trouver des polynômes unitaires $g_1 , \dots , g_p \in \Gamma(V , p^{-1}(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}[t])) \subset \Gamma(V , \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n})$ et des sections inversibles $u_1 , \dots , u_p \in \Gamma(V , \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n})$ tels que : $f_i = u_i\, g_i$ $(1 \leq i \leq p)$. En se restreignant à V et en appliquant à $\mathcal{O}^p_V$ l'automorphisme $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p} \to (u_i\, \alpha_i)$, on se ramène à considérer le noyau $\mathcal{N}$ de l'homomorphisme : $\mathcal{O}^p_V \to \mathcal{O}_V$ défini par $g_1 , \dots , g_p$.

Soit $W = p(V)$, voisinage de 0 dans $\underset{\sim}{E}^{n-1}$, et soient

$$\gamma_1 , \dots , \gamma_p \in \Gamma(W , \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}[t])$$

des polynômes unitaires correspondant à $g_1 , \dots , g_p$; ils définissent un homomorphisme : $(\mathcal{O}_W[t])^p \to \mathcal{O}_W[t]$ de noyau $\mathfrak{M}$. Considérons le diagramme commutatif dont les lignes horizontales sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{N} \arrow[r] & \mathcal{O}_V^p \arrow[r] & \mathcal{O}_V \\
0 \arrow[r] & p^{-1}(\mathfrak{M})|V \arrow[r] \arrow[u] & p^{-1}(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}[t]^p)|V \arrow[r] \arrow[u, "\varphi^p"'] & p^{-1}(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}[t])|V \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd} .$$

On va voir que $\mathfrak{N}$ est engendré par $p^{-1}(\mathfrak{M})|V$. Soit $x \in V$; $y = p(x)$. On a un diagramme commutatif à lignes horizontales exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{N}_x \arrow[r] & \mathcal{O}^p_{\underset{\sim}{E}^n,x} \arrow[r] & \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,x} \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{M}_y \arrow[r] \arrow[u, hook] & (\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1},y}[t])^p \arrow[r] \arrow[u, hook, "\varphi_x^p"'] & \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1},y}[t] \arrow[u, hook, "\varphi_x"']
\end{tikzcd} .$$

Soient $\mathfrak{n}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,x}$, $\mathfrak{m}_y$ celui de $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1},y}$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1},y}[t]$ engendré par $\mathfrak{m}_y$ et $t - z_n(x)$. On peut compléter la première ligne du diagramme précédent pour la topologie $\mathfrak{n}_x$-adique, et la seconde pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique. Après cette opération, les flèches verticales φ_x et φ_x^p deviennent des isomorphismes ; on a donc aussi : $\hat{\mathfrak{N}}_x \cong \hat{\mathfrak{M}}_y$, ce qui donne le résultat (puisqu'il s'agit d'anneaux de Zariski, cf. corollaire 2 du théorème 1).

Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver que $\mathfrak{M}$ est de type fini :

on a des polynômes unitaires $\gamma_1 , \dots , \gamma_p \in \Gamma(W , \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}[t])$ et on doit voir que le faisceau des relations entre les γ_i est de type fini. Supposons $\deg \gamma_p = r = \sup\limits_{1 \leq i \leq p} (\deg \gamma_i)$. Soit $\sigma = (\sigma_1 , \dots , \sigma_p) \in \Gamma(W , \mathfrak{M})$ une relation entre les γ_i ; on peut diviser σ_i par γ_p qui est unitaire

$$(1) \qquad \sigma_i = \gamma_p q_i + \rho_i \qquad \deg \rho_i \leq r - 1 \qquad (1 \leq i \leq p) \quad .$$

Considérons les $\alpha_i = (\alpha_{ij})_j \in \Gamma(W , \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}[t])^p$ définis par

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq i , p \\ &\alpha_{ii} = \gamma_p \quad \text{et} \quad \alpha_{ip} = - \gamma_i \end{aligned}\right. \qquad (0 \leq j \leq p \ ; \quad 0 \leq i \leq p - 1) \quad .$$

On a évidemment $\alpha_i \in \Gamma(W , \mathfrak{M})$, et on peut écrire :

$$(2) \qquad \sigma = \tau + \sum_{i=1}^{p-1} q_i \alpha_i$$

où $\tau = (\tau_1 , \dots , \tau_p) \in \Gamma(W , \mathfrak{M})$ est défini par $\tau_i = \rho_i$ pour $1 \leq i \leq p - 1$ et $\tau_p = \sigma_p + \sum\limits_{i=1}^{p} q_i \gamma_i$.

De la relation $\tau_1 \gamma_1 + \dots + \tau_p \gamma_p = 0$, on déduit immédiatement $\deg \tau_p \leq r - 1$ (car $\deg \tau_i = \deg \rho_i \leq r - 1$ pour $i < p - 1$). Désignons par $\mathcal{P}$ le sous-Module de $\mathfrak{M}$ engendré par les α_i $(1 \leq i \leq p - 1)$ et par $\mathcal{R}$ le sous-Module de $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}[t]$ formé des polynômes de degré $\leq r$; on voit que $\mathfrak{M} \cong \mathcal{P} + (\mathcal{R}^p \cap \mathfrak{M})$ et $\gamma_1 , \dots , \gamma_p \in \mathcal{R}$. Comme $\mathcal{P}$ est de type fini, il reste à montrer que $\mathcal{R}^p \cap \mathfrak{M}$ est de type fini. Or $\mathcal{R} \cong \mathcal{O}^{r+1}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}$; $\mathcal{R}^p \cong \mathcal{O}^{p(r+1)}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}$; si l'on identifie par ces isomorphismes $\gamma_1 , \dots , \gamma_p$ à des sections de $\mathcal{O}^{r+1}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}$, $\mathcal{R}^p \cap \mathfrak{M}$ s'identifie au faisceau des relations entre ces sections ; il est bien de type fini, puisque $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^{n-1}}$ est cohérent par hypothèse de récurrence.