SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Obstruction primaire à la déformation

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 1 (1960-1961), exp. n° 4, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A3_0>

21 novembre 1960

OBSTRUCTION PRIMAIRE À LA DÉFORMATION

par Adrien DOUADY

INTRODUCTION. - Soit V_0 une variété analytique complexe, compacte, Θ le faisceau des germes des champs holomorphes de vecteurs tangents. On se pose la question suivante : Étant donné un élément $a \in H^1(V_0 ; \Theta)$, existe-t-il une déformation de V_0, de base non-singulière (i. e. une variété mixte fibrée $\pi : V \to B$, avec $b_0 \in B$, et un isomorphisme $V_0 \approx \pi^{-1}(b_0)$), telle que a soit l'image, par l'application ρ définie dans l'exposé 2, d'un vecteur τ tangent à B en b_0. Un élément $a \in H^1(V_0 , \Theta)$ pour lequel la réponse est affirmative s'appellera vecteur de déformation. On donnera une condition nécessaire pour que a soit un vecteur de déformation ; cette condition s'écrira $[a \smile a] = 0$. Nous donnerons ensuite un exemple où cette condition n'est pas vérifiée.

I. Suites exactes de faisceaux d'algèbres.

Soit K un anneau commutatif, soient Φ, Φ_1, Φ_2 trois faisceaux de K-modules sur un espace X, et supposons donné un homomorphisme $\Phi_1 \otimes \Phi_2 \to \Phi$, noté comme un produit. On définit, pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, le cup-produit $C^p(X , \mathfrak{U} ; \Phi_1) \otimes C^q(X , \mathfrak{U} ; \Phi_2) \to C^{p+q}(X , \mathfrak{U} ; \Phi)$ par la formule

$$(\alpha \smile \beta)_{i_0,\ldots,i_{p+q}} = \alpha_{i_0,\ldots,i_p} \circ \beta_{i_p,\ldots,i_q} .$$

On a la relation

$$d(\alpha \smile \beta) = d\alpha \smile \beta + (-1)^p \alpha \smile d\beta .$$

On en déduit donc un cup-produit sur la cohomologie du recouvrement $\mathfrak{U}$, et, par passage à la limite inductive sur les recouvrements ouverts, le cup-produit

$$H^p(X ; \Phi_1) \otimes H^q(X ; \Phi_2) \to H^{p+q}(X ; \Phi) ,$$

DÉFINITION. - Un faisceau d'algèbres sur X est un faisceau de modules Φ, muni d'un produit $\Phi \otimes \Phi \to \Phi$, que nous ne supposons ni commutatif, ni associatif.

Si $f : \Phi \to \Psi$ est un homomorphisme de faisceaux d'algèbres, le noyau Φ' de f est un faisceau d'idéaux bilatères de Φ, c'est-à-dire qu'on a des produits $\Phi' \otimes \Phi \to \Phi'$ et $\Phi \otimes \Phi' \to \Phi'$, tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \Phi' \otimes \Phi \arrow[r] \arrow[d] & \Phi' \arrow[d] \\ \Phi \otimes \Phi \arrow[r] & \Phi \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \Phi \otimes \Phi' \arrow[r] \arrow[d] & \Phi' \arrow[d] \\ \Phi \otimes \Phi \arrow[r] & \Phi \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

PROPOSITION 1. - Soit $0 \to \Phi' \to \Phi \to \Phi'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux d'algèbres sur X ; soit $a \in H^p(X\ ;\ \Phi'')$. Alors $\delta a \in H^{p+1}(X\ ;\ \Phi')$, et, pour toute classe $b \in H^q(X\ ;\ \Phi')$, on a

$$\delta a \smile b = 0 \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X tel que a et b soient représentés par des cocycles α et β de $\mathfrak{U}$ et que α se relève en une cochaîne $\eta \in C^p(X, \mathfrak{U}\ ;\ \Phi)$. Alors $\delta\eta$ est un cocycle de $C^{p+1}(X, \mathfrak{U}\ ;\ \Phi')$ dont la classe dans $H^{p+1}(X\ ;\ \Phi')$ est par définition δa, et $\delta a \smile b$ est la classe de $\delta\eta \smile \beta$. Mais $\delta(\eta \smile \beta) = \delta\eta \smile \beta$, et $\eta \smile \beta$ est une cochaine de $C^{p+q}(X, \mathfrak{U}\ ;\ \Phi')$, car Φ' est un faisceau d'idéaux. Le cocycle $\delta\eta \smile \beta$ est donc cohomologue à 0 dans $H^{p+q+1}(X\ ;\ \Phi')$, ce qui démontre la proposition.

II. L'obstruction primaire.

Soit V_0 une variété analytique complexe, Θ_0 le faisceau des germes des champs holomorphes de vecteurs tangents. Θ_0 est un faisceau d'algèbres de Lie, et si $a, b \in H^*(V_0, \Theta_0)$, on notera $[a \smile b]$ le cup-produit défini par le crochet $[\ ] : \Theta_0 \otimes \Theta_0 \to \Theta_0$. Il vérifie $[b \smile a] = (-1)^{pq+1} [a \smile b]$, si $a \in H^p(V_0, \Theta_0)$ et $b \in H^q(V_0, \Theta_0)$.

THÉORÈME 1. - Soient $\pi : V \to B$ une variété mixte, b_0 un point de B, $V_0 = \pi^{-1}(b_0)$, $\rho_0 : T_0 \to H^1(V_0, \Theta_0)$ l'application de Spencer-Kodaira. **Alors**, si u et v sont des vecteurs tangents à B en b_0, on a :

$$[\rho_0(u) \smile \rho_0(v)] = 0$$

COROLLAIRE. - Soient V_0 une variété analytique complexe, Θ le faisceau des germes des champs holomorphes de vecteurs tangents à V_0. Si $a \in H^1(V_0, \Theta)$ est un vecteur de déformation

$$[a \smile a] = 0 \quad .$$

Ce corollaire n'est en fait qu'un cas particulier du théorème ; mais en remarquant que $[a \smile b]$ est une application bilinéaire symétrique de $H^1 \otimes H^1$ dans H^2, et qu'on est en caractéristique $0 \neq 2$, on voit qu'il est équivalent au théorème.

DÉMONSTRATION du théorème. - Considérons les faisceaux suivants sur V_0 :

Θ_0 : germes de champs verticaux holomorphes sur V_0

$\tilde{\Theta}_0$: germes de champs verticaux holomorphes sur V

Π_0 : germes de champs projetables holomorphes sur V_0

$\tilde{\Pi}_0$: germes de champs projetables holomorphes sur V

$\Lambda_0 = \pi^* T_0$, où T_0 est l'espace tangent à B en b_0

$\tilde{\Lambda}_0 = \pi^* \tilde{T}_0$, où $\tilde{T}_0$ est l'espace des germes en b_0 de champ sur B de vecteurs tangents à B.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{\Theta}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \tilde{\Pi}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \tilde{\Lambda}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta_0 \arrow[r] & \Pi_0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où on tire le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{T}_o \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & H^1(V_o , \tilde{\Theta}_o) \arrow[d, "\varepsilon"'] \\ T_o \arrow[r, "\rho"] & H^1(V_o , \Theta_o) \end{tikzcd} \quad .$$

Soient $u , v \in T_o$ des vecteurs tangents à B en b_o donnés. On peut trouver des champs de vecteurs $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sur B , ayant pour valeurs u et v respectivement en b_o , soit $\varepsilon(\tilde{u}) = u$, $\varepsilon(\tilde{v}) = v$. La suite exacte

$$0 \to \tilde{\Theta}_o \to \tilde{\Pi}_o \to \tilde{\Lambda}_o \to 0$$

est une suite d'homomorphismes de faisceaux d'algébres de Lie, donc

$$[\tilde{\rho}(\tilde{u}) \smile \tilde{\rho}(\tilde{v})] = 0$$

d'après la proposition 1. Or $\varepsilon : \tilde{\Theta}_o \to \Theta_o$ est également un homomorphisme d'algébres de Lie, et le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^1(V_o , \tilde{\Theta}_o) \otimes H^1(V_o , \tilde{\Theta}_o) \arrow[r, "{[\smile]}"] \arrow[d, "\varepsilon \otimes \varepsilon"] & H^2(V_o , \tilde{\Theta}_o) \arrow[d, "\varepsilon"] \\ H^1(V_o , \Theta_o) \otimes H^1(V_o , \Theta_o) \arrow[r, "{[\smile]}"] & H^2(V_o , \Theta_o) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit $[\rho(u) \smile \rho(v)] = 0$.

C. Q. F. D.

REMARQUES. -

1° On utilise de façon essentielle le fait que $\varepsilon : \tilde{T}_o \to T_o$ est surjective, donc l'absence de singularité dans B .

2° On a en fait $[\rho(u) \smile b] = 0$ pour tout $u \in T_o$, et toute classe $b \in H^1(V_o , \Theta_o)$ qui est dans l'image de $H^1(V_o , \tilde{\Theta}_o)$ par ε . En particulier, pour qu'un élément $a \in H^1(V_o , \Theta_o)$ soit un vecteur de déformation régulière au sens de l'exposé 3, il faut que $[a \smile b] = 0$ pour tout $b \in H^1(V_o , \Theta_o)$.

Si V_o est une variété analytique complexe compacte, et $a \in H^1(V_o , \Theta)$, on appelle <u>obstruction primaire</u> à la déformation de V_o suivant a , l'élément $[a \smile a] \in H^2(V_o , \Theta)$. Il est nécessaire, pour que a soit un vecteur de déformation, que cette obstruction primaire soit nulle ; mais ce n'est pas suffisant : on peut définir une suite d'applications ensemblistes ω_n , appelées obstructions, avec $\omega_1 : H^1(V_o , \Theta) \to H^2(V_o , \Theta)$ donnée par $\omega_1(a) = [a \smile a]$; ω_{k+1} définie sur le sous-ensemble de $H^1(V_o , \Theta)$ où ω_k s'annule , à valeurs dans des quotients variables de $H^2(V_o , \Theta)$ (1), et une condition nécessaire pour que a soit un vecteur de déformation est que tous les $\omega_k(a)$ soient définis et réels. Je ne sais pas si cette condition est suffisante. KODAIRA, SPENCER et NIJENHUIS [4] ont montré que si $H^2(V_o , \Theta) = 0$, tout élément de $H^1(V_o , \Theta)$ est un vecteur de déformation. On a même dans ce cas une déformation localement universelle dont la base est une variété, et ρ est un isomorphisme de l'espace tangent à cette variété sur $H^1(V_o , \Theta)$.

III. <u>Un exemple d'obstruction</u>.

1. <u>La variété</u> V_o .

Soient $X = E/\Gamma$ un tore complexe de dimension 2 , i. e. $E \approx \underset{\sim}{C}^2$, $\Gamma \approx \underset{\sim}{Z}^4$, et D la droite projective $P^1 \underset{\sim}{C}$. Posons $V_o = X \times D$. Le faisceau Θ des champs holomorphes de vecteurs tangents à V_o est somme directe des faisceaux d'algèbres de Lie $\Theta_1 = \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi_1^* \Theta_X$ et $\Theta_2 = \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_D} \pi_2^* \Theta_D$, où $\pi_1 : V_o \to X$ et $\pi_2 : V_o \to D$ sont les projections, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_D$ les faisceaux d'anneaux locaux, Θ_X , Θ_D les faisceaux de germes des champs holomorphes de vecteurs tangents à X et D respectivement. Nous nous intéressons surtout à Θ_2 . $H^1(V_o , \Theta_2)$ est donné par la suite exacte de Kunneth :

(1) Voir appendice.

$$0 \to H^0(X , \mathcal{O}_X) \otimes H^1(D , \Theta_D) \to H^1(V_0 , \Theta_2) \to H^1(X , \mathcal{O}_X) \otimes H^0(D , \Theta_D) \to 0 \quad .$$

Or on sait que $H^0(D , \Theta_D)$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ du groupe

$$A = GL(2 , \underset{\sim}{C})/\underset{\sim}{C}^* = SL(2 , \underset{\sim}{C})/\{\pm 1\}$$

des automorphismes de D , et $H^1(D , \Theta_D) = 0$, comme on le voit facilement avec un recouvrement de D par deux ouverts. D'autre part, on a vu (exposé 1) que si $X = E/\Gamma$, $H^1(X , \mathcal{O}) = \mathrm{Hom}(\Gamma , \underset{\sim}{C})/\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(E , \underset{\sim}{C})$ est de dimension 2 . Donc $H^1(V_0 , \Theta_2) = H^1(X , \mathcal{O}) \otimes \mathfrak{a}$ est de dimension 6 . Le cup-crochet

$$H^1(V_0 , \Theta_2) \otimes H^1(V_0 , \Theta_2) \to H^2(V_0 , \Theta_2)$$

est donné par la formule :

$$[\gamma \otimes \alpha) \smile (\gamma' \otimes \alpha')] = (\gamma \smile \gamma') \otimes [\alpha , \alpha'] \quad .$$

Le cône des éléments $\varphi \in H^1(V_0 , \Theta_2)$, tels que $[\varphi \smile \varphi] = 0$ s'identifie au cône des tenseurs de rang 1 dans $H^1(X , \mathcal{O}) \otimes \mathfrak{a}$. En effet, si $\varphi = \gamma \otimes \alpha$,

$$[\varphi \smile \varphi] = (\gamma \smile \gamma) \otimes [\alpha , \alpha] = 0 \otimes 0 = 0 \quad ,$$

et si φ n'est pas un tenseur simple, on a

$$\varphi = \gamma \otimes \alpha + \gamma' \otimes \alpha'$$

avec γ et γ' indépendants, α et α' indépendants, et

$$[\varphi \smile \varphi] = 2(\gamma \smile \gamma') \otimes [\alpha , \alpha'] \neq 0 \quad .$$

2. <u>L'espace mixte</u> V .

Dans cet exemple, tous les éléments de $H^1(V_0 , \Theta_2)$ dont l'obstruction primaire est nulle sont des vecteurs de déformation. Plus précisément :

PROPOSITION 2. - Il existe un espace mixte $\pi : V \to B$ et un point $b_o \in B$, tels que

1° $\pi^{-1}(b_o) = V_o$ (variété définie au début du paragraphe) ;

2° Il existe un isomorphisme σ d'un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique B sur le cône des éléments $\varphi \in H^1(V_o, \Theta_2)$ tels que $[\varphi \smile \varphi] = 0$;

3° Pour tout sous-espace B' de B qui n'a pas de singularité en b_o, l'application de Spencer-Kodaira ρ de l'espace tangent à B' en b_o dans $H^1(V_o, \Theta)$ coïncide avec $\sigma : B' \to H^1(V_o, \Theta_2)$. Soit H l'espace analytique des homomorphismes de Γ dans α dont l'image soit contenue dans un sous-espace vectoriel de α de dimension 1 sur $\underset{\sim}{C}$ (matrices 4×2 de rang 1 à coefficients dans $\underset{\sim}{C}$). Pour tout $h \in H$, $e \circ h$ est un homomorphisme de Γ dans A, $e : \alpha \to A$ désignant l'application exponentielle, et on construit une variété V_h, fibrée sur X de fibre D, ainsi : V_h est le quotient de $E \times D$ par la relation d'équivalence définie par Γ opérant par

$$\gamma \star (x, y) = (x + \gamma, (e \circ h(\gamma)).y) \quad .$$

Ces variétés sont les fibres d'un espace mixte $W \to H$, où W est le quotient de $H \times E_X D$ par la relation d'équivalence définie par Γ opérant par

$$\gamma \star (h, x, y) = (h, x + \gamma, (e \circ h(\gamma)).y) \quad .$$

Mettons maintenant sur H la relation d'équivalence suivante :

$$(h' \sim h) \iff (h' - h)$$

se prolonge en une application $(f, \underset{\sim}{C})$-linéaire : $E \to \alpha$. Remarquons que, si $h' \sim h$, ou bien $h'(\Gamma)$ et $h(\Gamma)$, sont contenus dans un même sous-espace L de α de dimension 1 sur $\underset{\sim}{C}$, alors on a aussi $f(E) \subset L$, ou bien $h \sim 0$ et $h' \sim 0$. Dans les deux cas V_h et $V_{h'}$ sont isomorphes, et on a un isomorphisme $i_{h',h} : V_h \to V_{h'}$ défini par

$$i_{h',h}(x, y) = (x, e \circ f(x).y) \quad \text{dans le premier cas}$$

$$i_{h',h} = i_{h',0} \circ i_{0,h} \quad \text{dans le deuxième cas} \quad .$$

On a, si h , h' et h'' sont dans la même classe, $i_{h''h} = i_{h''h'} \circ i_{h'h}$, et on met sur W la relation d'équivalence

$$(h' , z') \sim (h , z) \iff h' \sim h \quad \text{et} \quad z' = i_{h'h}\, z$$

pour $h , h' \in H$, $z \in V_h$ et $z' \in V_{h'}$.

Soient B et V les quotients de H et W respectivement par ces relations d'équivalence. On a une projection $V \to B$, Pour montrer que les strutures d'espaces $\underset{\sim}{C}$-analytiques de H et W induisent des structures de même espèce sur leurs quotients B et V , il suffit de remarquer qu'on peut relever B en un sous-espace analytique de H : soit par exemple $(\gamma_1 , \gamma_2 , \gamma_3 , \gamma_4)$ une base de Γ telle que (γ_1 , γ_2) soit une base de E sur $\underset{\sim}{C}$, alors chaque classe $b \in B$ contient un élément $h \in H$, et un seul, tel que

$$h(\gamma_1) = h(\gamma_2) = 0 \qquad .$$

3. Calcul de ρ_0 .

Soit T l'espace tangent à B en b_0 aux sens de ZARISKI : c'est le dual de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, où $\mathfrak{J}$ est l'idéal des germes en b_0 de fonctions analytiques sur B , nulles en b_0 . Alors T_0 s'identifie à $\mathrm{Hom}(\Gamma , \alpha)/\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(E , \alpha)$. D'autre part,

$$H^1(V_0 ; \Theta) = H^1(V_0 ; \Theta_1) \oplus H^1(V_0 ; \Theta_2)$$

$$= H^1(X ; \mathcal{O}) \otimes E \oplus H^1(X ; \mathcal{O}) \otimes \alpha \qquad ,$$

et le deuxième terme de cette somme s'identifie au quotient $\mathrm{Hom}(\Gamma , \alpha)/\mathrm{Hom}_C(E , \alpha)$. On va montrer que l'application $\rho_0 : T_0 \to H^1(V_0 ; \Theta)$ n'est autre que l'injection canoniquement définie par ces identifications.

Soit $u \in T_0 = \mathrm{Hom}(\Gamma , \alpha)/\mathrm{Hom}(E , \alpha)$ la classe d'un élément $h \in \mathrm{Hom}(\Gamma , \alpha)$, que nous supposerons de rang 1 . h se met donc sous la forme $\eta \otimes a$, $\eta \in \mathrm{Hom}(\Gamma , \underset{\sim}{C})$, $a \in \alpha$, et on peut considérer h comme un vecteur tangent à H en 0 . Soit $\overline{h}$ le champs de vecteurs tangents à $H \times E \times D$ sur $0 \times E \times D$, qui se projette sur h , et dont les composantes sur $E \times D$ sont nulles. Soit (U_i)

un recouvrement de $X = E/\Gamma$ par des ouverts simplement connexes, et choisissons pour chaque i une composante $\widetilde{U}_i$ de l'image réciproque de U_i dans E. On désignera par v_i l'image sur $U_i \times D$ du champ $\overline{h}|_{\widetilde{U}_i \times D}$. C'est un champs projetable holomorphe sur $0 \times U_i \times D$ de vecteurs tangents à $H \times U_i \times D$, et en posant $w_{ij} = v_j - v_i$, w_{ij} sera un champs vertical holomorphe sur $U_{ij} \times D$, et ces champs formeront un cocycle dont la classe de cohomologie sera par définition $\rho_0(u)$.

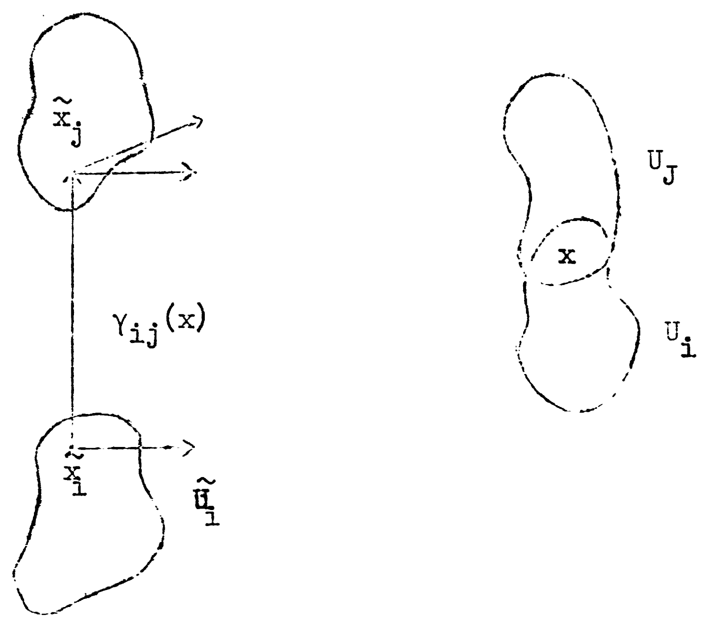
Soient $x \in U_{ij}$, $\widetilde{x}_i$ et $\widetilde{x}_j$ ses images réciproques dans $\widetilde{U}_i$ et $\widetilde{U}_j$. On a $\widetilde{x}_j = \widetilde{x}_i + \gamma_{ij}(x)$, où $\gamma_{ij}(x) \in \Gamma$, et

$$w_{ij}(x) = \overline{h}(\widetilde{x}_j) - [\gamma_{ij}(x)]_* \, (\overline{h}(\widetilde{x}_i)) = -\, h(\gamma_{ij}(x)) \in \alpha$$

$w_{ij}(x)$ est un champs de vecteur sur D, donc

$$(w_{ij}) \in Z^1(V_0 , (U_i \times D) ; \Theta_2) \qquad ,$$

et w_{ij} est de la forme $\zeta \otimes \alpha$, où $\zeta \in Z^1(V_0 , (U_i \times D) ; \Theta)$ est le cocycle défini par $\zeta_{ij}(x) = -\,\eta(\gamma_{ij}(x))$. C'est un cocycle dont la classe de cohomologie est au signe près l'élément de $H^1(V_0 , \Theta)$ identifié à la classe de η dans $\mathrm{Hom}(\Gamma , \underset{\sim}{C})/\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(E , \underset{\sim}{C})$.



C. Q. F. D.

APPENDICE À L'EXPOSÉ 4 :

Obstructions supérieures

I. Définition des obstructions.

1. Faisceau des germes d'automorphismes verticaux.

Soient V_o une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique, que nous supposerons compacte, B un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique, $b_o \in B$. On va définir un faisceau Γ de groupes non abéliens sur V_o. Pour tout ouvert U de V_o, considérons les isomorphismes de variétés analytiques $\gamma : W \to W'$, où W et W' sont des ouverts de $B \times V_o$ contenant $b_o \times U$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $\pi_1 \ \gamma = \pi_1$, projection de $B \times V_o$ sur B .

2° γ est l'identité sur $b_o \times U$.

$\Gamma(U)$ est obtenu en identifiant dans l'ensemble de ces isomorphismes γ deux applications γ_1 et γ_2 qui coïncident sur un voisinage de $b_o \times U$.

Il est clair que $\Gamma(U)$ est un groupe pour la composition des isomorphismes, et que les $\Gamma(U)$ forment un faisceau Γ de groupes non abéliens.

PROPOSITION 1. - $H^1(V_o , \Gamma)$ s'identifie à l'ensemble des classes de germes de déformation de V_o au-dessus de (B , b_o).

Rappelons qu'un germe de déformation de V_o au-dessus de (B , b_o) est une déformation de V_o au-dessus d'un voisinage de b_o dans B, et que deux telles déformations $(B' , b_o , V' , \pi' , \iota')$ et $(B'' , b_o , V'' , \pi'' , \iota'')$ sont localement équivalentes s'il existe un voisinage W' de $\pi'^{-1}(b_o)$ dans V', un voisinage W'' de $\pi''^{-1}(b_o)$ dans V'' et un isomorphisme φ de W' sur W'' tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & V_o \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & W'' \arrow[dl, "\pi''"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION de la proposition 1. - Soit (B', b_o, V, π, ι) une déformation de V_o au-dessus d'un voisinage B' de b_o dans B. On peut trouver un recouvrement (U_i) de V_o et un recouvrement (W_i) d'un voisinage de $\iota(V_o)$ dans V, et des isomorphismes (h_i), où h_i est un isomorphisme d'un voisinage de $\{b_o\} \times U_i$ dans $B \times V_o$ sur W_i, qui coïncide avec ι sur $\{b_o\} \times U_i$, et tel que $\pi \circ h_i = \pi_1$.

Posons $\gamma_{ij} = h_i^{-1} \circ h_j$. On vérifie que γ_{ij} définit un élément de $\Gamma(U_i \cap U_j)$ et que $\gamma_{ij} \cdot \gamma_{jk} = \gamma_{ik}$. Les γ_{ij} forment donc un cocycle $\gamma \in Z^1(V_o, (U_i); \Gamma)$. Un tel cocycle sera dit associé à la déformation. Il restera associé à la déformation, si on l'induit sur un recouvrement plus fin. Soit $(B', b_o, V', \pi', \iota')$ une déformation localement équivalente à la première, et γ' un cocycle associé à cette déformation. On peut supposer, en raffinant les recouvrements au besoin, que les deux cocycles γ et γ' sont relatifs au même recouvrement (U_i) de V_o. Soit f un isomorphisme d'un voisinage de $\iota(V_o)$ dans V sur un voisinage de $\iota'(V_o)$ dans V'. Posons $f_i = h_i'^{-1} \circ f \circ h_i$. On a $f_i \in \Gamma(U_i)$, et

$$f_i \cdot \gamma_{ij} = \gamma'_{ij} \cdot f_j \quad .$$

On en conclut que les cocycles associés à une déformation forment une classe de cohomologie qui ne dépend que de la classe locale de cette déformation.

Réciproquement, donnons-nous un recouvrement localement fini (U_i) de V_o et un cocycle $\gamma \in Z^1(V_o, (U_i); \Gamma)$. γ_{ij} peut être représenté comme un isomorphisme d'un ouvert W_{ij} de $B \times V_o$ sur un autre ouvert W_{ji}, ces deux ouverts contenant $\{b_o\} \times U_{ij}$. Choisissons un rétrécissement (U_i') du recouvrement (U_i), et prenons un voisinage B'' de b_o dans B suffisamment petit pour que $B'' \times U'_{ij} \subset W_{ij}$ pour tous (i, j), et que l'égalité $\gamma_{ij} \cdot \gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ ait un sens et ait lieu sur $B'' \times U'_{ijk}$. On obtient alors une déformation V de V_o sur B'' en recollant les $B'' \times U_i'$ au moyen des γ_{ij}.

On vérifie enfin que tout ceci définit bien une bijection entre l'ensemble des classes locales de deformations de V_o sur (B, b_o) et $H^1(V_o; \Gamma)$.

2. Obstructions supérieures.

Pour chaque ouvert $U \subset V_0$, le groupe $\Gamma(U)$ est naturellement filtré : notons $F_k(U)$ le groupe des automorphismes verticaux qui sont tangents à l'identité jusqu'à l'ordre $k - 1$. Γ devient donc un faisceau filtré :

$$\Gamma = F_1 \supset F_2 \supset \dots \quad \text{et} \quad \bigcap F_k = \{0\} \quad .$$

Posons

$$Q_k = \Gamma / F_{k+1} \quad ,$$

et

$$G_k = F_k / F_{k+1} = \operatorname{Ker} : \; Q_k \to Q_{k-1} \quad .$$

Pour tout k, G_k est un faisceau de groupes abéliens, qu'on notera additivement. Si $B = \underset{\sim}{C}$, $b_0 = 0$ (on parle alors de déformation à un paramètre), pour tout k, G_k s'identifie au faisceau Θ des germes des champs de vecteurs tangents à V_0. Dans le cas général,

$$G_k = m^k / m^{k+1} \otimes \Theta \quad ,$$

où m est l'idéal maximal du point b_0 dans B.

D'autre part, si $a \in F_p$, $b \in F_q$, le commutateur $a b a^{-1} b^{-1} \in F_{p+q}$, et ceci définit une application $G_p \otimes G_q \to G_{p+q}$ qui munit $G_* = \oplus G_k$ d'une structure de faisceau $\mathcal{O}$ d'algèbres de Lie isomorphe au produit tensoriel de Θ par l'algèbre graduée associée à l'idéal maximal m de b_0 dans B filtré par ses puissances.

La suite exacte de groupes non abéliens

$$0 \to G_{k+1} \to Q_{k+1} \to Q_k \to 0$$

dans laquelle G_{k+1} est un sous-groupe de Q_{k+1} contenu dans son centre, donne naissance [1] à une suite exacte d'ensembles pointés :

$$H^1(V_o , Q_{k+1}) \to H^1(V_o , Q_k) \xrightarrow{\delta_k} H^2(V_o , G_{k+1})$$

pour qu'un élément $q \in H^1(V_o ; Q_k)$ soit dans l'image de $H^1(V_o , Q_{k+1})$, il faut et il suffit que $\delta_k q = 0$ dans $H^2(V_o ; G_{k+1})$. Une condition nécessaire pour que q soit dans l'image de $H^1(V_o ; \Gamma) \to H^1(V_o ; Q_k)$ est donc que $\delta_k q = 0$ dans $H^2(V_o ; G_{k+1})$.

DÉFINITION. - Soient $q \in H^1(V_o ; Q_i)$, et $k \geq i$. On appelle obstruction d'ordre k de l'élément q l'image directe dans $H^2(V_o ; G_{k+1})$ par δ_k de l'image réciproque de q dans $H^1(V_o , Q_k)$. C'est donc un sous-ensemble de $H^2(V_o ; G_{k+1})$. L'obstruction est dite triviale si l'élément neutre appartient à ce sous-ensemble. C'est une condition nécessaire et suffisante pour que q soit dans l'image de $H^1(V_o , Q_{k+1})$ et une condition nécessaire pour que q soit dans l'image de $H^1(V_o , \Gamma)$.

Si q n'est pas dans l'image de $H^1(V_o , Q_k)$, son obstruction **d'ordre k est vide, donc** non triviale.

Cette définition est surtout employée dans le cas des déformations à un paramètre ($B = \underset{\sim}{C}$, $b_o = 0$) , où $G_{k+1} = \Theta$ pour tout k , et $Q_1 = G_1 = \Theta$. Les obstructions successives d'un élément $a \in H^1(V_o ; \Theta)$ sont donc des sous-ensembles de $H^2(V_o ; \Theta)$, et pour que a soit un vecteur de déformation, il faut que toutes ses obstructions soient triviales. En effet, l'élément de $H^1(V_o ; \Theta)$ qui correspond par les identifications faites ($\Theta = Q_1 = \Gamma/F_2$, et proposition 1) à un germe de déformation n'est autre que l'image par l'application ρ de Spencer-Kodaira du vecteur de base canonique de l'espace tangent à $\underset{\sim}{C}$ en 0 .

II. Calcul des obstructions.

1. Relation avec le faisceau Ω .

Nous nous plaçons désormais dans le cas des déformations à un paramètre, i. e. $B = \underset{\sim}{C}$, $b_o = 0$.

Soit Ω le faisceau d'algèbres enveloppantes universelles des algèbres de Lie du faisceau Θ (i. e. $\Omega(U)$ est l'algèbre enveloppante universelle de $\Theta(U)$).

Ω contient Θ comme sous-faisceau, et même comme facteur direct d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt en caractéristique 0 . Pour tout k , considérons le faisceau d'algèbres $\Omega_k = \Omega[t]/(t^{k+1})$. Pour $i \leq k$, on a une application de faisceaux d'ensembles

$$\exp_i : \Theta \to \Omega_k$$

définie par

$$\exp_i(\Theta) = \sum_p \frac{1}{p!} \Theta^p t^p \quad .$$

PROPOSITION 2 (CAMPBELL-HAUSDORFF). -

Q_k s'identifie au faisceau des sous-groupes multiplicatifs de Ω_k engendrés par les images des $\exp_i$, $i \leq k$.

La démonstration de cette proposition ne sera pas donnée ici. Notons Ω_k^* le faisceau de sous-groupes multiplicatifs de Ω_k formé des éléments dont le terme constant est 1 . Le diagramme commutatif de faisceaux de groupes (non abéliens)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Theta \arrow[r] \arrow[d] & Q_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & Q_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega \arrow[r] & \Omega^*_{k+1} \arrow[r] & \Omega^*_k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donne naissance au diagramme commutatif d'ensembles :

$$\begin{tikzcd}
H^1(V_0 ; Q_k) \arrow[r, "\delta_k"] \arrow[d] & H^2(V_0 ; \Theta) \arrow[d] \\
H^1(V_0 ; \Omega^*_k) \arrow[r, "\delta_k"] & H^2(V_0 ; \Omega)
\end{tikzcd}$$

dans lequel $H^2(V_0 ; \Theta)$ est un sous-espace vectoriel de $H^2(V_0 ; \Omega)$.

2. Calcul de l'obstruction primaire.

Soit maintenant $a \in H^1(V_0 ; \Theta)$, et soit $\alpha = (\alpha_{ij})$ un cocycle de la classe a (Le choix du cocycle α n'importe pas, car tout cocycle cohomologue à un cocycle de déformation est un cocycle de déformation). Il lui correspond dans Ω_1^* le cocycle multiplicatif $(1 + \alpha_{ij} t)$. Ce cocycle peut être remonté dans Ω_i^* en la cochaîne $(1 + \alpha_{ij} t)$, et on a

$$(1 + \alpha_{ij} t)(1 + \alpha_{jk} t) = 1 + (\alpha_{ij} + \alpha_{jk}) t + \alpha_{ij} \alpha_{jk} t^2$$

$$= (1 + \alpha_{ik} t + \alpha_{ij} \alpha_{jk} t^2 = (1 + \alpha_{ik} t)(1 + \alpha_{ij} \alpha_{jk} t^2) \quad .$$

Soit finalement

$$\delta_1 a = a \smile a \quad ,$$

le $\smile$-produit étant pris dans le faisceau d'algèbres Ω .

Remarquons que, si on note $\tilde{\smile}$ le cup-produit pris dans le faisceau d'algèbres opposé à Ω , i. e. défini au niveau cochaîne par $(\alpha \tilde{\smile} \beta)_{ijk} = \beta_{jk} \alpha_{ij}$, on a toujours $a \tilde{\smile} b = - b \smile a$ en cohomologie.

Par suite

$$[a \smile a] = (a \smile a) - (a \tilde{\smile} a) = 2a \smile a \quad ,$$

et $\delta_1 a = a \smile a = \frac{1}{2}[a \smile a]$.

On retrouve donc, au facteur $\frac{1}{2}$ près, l'obstruction définie au cours de l'exposé.

3. Calcul de l'obstruction secondaire.

Supposons maintenant $a \smile a = 0$, on peut alors trouver une cochaîne $\beta = (\beta_{ij})$ telle que $\delta\beta + \alpha \smile \alpha = 0$, i. e.

$$\beta_{ik} = \beta_{ij} + \beta_{jk} + \alpha_{ij} \alpha_{jk} \quad .$$

Alors $(1 + \alpha_{ij}\, t + \beta_{ij}\, t^2)$ est un cocycle de Ω_2^*, et on peut choisir la cochaîne β de façon que ce soit un cocycle de Q_2.

Ce cocycle peut se relever dans Ω_3^* en la cochaîne $(1 + \alpha_{ij}\, t + \beta_{ij}\, t^2)$, et on a

$$(1 + \alpha_{ij}\, t + \beta_{ij}\, t^2)(1 + \alpha_{jk}\, t + \beta_{jk}\, t^2) = 1 + (\alpha_{ij} + \alpha_{jk})\, t + (\beta_{ij} + \beta_{jk} + \alpha_{ij}\, \alpha_{jk})\, t^2$$

$$+ (\alpha_{ij}\, \beta_{jk} + \beta_{ij}\, \alpha_{jk})\, t^3 \equiv (1 + \alpha_{ik}\, t + \beta_{ik}\, t^2)(1 + (\alpha_{ij}\, \beta_{jk} + \beta_{ij}\, \alpha_{jk})\, t^3) \quad .$$

L'obstruction secondaire de a est donc la classe de cohomologie du cocycle $(\alpha_{ij}\, \beta_{jk} + \beta_{ij}\, \alpha_{jk}) \in Z^2(V_0\, ;\, \Omega)$. Cette classe dépend du choix de la cochaîne β : si on fait un autre choix $\beta' = \beta + \theta$, où $\theta \in Z^1(V_0\, ;\, \Theta)$, le cocycle est modifié par $\alpha \smile \theta + \theta \smile \alpha$, et sa classe par un élément de $[a \smile H^1(V_0\, ;\, \Theta)]$. On reconnait là le triple produit de Massey $(a\, ; a\, ; a)$ pris dans l'algèbre Ω, mais avec une indétermination un peu plus restreinte.

On peut chercher à calculer cette obstruction secondaire sans sortir du faisceau Θ : les calculs sont bien plus compliqués : il faut prendre une cochaîne $\beta = (\beta_{ij})$ telle que $\delta\beta + \frac{1}{2}[\alpha \smile \alpha] = 0$. Alors l'obstruction secondaire de α est la classe du cocycle

$$[\alpha_{ij}\, ,\, \beta_{jk}] + \tfrac{1}{6}[[\alpha_{ij}\, ,\, \alpha_{jk}]\, \alpha_{ij} + 2\alpha_{jk}] \quad .$$

Le calcul fait dans le faisceau d'algèbre enveloppante Ω se généralise aux obstructions d'ordre r : on est amené à déterminer par récurrence des cochaînes ω_r telles que

$$\begin{cases} \omega_1 = \alpha \\ \delta\omega_r + \sum\limits_{p+q=r} \omega_p \smile \omega_q = 0 \\ 1 + \sum\limits_{1 \leq p \leq r} \omega_p\, t^p \in C^{\cdot}(V_0\, ;\, Q_r) \end{cases}$$

4. Usage des suites spectrales.

PROPOSITION 3. - Soit $\varphi : V_o \to X$ une application quelconque. Elle donne naissance à une suite spectrale d'algèbres de Lie graduées :

$$H^*(X ; \mathcal{R}^* \varphi \Theta) \Longrightarrow H^*(V_o ; \Theta) \quad .$$

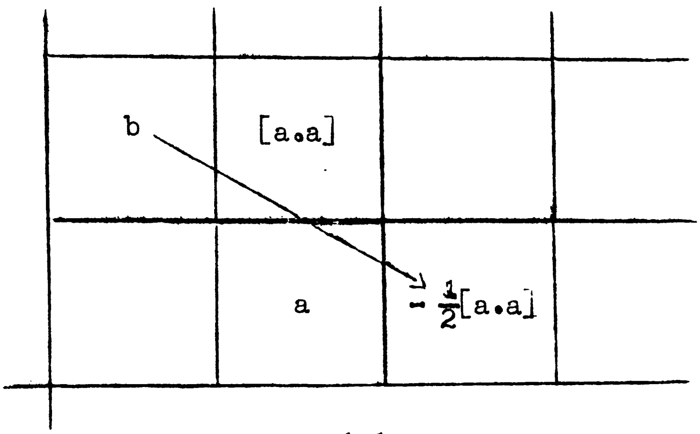
Soit

$$a \in H^1(X ; \varphi_* \Theta) \subset H^1(V_o ; \Theta) \quad .$$

Si l'élément

$$-\tfrac{1}{2}[a \smile a] \in H^2(X ; \varphi_* \Theta) = E_2^{2,o}$$

n'est pas nul, mais est l'image par la différentielle d_2 de la suite spectrale d'un élément $b \in E_2^{o,1}$, l'obstruction secondaire de a a pour image dans $E_\infty^{1,1}$ les éléments de la forme $[a , b]$. En particulier, si pour tous les b tels que $d_2 b = -\frac{1}{2}[a.a]$ on a $[a.b] \neq 0$, l'obstruction secondaire n'est pas triviale.



Par contre, si $[a.b] = 0$ dans $E^{1,1}$, on peut seulement dire que l'obstruction secondaire vient de $E_\infty^{2,o}$, et si ce groupe n'est pas nul, on ne peut rien conclure.

DÉMONSTRATION. - Soit α un cocycle sur V_o représentant la classe a. L'élément $b \in E_2^{o,1}$ peut être représenté par une cochaîne

$$\beta = (\beta_{i,j}) \in C^1(V_o ; \Theta) \quad ,$$

telle que

$$\delta\beta + \frac{1}{2}[\alpha \smile \alpha] = 0 \quad .$$

On obtient une cochaîne

$$\beta' \in C^1(V_0 ; \Omega)$$

telle que

$$1 + \alpha t + \beta' t^2 \in C^1(V_0 ; Q_2)$$

en posant $\beta'_{ij} = \beta_{ij} + \frac{1}{2}\alpha^2_{ij}$; et cette cochaîne vérifie $\delta\beta' + \alpha \smile \alpha = 0$. Mais cette nouvelle cochaîne représente, dans le terme $E_2^{0,1}$ de la suite spectrale du faisceau Ω , le même élément b que la cochaîne β , car elle en diffère par une cochaîne qui provient de X . L'obstruction secondaire est alors la classe du cocycle $\alpha \smile \beta' + \beta' \smile \alpha$, qui représente dans le terme $E^{1,1}$ de la suite spectrale l'élément $[a.b]$.

Cette proposition permet de construire des exemples d'obstruction secondaire non triviale. Considérons le groupe N des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x , y , z \in \underset{\sim}{C}$, et $Y = N/\Gamma$, où Γ est le sous-groupe de N formé des éléments où $x , y , z \in \underset{\sim}{Z} + i\underset{\sim}{Z}$. Y est fibré sur un tore complexe à deux dimensions $T^2 \approx \underset{\sim}{C}^2/\underset{\sim}{Z}^4$. On trouve des éléments d'obstruction secondaire non triviale dans $H^1(V_0 ; \Theta)$, où V_0 est le produit de Y par une droite projective D . (On utilise la suite spectrale obtenue en projetant sur $T^2 \times D$). Cette variété possède une déformation "verselle" dont l'espace tangent de Zariski de la base B s'identifie par l'application ρ de Spencer-Kodaira à $H^1(V_0 ; \Theta)$. B possède en son point de base b_0 une singularité conique du 3ème degré, dont l'équation est donnée par l'obstruction secondaire.

Je ne connais pas d'exemple d'obstruction secondaire non triviale sur des variétés V_o vérifiant $H^o(V_o ; \Theta) = 0$, mais il en existe très probablement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - A general theory of fibre espaces with structure sheaf. - Lawrence, University of Kansas, Department of Mathematics, 1955 (National Science Foundation Research Project on Geometry of Function Space, Report 4).

[2] HAEFLIGER (André). - Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comment. Math. Helvet., t. 32, 1957/58, p. 248-239 (Thèse Sc. math. Paris. 1958).

[3] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.). - On déformation of complex analytic structures, I., Annals of Math., Series 2, t. 67, 1958, p. 328-401.

[4] KODAIRA (K.), NIRENBERG (L.) and SPENCER (D. C.). - On the existence of deformations of complex analytic structures, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 450-459.

[5] KURANISHI (Masatake). - On the locally complete families of complexe analytic structures. - Princeton (multigraphié)(à paraître dans Annals of Mathematics).