

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Déformations régulières

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 1 (1960-1961), exp. n° 3, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A2_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉFORMATIONS RÉGULIÈRES

par Adrien DOUADY

Dans tout cet exposé, B sera une variété C^∞ (resp. \mathbb{R} -analytique, resp. \mathbb{C} -analytique) et $\pi : V \rightarrow B$ désignera une variété mixte propre ; b_0 sera un point de B ; $V_0 = \pi^{-1}(b_0)$ sera donc une variété \mathbb{C} -analytique compacte.

I. L'application $\tilde{\rho}$.

Soit $\tilde{\Theta}$ (resp. $\tilde{\Pi}$) le faisceau des germes de champs de vecteurs verticaux holomorphes (resp. localement projetables holomorphes) sur V . Le faisceau quotient $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Pi}/\tilde{\Theta}$ n'est autre que le faisceau image réciproque par π du faisceau \tilde{T} des germes de champs C^∞ (resp. ...) de vecteurs tangents sur B .

Pour tout ouvert U de B , posons $V_U = \pi^{-1}(U)$.

La suite exacte

$$0 \rightarrow \tilde{\Theta} \rightarrow \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Lambda} \rightarrow 0$$

de faisceaux sur V_U donne naissance à un homomorphisme

$$\tilde{\rho}_U : H^0(U ; \tilde{T}) \xrightarrow{\pi_*} H^0(V_U ; \tilde{\Lambda}) \xrightarrow{\delta} H^1(V_U ; \tilde{\Theta}) \quad .$$

Soit $\mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta}$ le faisceau sur B défini par le préfaisceau $U \rightarrow H^1(V_U ; \tilde{\Theta})$. Alors $\tilde{\rho}$ devient un homomorphisme de faisceaux sur B :

$$\tilde{\rho} : \tilde{T} \rightarrow \mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta} \quad .$$

En particulier, on a un homomorphisme

$$\tilde{\rho}_0 : \tilde{T}_0 \rightarrow \mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta} = H^1(V_0 ; \tilde{\Theta})$$

où \tilde{T}_0 est l'espace vectoriel des germes en b_0 de champs de vecteurs tangents sur B . On a enfin un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{T}_0 & \xrightarrow{\tilde{\rho}_0} & H^1(V_0; \tilde{\Theta}) \\
 \varepsilon \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\
 T_0 & \xrightarrow{\rho_0} & H^1(V_0; \Theta_0)
 \end{array}$$

où ρ_0 est l'application de Spencer-Kodaira [2].

THÉORÈME 1. - Pour que la variété mixte propre $\pi: V \rightarrow B$ soit localement triviale au voisinage du point $b_0 \in B$, il faut et il suffit que l'application $\tilde{\rho}_0: \tilde{T}_0 \rightarrow H^1(V_0; \tilde{\Theta})$ soit nulle.

DÉMONSTRATION.

a. Il faut : si $\pi: V \rightarrow B$ est localement triviale en b_0 , pour tout ouvert U de B au-dessus duquel V soit triviale, on a $\tilde{\Pi} = \tilde{\Lambda} \oplus \tilde{\Theta}$ sur V_U , donc $\delta: H^0(V_U; \tilde{\Lambda}) \rightarrow H^0(V_U; \tilde{\Theta})$ est nulle.

b. Il suffit : Soient (η_1, \dots, η_p) des champs de vecteurs C^∞ (resp. ...) sur un voisinage de b_0 dans B , tels que $(\eta_1(b_0), \dots, \eta_p(b_0))$ forment une base de l'espace tangent T_0 à B en b_0 . Il résulte de l'hypothèse que l'application

$$H^0(V_0; \tilde{\Pi}) \rightarrow H^0(V_0; \tilde{\Lambda})$$

est surjective.

Soient donc (ξ_1, \dots, ξ_p) des champs de vecteurs projetables holomorphes sur un voisinage de V_0 dans V , qui se projettent suivant (η_1, \dots, η_p) . Soit f l'application définie sur un voisinage de $0 \times V_0$ dans $\mathbb{R}^p \times V_0$ (resp. \mathbb{C}) par

$$f(t_1, \dots, t_p, y) = e^{\xi_1}(t_1, e^{\xi_2}(\dots, e^{\xi_p}(t_p, y) \dots)) .$$

Il résulte de la proposition énoncée dans [1] (§III, n° 2) que f induit un isomorphisme de variété mixte de $U \times V_0$ sur $\pi^{-1}(f_1(U))$ au-dessus de f_1 , où U est un voisinage cubique de 0 dans \mathbb{R}^p suffisamment petit, et f_1 l'application de U dans B définie par

$$f_1(t_1, \dots, t_p) = e^{\eta_1}(t_1, \dots, e^{\eta_p}(t_p, b_0) \dots) ,$$

ce qui démontre le théorème.

II. Le cas régulier.

Pour tout $b \in B$, posons $V_b = \pi^{-1}(b)$. Considérons la famille $H^1(V_b; \Theta_b)$ indexée par B d'espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{C} , et, pour tout $b \in B$, l'application

$$\varepsilon_b : H^1(V_b; \tilde{\Theta}) \rightarrow H^1(V_b; \Theta_b) \quad .$$

Pour tout ouvert $U \subset B$, on a une application

$$\tilde{\varepsilon}_U : H^1(V_U; \tilde{\Theta}) \rightarrow \prod_{b \in U} H^1(V_b; \Theta_b)$$

qui définit quand U varie un homomorphisme du faisceau $\mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta}$ dans le faisceau Φ sur B défini par $\Phi(U) = \prod_{b \in U} H^1(V_b; \Theta_b)$.

DEFINITION. - On dit que la variété mixte propre $\pi : V \rightarrow B$ est régulière si

1° la dimension de $H^1(V_b; \Theta_b)$ ne dépend pas du point $b \in B$;

2° on peut mettre sur $E = \bigcup_{b \in B} H^1(V_b; \Theta_b)$ une structure de fibré vectoriel

C^∞ (resp. ...) telle que $\tilde{\varepsilon}$ soit un isomorphisme du faisceau $\mathcal{R}^1 \pi_* \tilde{\Theta}$ sur le faisceau des germes de sections C^∞ (resp. ...) du fibré E .

En fait, KODAIRA et SPENCER ont montré [2], en identifiant les espaces H^1 à des espaces de formes harmoniques, que la condition (2) est une conséquence de la condition (1).

Le théorème 1 admet comme corollaire :

PROPOSITION 1. - Pour que la variété mixte propre $\pi : V \rightarrow B$ soit localement triviale, il faut et il suffit qu'elle soit régulière et que, pour tout $b \in B$, l'application de Spencer-Kodaira

$$\rho_b : T_b \rightarrow H^1(V_b; \Theta_b)$$

soit nulle.

En effet, du fait que $\tilde{\varepsilon}$ est injective, cette condition entraîne que l'application

$$\tilde{\beta}_b : \tilde{T}_b \rightarrow H^1(V_b ; \tilde{\Theta})$$

est nulle pour tout b .

Nous construirons à la fin de cet exposé un contre-exemple qui montrera qu'il est nécessaire de supposer que la variété mixte est régulière.

III. Un exemple de déformation non régulière : Variétés de Hopf.

1. Variétés de Hopf.

Soit n un entier ≥ 2 . Soit b une matrice $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{C} , dont toutes les valeurs propres soient de module > 1 . Le groupe libre $L(b)$ engendré par b opère sur $\tilde{V} = \mathbb{C}^n - \{0\}$ librement, et l'espace quotient $V_b = \tilde{V}/L(b)$ est une variété \mathbb{C} -analytique compacte, homéomorphe à $S^{2n-1} \times S^1$, appelée variété de Hopf définie par b .

V_b et $V_{b'}$ sont isomorphes si et seulement si $\exists a$ tel que $b' = ab a^{-1}$ ou $ab^{-1} a^{-1}$ (cf. Appendice).

Soit Θ le faisceau des germes de champs holomorphes de vecteurs tangents sur V_b .

PROPOSITION 2. - $H^0(V_b ; \Theta)$ s'identifie à l'espace vectoriel des matrices qui commutent à b , et $H^1(V_b ; \Theta)$ a même dimension que cet espace vectoriel.

DÉMONSTRATION. - Si X est un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \tilde{V}$, $b_*(X)$ sera le champ de vecteurs transporté par b sur l'ouvert $b(U)$, soit $b_* X(u) = bX(b^{-1}u)$. Soit $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement de \tilde{V} par des ouverts de Stein simplement connexes; posons, pour tout i , $\tilde{U}_i = \chi_i^{-1}(U_i)$, où χ_i est l'application canonique de \tilde{V} sur V_b . Le recouvrement $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{U}_i)$ de \tilde{V} est formé d'ouverts de Stein invariants par b (non connexes, mais ça ne fait rien). b_* définit une application, encore notée b_* , du groupe des cochaînes $C^*(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{U}}; \Theta)$ dans lui-même.

LEMME 1. - On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow C^*(V_b, \mathcal{U}; \Theta) \xrightarrow{b_*} C^*(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{U}}; \Theta) \xrightarrow{1 - b_*} C^*(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{U}}; \Theta) \rightarrow 0.$$

Démonstration du lemme 1. - La seule chose à vérifier est que l'application $1 - b_*$ est surjective : pour tous (i_0, \dots, i_q) , soit $U_{i_0, \dots, i_q}^!$ un ouvert de \tilde{V} tel que

$$\chi : U_{i_0, \dots, i_q}^! \rightarrow U_{i_0, \dots, i_q}$$

soit un homéomorphisme. $\tilde{U}_{i_0, \dots, i_q}$ est alors réunion disjointe des

$b_*^p U_{i_0, \dots, i_q}^!$, où $p \in \mathbb{Z}$, et tout $\gamma \in C^q(\tilde{V}, \tilde{u}; \Theta)$ se met sous la forme $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, avec $\gamma_1 = 0$ sur $b^p(U_{i_0, \dots, i_q}^!)$ pour $p < 0$, $\gamma_2 = 0$ pour $p \geq 0$. Posons

$$\beta = \sum_{p > 0} b_*^p \gamma_1 + \sum_{p < 0} b_*^p \gamma_2 \quad (\text{somme localement finie}) \quad .$$

On a $\beta - b_* \beta = \gamma$, d'où le lemme 1.

Fin de la démonstration de la proposition 2. - On déduit du lemme 1 la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(V_b; \Theta) \xrightarrow{\chi^*} H^0(\tilde{V}; \Theta) \xrightarrow{1 - b_*} H^0(\tilde{V}; \Theta) \xrightarrow{\delta_*} H^1(V_b; \Theta) \xrightarrow{\chi^*} H^1(\tilde{V}; \Theta) \xrightarrow{1 - b_*} H^1(\tilde{V}; \Theta) .$$

On vérifie que

$$\chi^* : H^1(V_b; \Theta) \rightarrow H^1(\tilde{V}; \Theta)$$

est nulle. Si $n > 2$, c'est évident, car $H^1(\tilde{V}; \Theta) = 0$. Si $n = 2$, un calcul direct sur les cochaînes d'un recouvrement de \tilde{V} par deux ouverts de Stein montre que

$$1 - b_* : H^1(\tilde{V}; \Theta) \rightarrow H^1(\tilde{V}; \Theta)$$

est bijective.

D'autre part, $H^0(\tilde{V}; \Theta)$ est l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur \tilde{V} , mais un tel champ se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe sur \mathbb{C}^n ; et $H^0(\tilde{V}; \Theta) = L \oplus M$, où L est l'espace des champs de vecteurs linéaires, et M l'espace des champs de vecteurs du second ordre en 0. Les sous-espaces L et M sont invariants par b_* , et $1 - b_* : M \rightarrow M$ est un isomorphisme. La proposition 2 en découle en remarquant que, si un élément de L est représenté par une matrice a , on a $b_* a = ba b^{-1}$.

2. Variété mixte dont les fibres sont des variétés de Hopf.

Soit B l'ensemble de toutes les matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{C} , dont toutes les valeurs propres sont de module > 1 . C'est un ouvert de \mathbb{C}^{n^2} . Soit α la transformation de $B \times \tilde{V}$ dans elle-même définie par $\alpha(b, x) = (b, b(x))$. Le groupe libre $L(\alpha)$ engendré par α opère librement sur $B \times \tilde{V}$, et le quotient $V = B \times \tilde{V}/L(\alpha)$ est une variété \mathbb{C} -analytique. En la munissant de la projection $\pi : V \rightarrow B$ déduite par passage au quotient de la projection $\pi_1 : B \times \tilde{V} \rightarrow B$, on obtient une variété mixte \mathbb{C} -analytique, propre, mais non régulière. En effet la condition (1) de la définition des variétés mixtes régulières n'est pas vérifiée : par exemple, pour $n = 2$, la dimension de $H^1(V_b; \Theta)$ est 4 quand b est une matrice scalaire, 2 dans les autres cas.

Remarquons que la dimension de $H^1(V_b; \Theta_b)$ est une fonction semi-continue supérieurement de b , et que l'ensemble des b telles que $\dim H^1(V_b; \Theta_b) \geq k$ est un sous-espace analytique fermé de B . C'est là un résultat général, que nous espérons pouvoir démontrer dans un exposé ultérieur de ce séminaire.

3. Calcul de ρ .

On a $T_b = \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) = L \subset H^0(\tilde{V}; \Theta)$, et on a défini, pour démontrer la proposition 2, une application $\delta_* : L \rightarrow H^1(V_b; \Theta)$ qui est surjective.

PROPOSITION 3. - L'application ρ de Spencer-Kodaira est donnée, pour la variété mixte étudiée dans ce chapitre, par

$$\rho(a) = \delta_*(ab^{-1}) \quad .$$

En particulier, elle est surjective, et a pour noyau l'espace des matrices de la forme $[\ell, b]$, $\ell \in L$.

DÉMONSTRATION. - Soit $a \in T_b = L$. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de V_b par des ouverts de Stein simplement connexes, et pour chaque i , soit $U_i^!$ une composante connexe de \tilde{U}_i .

Soit $\eta_i^!$ le champ projetable holomorphe sur $U_i^!$ défini par $\eta_i^!(x) = (a, 0)$; soit $\tilde{\eta}_i^!$ le champ projetable holomorphe sur $\tilde{U}_i^!$ défini par $\tilde{\eta}_i^! = \alpha_*^k \eta_i^!$ sur $b^k(U_i^!)$; et soit η_i le champ projetable holomorphe sur U_i correspondant à $\tilde{\eta}_i^!$. Par définition, $\rho(a)$ est la classe de cohomologie de la cochaîne (θ_{ij}) , où $\zeta_{ij} = \eta_j - \eta_i$ est un champ vertical holomorphe sur U_{ij} .

Posons $\tilde{\eta}_1(x) = (a, \beta_1(x))$. Alors $\beta \in C^\infty(\tilde{V}; \Theta)$, et on a
 $(1 - b_*) \beta = ab^{-1} \in L \subset H^0(\tilde{V}; \Theta)$. En effet $\alpha_* \eta = \eta$, soit $\alpha_* \eta_1(b^{-1}x) = \eta_1(x)$.

$$\alpha_*(a, \beta(b^{-1}x)) = (a, \beta(x)) \quad ,$$

d'où

$$ab^{-1}x + b \cdot \beta(b^{-1}x) = \beta(x) \quad .$$

On en déduit que $\theta = \delta_*(ab^{-1})$, ce qui démontre la proposition 3.

4. Un contre-exemple. - Prenons $n = 2$, et $\sigma \in \underline{\mathbb{C}}$ tel que $|\sigma| > 1$. Soit $B' \subset B$ l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma & t \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \underline{\mathbb{C}} \quad ,$$

et soit $V' = \pi^{-1}(B')$ la variété mixte induite par V au-dessus de V' ; B' est une droite, et son espace tangent T'_b en b est engendré, pour tout b , par $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il résulte de la proposition 3 que l'application de Spencer-Kodaira

$$\rho' : T'_b(B') \rightarrow H^1(V'_b; \Theta)$$

est nulle si et seulement si

$$b \neq b_0 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad ;$$

car pour $b \neq b_0$, $a = [\ell, b]$, où $\ell = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et pour $b = b_0$, ρ' est injective.

D'ailleurs, on peut voir que V' est triviale sur $B' - \{b_0\}$.

Soit $\varphi : \underline{\mathbb{C}} \rightarrow B' \subset B$ l'application définie par

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sigma & t^2 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad ,$$

et soit V^φ la variété mixte image réciproque de V par φ . L'application de Spencer-Kodaira ρ_t^φ de $\underline{\mathbb{C}}$ dans $H^1(V_{\varphi(t)}; \Theta)$ est la composée

$$\rho'_{\varphi}(t) \circ D\varphi : \mathbb{C} \rightarrow T'_{\varphi}(t) \rightarrow H^1(V_{\varphi}(t); \Theta)$$

Elle est nulle pour tout t , car :

- si $t \neq 0$, $\rho'_{\varphi}(t)$ est nulle ;
- si $t = 0$, $D\varphi$ est nulle.

Cependant la variété mixte V^{φ} n'est pas localement triviale, car V^{φ}_0 n'est pas isomorphe aux V^{φ}_t pour $t \neq 0$.

5. Question (K. SRINIVASACHARYULU).

On sait que les variétés de Hopf sont non-kählériennes, donc non algébriques. Pour $n = 2$, la variété V_b admet des fonctions méromorphes non constantes, si et seulement si b se diagonalise avec des valeurs propres σ_1 et σ_2 vérifiant une relation $\sigma_1^p = \sigma_2^q$, p et q entiers (il y a alors la fonction $x_1^p x_2^{-q}$). L'ensemble des b vérifiant cette propriété n'est ni ouvert, ni fermé, mais c'est une réunion dénombrable de sous-espaces analytiques fermés. Un phénomène analogue se produit pour les déformations de tores complexes. Ce résultat est-il général ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DCUADY (Adrien). - Variétés et espaces mixtes, Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61 : Déformations de structures analytiques complexes, n° 2, 7 p.
- [2] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.). - On deformation of complex analytic structures, I., Annals of Math., Series 2, t. 67, 1958, p. 328-401.

APPENDICE

Avec les notations de III, 1, soit $f : V_b \rightarrow V_b$, un isomorphisme de variétés \mathbb{C} -analytiques. Il se relève en un isomorphisme des revêtements universels

$$\tilde{f} : \mathbb{C}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$$

D'après HARTOGS, \tilde{f} se prolonge en un isomorphisme $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. On a nécessairement

$$(*) \quad g(bz) = b^{\cdot k} g(z), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

k étant un entier ; la même propriété, appliquée à l'application réciproque de g , montre que $k = \pm 1$. Soit a l'application linéaire tangente à g à l'origine ; l'identité (*) donne

$$ab = b^{\cdot k} a, \quad k = \pm 1,$$

d'où

$$b^{\cdot} = aba^{-1} \quad \text{ou} \quad b^{\cdot} = ab^{-1} a^{-1}.$$